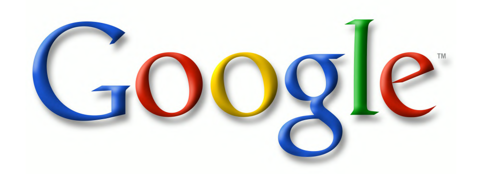
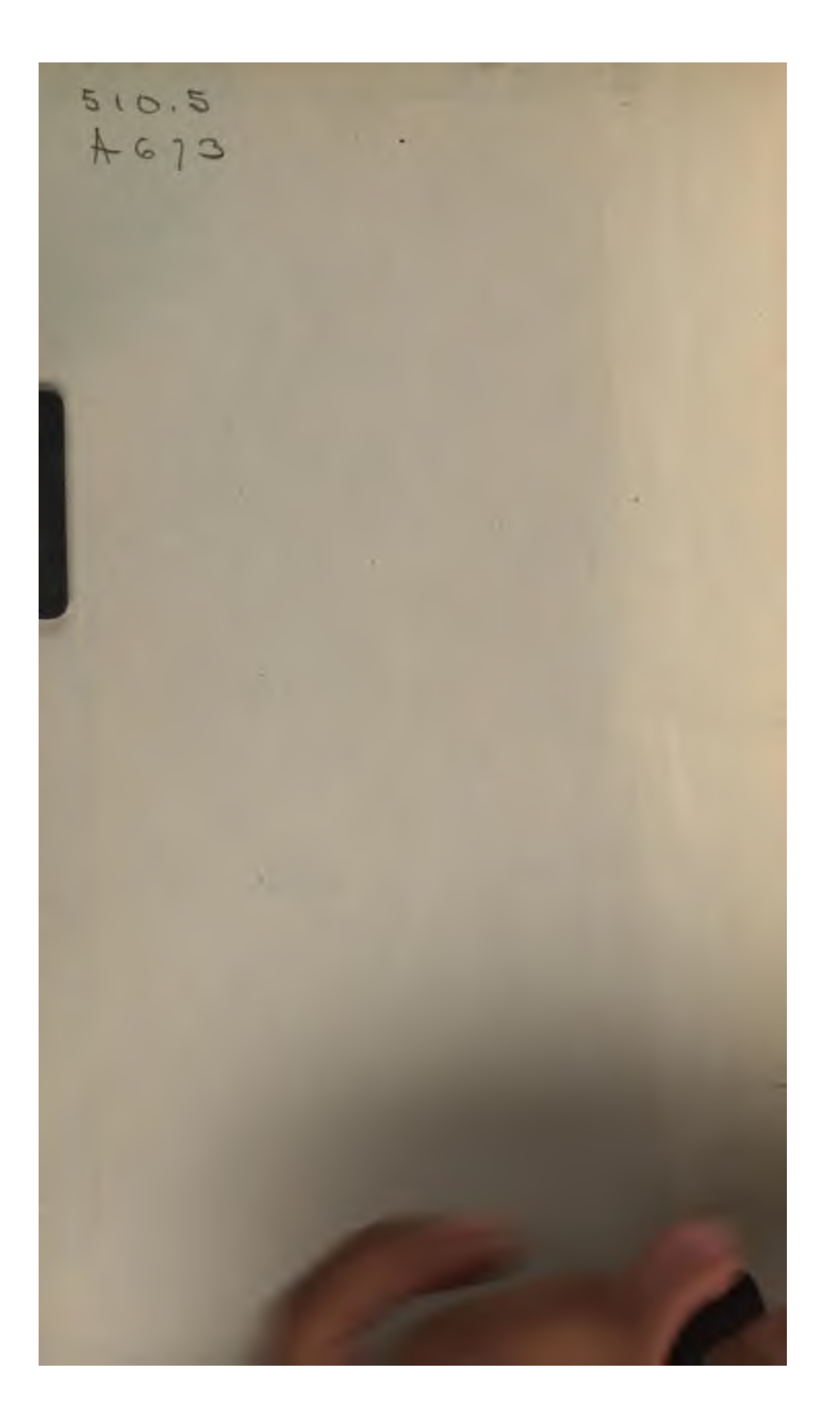





510.5
A673

6

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Zweiter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1885.

Trigonometrie.

Mechanik.

Optik, Akustik und Elasticität.

Litterarische Berichte.

Uppenborn (elektr. Masss.). Lisser u. B. (Zschr. ph. Unt.). Lie (Arch. II--VII.). Teixeira (Jorn. III. IV.) Amsterdam (N. Arch. XI.). Mansion (Math. IV.). Hamburg. math. Ges. (Mitt. III. IV.). Association Française (Congr. Lille, la Rochelle) Brüssel Akad. (Bull. I—V.) Amsterdam (Versl. en Meded. XVIII.). Smithson. Inst. (Rep. 1881—2). Washington Phil. Soc. (Bull. IV. V.). R. Acc. Linc. (Trans. VIII.). Böklen (math. natw. Mitt. I.).

VII. Frege (Grdl. d. Ar.). Vogt (Grenzbegr.). Teixeira (Jorn. V.). Mittag-Leffler (A. M. V.) Amsterdam (Versl. en Meded. XIX. XX.).

VIII. Walberer (Ar. u. Alg.). Köstler (Ar. — Vorsch. Geom.). Hoch (eb. Geom.). Glinzer (Geom.). Fischer (Geom.). Gusserow (Ster.). Spieker (Trig.). Sickenberger (Ar.). Gerlach (Plan.). Wrobel (Prop. Progr.). Claussen (Ar. u. Alg.). Hofmeister (Phys.). Blum (Phys.) Jüdt (Aufg.). Prampero (log. quadr.). August (5st Log.). Claussen (5st. Log.). Hartner (Geod.). Bohnenberger (Vermess.). Messerly (Rev. Su. :op.).

Berichtigungen

im LXX. Teile d. 1. Reihe:

Seite 433 in Gl. (4) links statt $C^{w}_{m}(r)$ setze $C^{w}_{m}(n)$

im II. Teile d. 2. Reihe:

Seite 2	Zeile 25	v. ob.	statt	und	setze	um
„ 4	„ 3	„ „	„	von	„	vor
„ 7	„ 10	„ „	„	2(*m*	„	(2*m*
„ 8	„ 1	v. unt.	vor	mit *B*	„	weil es

[redacted]

Seite 9	Zeile 9	v. unt.	statt	ja	setze	je
„ 10	„ 11,14	v. ob.	„	P_{z+1}	„	P'_{x+1}
	„ 18	„ „	„	$=$	„	$<$
„ 11	„ 9	v. unt.	„	substituirt	„	statuirt
„ 12	„ 12	v. ob.	„	gemäss	„	gewiss
	„ 17	„ „	„	P	„	P_x'
	„ 20	„ „	„	P_x'	„	P'_{x-1}
	„ 22	„ „	„	P'	„	P_x'
„ 16	„ 3	„ „	„	φ_3	„	φ_2
„ 19	„ 9	„ „	„	Q_{n-1}	„	R_{n-1}
„ 20	„ 16	„ „	„	φ_1	„	φ_2
„ 22	„ 18	„ „ (3mal)		K	„	V
„ 23	„ 3	„ „	„	B	„	$\mathfrak{B}$
„ 25	„ 2	v. unt.	„	M_2''	„	M_2'
„ 26	„ 3	v. ob.	„	OO	„	BO
„ 27	„ 6	„ „	„	Lage	„	Länge
„ 29	„ 3	„ „	„	$2\alpha =$	„	$2n =$
„ 32	„ 8	v. unt.	„	$\mathfrak{B}\mathfrak{P}$	„	$\mathfrak{B}P$
„ 33	„ 9	v. ob.	„	P_v'	„	P_v''
„ 34	„ 10	v. unt.	„	$= 2\alpha$	„	$= n.2\alpha$
„ 39	„ 19	v. ob.	„	von	„	vor
	„ 2	v. unt.	nach	§ 11.	„	zu einem andern
„ 40	„ 11	v. ob.	statt	zwischen	„	gewissen
„ 41	„ 20	„ „	nach	so ist	„	s
„ 42	„ 17	„ „	statt	P_n	„	P'_n
	„ 18	„ „	„	$\mathfrak{M}$	„	$\mathfrak{P}$
„ 43	„ 11	v. unt.	„	E_6'	„	P_6'
	„ 5	„ „	„	jenem	„	jenen
„ 44	„ 9	v. ob.	„	P_x'	„	P_n'
„ 45	„ 21	v. unt.	„	jene	„	je
	„ 13	„ „	„	E_k	„	E_k'
„ 46	„ 1	v. ob.	„	ungerader		gerader
	„ 10	„ „	„	Σ_{n+1}'	„	Σ_{n+1}'
	„ 19	„ „	„	ihnen	„	ihm
„ 47	„ 13	v. unt.	„	V	„	IV
	„ 5	„ „	„	7	„	
	„ 2	„ „	nach	Ebene	„	

Seite	48	Zeile	4 v. ob.	statt	fehlte	setze	fehlt
		"	14 v. unt.	"	Σ_{n+2}'	"	Σ_{n+1}'
		"	4 " "	"	$\mathfrak{R},$	"	$\mathfrak{R}_1$
"	49	"	12 v. ob.	"	eines	"	reines
		"	21 " "	nach	etwa	"	sich
"	50	"	1 v. unt.	statt	absoluter	"	aliquoter
"	55	"	7. v. ob.	"	(ξ)	"	$\tau(\xi)$
		"	17 " "	"	(ξ, η)	"	$(\xi-\eta)$
"	58	"	3 " "	"	$\chi_1(\eta)$	"	$\chi_2(\eta)$
		"	13 v. unt.	"	$\varphi(\xi)$	"	$\varphi(\eta)$
		"	12 " "	"	$\chi(\xi, \omega(\eta$	"	$\chi(\eta, \omega(\eta$
"	59	"	8 " "	nach	$\varphi_2(\eta)$	"	setzt
"	60	"	14 " "	statt	aber	"	also
"	61	"	11 " "	"	"	"	"
		"	7 " "	"	$c^{\xi}+a$	"	$c^{\xi}+d$
"	64	"	12 " "	"	höherer Geraden	"	höheren Grades
"	82	"	17 " "	vor	auf S. 427	"	in T. LXX.
"	86 bis 88		überall	statt	w	"	ω ausser in $^{\omega}C$
"	87	Zeile	3 v. unt.	"	$\binom{p+1}{m}$	"	$\binom{p+r}{m}$
"	92	"	17 " "	"	gemacht	"	genannt
"	93	"	5 v. ob.	"	er	"	r
		"	15 " "	"	$(m-1)r$	"	$(n-1)r$
		"	16 v. ob.	"	nur	"	und
		"	11 v. unt.	"	$^{r}C \quad (n-1$ $(n-1)s$	"	$^{r}C \quad (n-1)$ $(n-1)r$
"	94	"	1 v. ob.	"	c	"	b
		"	7 " "	"	b^{2s-m}	"	b^{2r-m}
"		"	10 v. unt.	"	$\overline{r \quad x}$	"	$\overline{r-x}$
"	95	"	9 v. ob.	"	a und c	"	a und b
		"	10 " "	"	$2r \quad q$	"	$2r-q$
		"	15 " "	"	braucharen	"	brauchbaren
"	97	"	16 " "	"	nieder	"	wieder
		"	21 " "	"	*ab*	"	ab
"	98	"	7 v. unt.	"	Berechnung	"	Beachtung.



I.

Der Winkelspiegel.

Genaueres über Lage und Anzahl der Bilder eines in seine Oeffnung eingeführten Gegenstandes.

Von

L. Mack.

(Mit einer Figur.)

Bezüglich der Erscheinungen am Winkelspiegel wird als Fundamentalaufgabe auszusprechen sein die folgende.

Gegeben sei die Oeffnung des Winkelspiegels in beliebig bestimmter Grösse, und ebenso beliebig bestimmt die Lage eines in jene eingeführten leuchtenden Punktes. Für die sich ergebenden Bilder desselben, welche in zwei charakteristisch verschiedene Reihen zerfallen, soll ermittelt werden: 1) die Lage jedes einzelnen mit gesetzmässiger Bestimmtheit, 2) je die Anzahl der in einer Reihe befindlichen, 3) die Anzahl aller zusammen, 4) die eigentümlichen Verhältnisse ihrer gegenseitigen Lage; je die entsprechende Angabe mathematisch formulirt in der Art, dass ihre Abhängigkeit von den gemachten Voraussetzungen völlig klar liege.

Wie diese Fundamentalaufgabe auch nur mit Bezug auf Nr. 3) streng gelöst wird, so zeigt sich, dass in einer Menge von Fällen, bei bestimmt gegebener Oeffnungsgrösse, die Gesammtzahl der Bilder eines die beiden Einzelspiegel bestrahlenden Punktes bald grösser, bald kleiner wird, jenachdem dieser Punkt seine Stellung zwischen beiden verändert. Hieraus folgt, dass für einen ausgedehnten Gegenstand, der in die Oeffnung eingeführt ist, einige der zu er-

wartenden Erscheinungen durchaus nicht so einfach sich gestalten, als man gewöhnlich sich vorstellen möchte; es ergibt sich also die Forderung, dass auch über diese Erscheinungen genügende Aufklärung gegeben werde.

Sieht man nun auf das in unsern Lehrbüchern Gebotene, so wird Niemand behaupten wollen, dass es auch nur den Forderungen der Fundamentalaufgabe (zu schweigen von den weiter anzuknüpfenden) genüge. Vielmehr wird man zugeben müssen, dass jene sowol in Betreff der Genauigkeit als der Vollständigkeit gar Manches zu wünschen übrig lassen, wie denn selbst von eigentlichen und starken Irrtümern oder Verstössen auf diesem Gebiete Verschiedenes zu berichten wäre.

Sucht man nach Originalarbeiten über den fraglichen Gegenstand, so findet sich eine solche von Bertin in den annales de chimie et de physique, série III, tome 29, page 257 … 262; Paris 1850. – Der Verfasser berührt zunächst die Notwendigkeit des Aufräumens mit landläufigen falschen Angaben, will übrigens wesentlich nur auf die Frage nach der *Gesammtzahl der Bilder eines einzelnen Lichtpunktes* sich einlassen. Dass diese immer eine begrenzte sei, will er mit wenigen Worten klar machen. Er hebt auch ganz richtig den Umstand hervor, an welchen zu diesem Behuf anzuknüpfen ist; indes einen wirklichen Beweis gibt er keineswegs. — Behufs der Erreichung seines Hauptzwecks unterscheidet er zwei Hauptfälle, jeden mit zwei Unterfällen. Hiernach betrachtet er vier besondere Figuren, und das von ihnen Abzulesende sofort in allgemeine Angaben umzusetzen, und zuletzt einen Generalsatz über die Gesammtheit der Bilder auszusprechen. Dieser ist zwar streng richtig, aber nicht übersichtlich; und sein zweiter Teil ist nicht bestimmt genug und nicht in solcher Weise gefasst, dass sofort für jede gegebene Oeffnungsgrösse und jede gegebene Lage des eingeführten Lichtpunkts die Zahl der sich ergebenden Bilder unzweideutig zu gewinnen wäre.

Aus neuester Zeit ist in Poggendorff's Annalen, Band VII, Stück 2, pag. 103 … eine russisch geschriebene Arbeit angezeigt: M. Pawloff, Untersuchung der Frage über die Bilder in zwei zu einander geneigten ebenen Spiegeln. Der Berichterstatter sagt kurz: „indem der Verfasser zuerst nachweist, dass die Anzahl der Bilder immer eine begrenzte ist, zeigt er weiter, wie für jede Lage der Spiegel und für jede Lage des leuchtenden Punkts diese Zahl zu bestimmen ist.“

Dass bei Pawloff wie bei Bertin so und so viele Forderungen der Fundamentalaufgabe unerfüllt geblieben seien, ist aus den gemachten Mitteilungen zur Genüge zu ersehen; ich möchte aber das besonders hervorheben, dass weder bei Bertin, noch bei Pawloff

(nach der Poggend. Angabe) irgend Erhebliches über die Eigentümlichkeiten der gegenseitigen Lage der Bilder zu finden sei. Gerade aber diese Eigentümlichkeiten, namentlich bei denjenigen zwei Bildern hervortretend, welche als letzte, jedes von einem der Einzelspiegel geliefert werden, sind im höchsten Grade überraschend. Schon ihre Ermittlung und Hervorhebung dürfte für die Berechtigung der hier zu veröffentlichenden Arbeit sprechen, wenn man auch bezüglich der arithmetischen Frage mit dem Richtigen, was schon Bertin gegeben hat, sich beruhigen wollte. Uebrigens ist gegenwärtige Arbeit in dem Sinne gemeint, dass sowol die oben ausgesprochene Fundamentalaufgabe vollständig gelöst, als auch der weiteren an sie geknüpften Forderung genügt werde.

Bei der hier durchgeführten Art der Untersuchung und Darstellung wird der aufmerksame Leser nach gezeichneten Figuren so wenig Verlangen tragen, dass er selbst diejenige überflüssig finden könnte, welche zur Veranschaulichung gewisser Definitionen und Bezeichnungen beigelegt ist; welche übrigens immerhin dienen mag, um bei den verschiedensten Gestaltungen oder Einteilungen des Operationsfeldes die Orientirung in diesem zu erleichtern.

---

§ 1.

Winkelspiegel heisst eine Zusammenstellung zweier undurchsichtigen Planspiegel, in der Art angeordnet, dass die allein spiegelnden Vorderflächen derselben zwischen sich einen hohlen Flächenwinkel ($< 180^0$) haben.

Dieser Flächenwinkel und seine Scheitelkante UV werden beziehungsweise als Oeffnung und Axe des Winkelspiegels bezeichnet.

Die allein spiegelnden Vorderflächen sind zu denken als zwei aus UV entspringende Ebenenstücke, die sich beliebig weit erstrecken: UVA den ersten Planspiegel abgebend, UVB den zweiten.

Zu den Ebenenstücken UVA, UVB sind ihre über UV hinaufgehenden Erweiterungen $UV\mathfrak{A}$, $UV\mathfrak{B}$ einzuführen, jede derselben rein geometrisch gedacht.

Bei jeder der Vollebenen $AUV\mathfrak{A}$, $BUV\mathfrak{B}$ heisst vordere Seite diejenige, an welcher die zugehörige Halbebene ihre spiegelnde Kraft entwickelt.

§ 2.

Sofern hinter einem der Einzelspiegel ein Bild erscheint, hervorgerufen durch einen von ihm befindlichen Gegenstand, möge solches kurz ein diesem Spiegel zugehöriges Bild genannt werden.

Wenn nun ein leuchtender Punkt P frei innerhalb der Oeffnung des Winkelspiegels sich befindet, so sind zunächst die zwei Bilder in's Auge zu fassen, deren jedes durch einen der Spiegel für sich, ohne Mitwirkung des andern, entsteht. Diese zwei niemals fehlenden sind notwendig von einander getrennt. Jedes liegt symmetrisch zu der Ebene desjenigen Spiegels, dem es zugehört. Diese zwei Bilder heissen die Bilder erster Ordnung.

Jedes von ihnen, wenn es vor dem Spiegel liegt, dem es nicht zugehört, verhält sich diesem gegenüber wie ein leuchtender Gegenstand, von welchem gedachter Spiegel ein neues (hinter ihm liegendes) Bild liefert — ein Bild zweiter Ordnung.

Von jedem der beiden Bilder zweiter Ordnung wird derjenige Spiegel, dem es nicht zugehört, möglicher Weise (wenn es eben vor ihm liegt) ein neues Bild geben — ein Bild dritter Ordnung; u. s. w.

Um jedes dieser Bilder sowol bezüglich seiner Zugehörigkeit zu einem bestimmten der zwei Einzelspiegel, als nach seiner Ordnung kenntlich zu machen, gebrauchen wir die Bezeichnung P_m' für das zu dem ersten Spiegel gehörige Bild $m$ter Ordnung, dagegen P_m'' für sein zum zweiten gehöriges derselben Ordnung. Demgemäss werden die zum ersten Spiegel gehörigen Bilder des Punkts P hier der Reihe nach benannt werden P_1', P_2', P_3' ...; die zum zweiten gehörigen der Reihe nach P_1'', P_2'', P_3'' ...

Da immer das von einem Gegenstand erhaltene Spiegelbild symmetrisch mit jenem liegt bezüglich der Ebene des zugehörigen Spiegels, so ist hieraus zunächst folgendes allgemein Bekannte zu entnehmen.

Alle durch das Zusammenwirken beider Einzelspiegel sich ergebenden Bilder des Punktes P befinden sich in derjenigen Ebene, welche durch P normal zu der Axe UV zu führen ist, die einen Durchschnittspunkt O mit jener gibt. Auch haben alle solche Bilder denselben Abstand von O wie P selbst; sie liegen mit P auf der Peripherie eines um O als Mittelpunkt zu beschreibenden Kreises.

Mit diesem Ortskreise der Bilder von P hat jedes der aus Axe UV entspringenden Ebenenstücke UVA, $UV\mathfrak{A}$, UVB, $UV\mathfrak{B}$ seinen bestimmten Durchschnittspunkt; diese Punkte selbst sollen der Reihe nach mit A, $\mathfrak{A}$, B, $\mathfrak{B}$ bezeichnet sein, und bei jedem der Paare (A, $\mathfrak{A}$), (B, $\mathfrak{B}$) ist zu beachten, dass es zwei Gegenpunkte des Kreises enthält. (Siehe Figur.)

Auf dem zwischen beiden Spiegelflächen selbst begriffenen Bogenstück APB heben wir ausser P noch hervor den Halbirungspunkt M desselben; so auch den Punkt P_0, welcher zu P symmetrisch mit Bezug auf die Gerade OM liegt. Zu diesen Punkten erscheinen beziehungsweise $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}_0$ als ihre Gegenpunkte auf dem Bogenstück $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$, welches zwischen den zwei Ebenenstücken $UV\mathfrak{A}$, $UV\mathfrak{B}$ begriffen ist. Hierbei die Möglichkeit vorbehalten, dass P und P_0 in M zusammenfallen, und demgemäss $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{M}$.

Es liegt nahe auch die Radien einzuführen, die aus O nach den erwähnten Peripheriepunkten gehen. Von diesen sind uns zunächst OA, OB aus dem Grunde besonders wichtig, weil sie die Spuren der zwei Einzelspiegel in der Ebene der Bilder des Punktes P sind, während zugleich der (hohle) Winkel AOB die Grösse 2α der Oeffnung des Winkelspiegels darstellt.

Für jedes der Bilder des Punktes P ist seine Lage vollständig bestimmt, einesteils durch die Länge des von O nach solchem Bilde gehenden Fahrstrahles, welche Länge gleich OP selbst ist, — andernteils durch die Grösse des Winkels, um welchen gedachter Fahrstrahl von der Spur (OA oder OB) des bezüglichen Spiegels, auf der Rückseite des letzteren, abweicht.

Jeder derartige Winkel soll hier durch eine absolute Zahl dargestellt werden, welche auf den Grad als Einheit sich bezieht. — Ist nun ein Winkel $AOP_x' = \psi$ angegeben, so heisst dies, dass man aus der Lage OA in die Lage OP_x' komme durch eine Drehung um ψ^0, in der Richtung über $O\mathfrak{B}$ nach $O\mathfrak{A}$; dagegen eine Angabe Wkl. $BOP_y'' = \omega$ besagt, dass man ans der Lage OB in die Lage OP_y' komme durch eine Drehung um ω^0 in der Richtung über $O\mathfrak{A}$ nach $O\mathfrak{B}$.

A n m e r k u n g. Vorstehender § hält streng fest die ganz bestimmte Voraussetzung, dass der Punkt P f r e i innerhalb der Oeffnung des Winkelspiegels liege, d. h. in keiner der zwei spiegelnden Flächen UVA, UVB selbst sich befinde. — Es mag gut sein sich klar zu machen, wie ganz anders gegenüber von solchem Punkt P die Verhältnisse für einen andern leuchtenden Punkt sind, wenn dieser in der Fläche eines der zwei Einzelspiegel selbst — immerhin seitwärts von der Axe UV — gegeben ist.

Angenommen, der Punkt A des ersten Einzelspiegels sei ein leuchtender.

Sofern nun A vor dem zweiten Spiegel liegt, so entsteht gewiss hinter diesem ein Bild A_1'', von A in derselben Weise abstammend wie P_1'' von P; und von A_1'' sind weitere Bilder A_2', A_3'', A_4' … in derselben Weise herzuleiten wie von P_1'' hergeleitet werden P_2', P_3'', P_4' … jedes folgende aus dem nächst vorhergehenden.

Dass das Licht des Punktes A von dem ersten Spiegel selbst, dem er angehören soll, auch reflectirt werde, wird man nicht sagen wollen, man wird also von einem Bilde A_1' nicht zu sprechen haben. Jedenfalls aber müsste dieses mit A selbst identisch gesetzt werden, und von A_1' wären durchaus keine weiteren Bilder des Punktes A herzuleiten, als die vorhin angeführten A_1'', A_2', A_3'', A_4' …

§ 3.

„Um nun Genaueres über Lage und Anzahl sämmtlicher zu P „sich ergebenden Bilder entwickeln zu können, stellen wir zunächst „folgende Betrachtung an“.

Sei irgend ein zum ersten Spiegel gehöriges Bild P_m' gedacht, zu welchem der zweite noch das Bild P_{m+1}'' gebe. Der Fahrstrahl OP_m', hinter dem ersten Spiegel liegend, weiche von dessen Spurlinie OA um einen Winkel ψ ab. Indes muss OP_m', damit das Bild P_{m+1}'' entstehen könne, vor dem zweiten Spiegel liegen, von der Spur OB desselben abweichend um den Betrag $BOA + AOP_m'$, d. h. um $2\alpha + \psi$. Dieselbe Abweichung von OB, aber hinter dem zweiten Spiegel, muss der Fahrstrahl OP_{m+1}'' haben, d. h. es muss Winkel $BOP_{m+1}'' = 2\alpha + \psi$ sein. — So findet sich der also lautende

Hauptsatz.

„Wenn das zu dem einen Einzelspiegel gehörige Bild $m$ter Ord- „nung des Punktes P seinen Fahrstrahl hinter die Spur gedachten „Spiegels zurückweichen lässt um einen Winkel ψ, so muss das etwa „entstehende, zu dem andern Spiegel gehörige Bild $(m+1)$ter Ord- „nung seinen Fahrstrahl hinter dessen Spur zurückweichen lassen „um $2\alpha + \psi$; hiebei unter 2α die Oeffnungsgrösse des Winkelspiegels „gedacht“.

Sei nun φ_1 die Abweichung des Fahrstrahls OP von der Spur OA nächst gegen OB hin, und φ_2 die Abweichung desselben Fahr-

strahls von OB gegen OA hin, so ist offenbar zunächst für die zwei Bilder P_1', P_1'' anzugeben

$$\text{Winkel } AOP_1' = \varphi_1, \quad BOP_1'' = \varphi_2.$$

An diese zwei einfachsten Angaben sind, mit Anwendung des vorigen Hauptsatzes, sofort zu knüpfen die zwei Reihen von Angaben

I.

$$\begin{aligned} \text{Winkel } AOP_1' &= \varphi_1 \\ AOP_2' &= 2\alpha + \varphi_2 \\ AOP_3' &= 4\alpha + \varphi_1 \\ &\vdots \\ AOP_{2m-1}' &= 2(m-2)\,2\alpha + \varphi_1 \\ AOP_{2m}' &= (2m-1)\,2\alpha + \varphi_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} \text{Winkel } BOP_1'' &= \varphi_2 \\ BOP_2'' &= 2\alpha + \varphi_1 \\ BOP_3'' &= 4\alpha + \varphi_2 \\ &\vdots \\ BOP_{2m-1}'' &= (2m-2)\,2\alpha + \varphi_2 \\ BOP_{2m}'' &= (2m-1)\,2\alpha + \varphi_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bei jeder der vorstehenden Reihen ist zu sehen, dass sie vermöge ihres arithmetisch-geometrischen Bildungsgesetzes bis ins Unendliche fortzuführen ist; und in diesem Fortgang werden die immer wachsenden Winkel AOP' BOP'' über jede zu gebende Grösse hinausgeführt.

Hiedurch ist mit Bezug auf jeden der zwei Einzelspiegel die Frage angezeigt, ob die Anzahl der ihm zugehörigen Bilder von P (wie es ja scheinen möchte) eine unendlich grosse sein werde oder nicht.

§ 4.

„Angesichts voriger Frage sind sofort folgende Beschränkungen „zu betonen, welche für die Lagen der Bilder des Punktes P sich „ergeben".

1) Jedes der zum ersten Spiegel gehörigen Bilder P', da es nur hinter diesem Spiegel sein kann, ist angewiesen auf den Halbkreisbogen $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, dessen Grenzpunkte A, $\mathfrak{A}$ sind.

Ebenso jedes der Bilder P'' ist angewiesen auf den Bogen $B\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, dessen Grenzpunkte B, $\mathfrak{B}$ sind.

2) Im Grenzpunkt $\mathfrak{A}$ des Bogens $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ kann niemals ein Bild P' sich befinden.

Denn zunächst ist klar, dass P_1' nicht in $\mathfrak{A}$ sein könne. — Sollte aber ein Bild P_n' (mit $n > 1$) zu Stande kommen, so müsste es hervorgerufen sein durch ein Bild P_{n-1}''. Die Punkte P_n', P_{n-1}'' müssten zu der Ebene des ersten Spiegels, in welcher P_n' mit $\mathfrak{A}$ vereinigt sein sollte, symmetrisch liegen; es müsste also P_{n-1}'' ebenfalls in $\mathfrak{A}$ sein. Aber in der Lage $\mathfrak{A}$ befindlich kann ein leuchtender Punkt P_{n-1}'' keine reflexionsfähigen Strahlen an die spiegelnde Fläche UVA gelangen lassen. Also ein Bild P_n' an der Stelle $\mathfrak{A}$ ist unmöglich.

Ebenso zeigt sich die Unmöglichkeit eines Bildes P'' an der Stelle $\mathfrak{B}$.

3) Auch im Grenzpunkt A des Halbkreisbogens $A\mathfrak{B}A$ kann kein Bild P' erscheinen.

Denn zunächst überzeugt man sich, dass P_1' nicht in A sein könne. — Sollte aber ein Bild P_n' (mit $n > 1$) in A zu Stande kommen, so würde dies die Existenz eines Bildes P_{n-1}'' voraussetzen, welches den zwei sich widersprechenden Forderungen genügen müsste: einesteils hinter der Ebene des zweiten Spiegels zu liegen, andernteils mit A zusammenzufallen.

Ebenso zeigt sich die Unmöglichkeit eines Bildes P'' an der Stelle B.

4) Sieht man auf das Bogenstück $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$, welches den zwei Halbkreisen $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gemeinschaftlich ist, so zeigt jeder zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ liegende Punkt desselben die Eigenschaft, frei sowohl hinter der einen als hinter der andern der zwei Spiegelebenen zu liegen, so dass kein Licht von ihm an die eine oder die andere der zwei spiegelnden Flächen UVA, UVB gelangen könne. Hienach ist zu sagen:

Wenn ein zum ersten oder zweiten Spiegel gehöriges Bild des Punktes P irgendwo auf dem Bogen $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ zwischen seinen Endpunkten [illegible] befindet, so gibt es kein Bild höherer Ordnung, welches als ein von dem erstgedachten Bilde abgeleitetes zu finden wäre.

5) Was insbesondere die Grenzpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ des Bogens $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ betrifft, so ist leicht zu sehen: es mag zwar in $\mathfrak{B}$ ein zum ersten Spiegel gehöriges Bild P_n' entstehen, aber von diesem aus, mit $\mathfrak{B}$

in der Ebene des zweiten Spiegels, und seitwärts von der Abteilung *UVB* liegt, kann kein Bild P_{n+1}'' sich ergeben. Desgleichen mag immerhin an der Stelle 𝔄 ein zum zweiten Spiegel gehöriges Bild P_m'' sich befinden, aber es ist kein P_{m+1} von ihm herzuleiten.

Jedes Bild P' oder P'', von welchem kein Bild höherer Ordnung abzuleiten ist, heisst nach Bertin ein improductives; jedes andere mag ein productives heissen.

Aus vorstehenden besonderen Angaben ergibt sich nun die umfassende:

I) „Jedes Bild P' liegt auf dem Halbkreisbogen *A*𝔅𝔄 frei „zwischen seinen Grenzpunkten *A*, 𝔄; und zwar jedes productive „zwischen *A* und 𝔅, jedes improductive von 𝔅 bis vor 𝔄".

„Jedes Bild P'' liegt auf dem Halbkreisbogen *B*𝔄𝔅 frei zwischen „seinen Grenzpunkten *B*, 𝔅; und zwar jedes productive zwischen „ *B* und 𝔄, jedes improductive von 𝔄 bis vor 𝔅".

Sieht man jetzt auf den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken *UV*𝔄, *UV*𝔅, so ist auch zu sagen:

II) „Ein Bild P' oder P'' des Punktes P ist immer dann und „nur dann improductiv, wenn es entweder frei zwischen den Ebenen„stücken *UV*𝔄, *UV*𝔅, oder in einem von diesen sich befindet".

Der hiemit scharf bestimmte Ort der improductiven Bilder heisse der todte Raum.

Durch die Angaben I) und II) ist man zunächst auf die Möglichkeit solcher Lagen von P hingewiesen, bei welchen eine begrenzte Zahl für die zu dem einen Spiegel gehörigen Bilder sich ergibt, und ebenso eine begrenzte für die zu dem andern gehörigen.

Wo nun diese Möglichkeit verwirklicht ist, mag ja das letzte Bild von P, welches durch letzte Reflexion an einem der Einzelspiegel als ihm zugehöriges sich ergibt, kurz als das zu diesem Spiegel gehörige Grenzbild von P bezeichnet werden.

§ 5.

„Verbinden wir jetzt die Lehren der §§ 3. und 4., so gelingt es „vollständige Klarheit über die am Schluss des § 3. aufgeworfene „Frage zu geben, ob nämlich für die Bilder P' und P'' immer je „eine begrenzte Anzahl sich ergebe oder nicht".

Wir wollen zu dem Behuf vorerst an die Bilder P' uns halten, und wir wollen für den (ersten) Spiegel, zu welchem sie gehören, sogleich die nähere Bestimmung treffen, er solle der dem Punkt P etwa nähere sein; womit $\varphi_1 \leqq \alpha$ statuirt ist. — Sofort sind folgende Bemerkungen zu machen.

Ist x irgend eine ganze Zahl, welche den nach § 3. I. entwickelt zu denkenden Wert des Winkels $AOP_x' < 180$ macht, so ist jeder der Punkte P_1', P_2' ... P_x' ein Bild von P; und diese Bilder liegen der Reihe nach auf dem Bogen $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ zwischen A und $\mathfrak{A}$.

Ist x sogar die grösste ganze Zahl, welche den Wert $AOP_x' < 180$ macht, so ist notwendig AOP_{x+1} entweder $= 180$ oder > 180. Alsdann gilt von den Punkten P_1' ... P_x' noch dasselbe wie vorhin, es ist aber sogleich das Weitere hervorzuheben was folgt.

Die Angabe $AOP_{x+1} = 180$, wenn sie zutrifft, verweist den Punkt P_{x+1}' an die Stelle $\mathfrak{A}$, wo nach § 4. I) niemals ein Bild P' erscheinen kann.

Die Angabe $AOP_{x+1}' > 180$, wenn sie zutrifft, und wenn zugleich $AOP_{x+1}' = 360$ sich zeigt, verweist den Punkt P_{x+1}' auf eine zwischen $\mathfrak{A}$ und A liegende Stelle des Halbkreisbogens $\mathfrak{A}BA$, d. h. an eine Stelle vor dem ersten Spiegel, wo ebenfalls kein Bild P' erscheinen kann.

Um also sicher zu sein, dass die Zahl der Bilder P' eine begrenzte sei, genügt es offenbar, die folgende Behauptung streng zu beweisen.

☾ Wenn x die grösste natürliche Zahl ist, welche den Winkel $AOP_x' < 180$ macht, und wenn von den zwei hiemit allein verträglichen Angaben $AOP_{x+1}' = 180$ und $AOP_{x+1}' > 180$, die letztere zutrifft, so muss damit zugleich bestehen die Angabe $AOP_{x+1}' < 360$.

Diess lässt sich in der Tat beweisen; man hat aber zu dem Behufe getrennt zu behandeln die zwei Fälle: x ungerade und x gerade.

Erster Fall: x ungerade.

Da die zwei Angaben bestehen sollen

a) $AOP_x' < 180$, b) $AOP_{x+1}' > 180$,

und da nach § 3. die Entwicklungen stattfinden

a') $AOP_x' = (x-1)2\alpha + \varphi_1$, b') $AOP_{x+1}' = x.2\alpha + \varphi_2$

so haben wir hier

a'') $(x-1)2\alpha + \varphi_1 < 180$ und b'') $x.2\alpha + \varphi_2 > 180$.

Für $x = 1$ (weil ja immer $2\alpha < 180$ und $\varphi_2 < 2\alpha$) hat man ohne Weiteres

$$x.2\alpha + \varphi_2 < 360$$

d. h.

$$AOP_{x+1}' < 360.$$

Ist vielmehr die ungerade Zahl $x > 1$, so dient uns die aus a″) herzuleitende

$$x.2\alpha - \varphi_2 < 180,$$

welche durch Verdopplung beider Seiten übergeht in

$$\text{a}''') \quad (x.2\alpha + \varphi_2) + (x.2\alpha - 3\varphi_2) < 360.$$

Da jetzt x mindestens $= 3$ sein soll, so ist hier $(x.2\alpha - 3\varphi_2)$ sicher positiv, und da a''') unzweifelhaft

$$x.2\alpha + \varphi_2 < 360$$

gibt, so ist wieder

$$AOP_{x+1}' < 360.$$

Zweiter Fall: x gerade.

Da zu den zwei Angaben

$$\text{a)} \quad AOP_x' < 180, \qquad b) \quad AOP_{x+1}' > 180$$

jetzt die Entwickelungen gehören

$$\text{a}') \quad AOP_x' = (x-1)2\alpha + \varphi_2, \qquad \text{b}') \quad AOP_{x+1}' = x.2\alpha + \varphi_1,$$

so haben wir hier

$$\text{a}'') \quad (x-1)2\alpha + \varphi_2 < 180 \quad \text{und} \quad \text{b}'') \quad x.2\alpha + \varphi_1 > 180.$$

Die a″) ist sofort überzuführen in

$$x.2\alpha - \varphi_1 < 180,$$

wonach auch

$$\text{a}''') \quad (x.2\alpha + \varphi_1) + (x.2\alpha - 3\varphi_1) < 360.$$

Da nun x mindestens $= 2$ sein soll, und da $\varphi_1 \overline{<} \alpha$ substituirt ist, so hat man hier $(x.2\alpha - 3\varphi_1)$ sicher positiv, und die a‴) gibt unzweifelhaft

$$x.2\alpha + \varphi_1 < 360$$

d. h. eben

$$AOP_{x+1}' < 360.$$

Nachdem hiemit die Behauptung ☾ für alle Fälle, wo $\varphi_1 \overline{<} \alpha$, streng bewiesen ist, hat man ihr gemäss und kraft des Nächstvorhergehenden vorerst den Satz:

⊙) Wenn der Punkt P gegen die zwei Einzelspiegel so liegt, dass $\varphi_1 \leqq \alpha$, so ist die Zahl der Bilder P' eine begrenzte x, und zwar ist x die grösste natürliche Zahl, welche die nach § 3. zu denkende Entwickelung des Winkelwertes $AOP_x' < 180$ macht.

Ist nun P_x' im Sinne dieses Satzes das letzte der Bilder P', so sind für den Winkel AOP_x' (der immer < 180) als drei mögliche Fälle zu beachten

$$AOP_x' \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 180 - 2\alpha.$$

Für jeden dieser drei Fälle ist jetzt zu zeigen, dass auch ein Grenzbild P'' sich einstelle.

1) Ist Winkel $AOP_x' < 180 - 2\alpha$, liegt also das Grenzbild P_x' frei ausserhalb des todten Raumes, so ist nach § 4. gemäss ein Bild P_{x+1}'' aus ihm herzuleiten; aber ein Bild P_{x+2}'' ist so gewiss u. - möglich, als ein Bild P_{x+1}' nicht vorhanden ist.

Und hiebei hat man nach § 3.

$$\text{Wkl. } BOP_{x+1}' = AOP_x' + 2\alpha, \quad \text{d. h. } < 180.$$

2) Ist Winkel $AOP_x' = 180 - 2\alpha$, liegt also das Grenzbild P in $\mathfrak{B}$, so ist (nach § 4.) zwar kein P_{x+1}'' herzuleiten aus P_x', wol aber ein Bild P_x'' aus P_{x-1}'; und man erhält hiebei

$$\text{Wkl. } BOP_x'' = AOP_x' + 2\alpha, \quad \text{d. h. } < 180.$$

3) Ist Winkel $AOP_x' > 180 - 2\alpha$, so sei die — positive — Differenz $180 - AOP'$ bezeichnet mit ψ.

Da nun gemäss der gemachten Annahme P_x' frei innerhalb des todten Raumes liegt, so ist nach § 4. ein Bild P_{x+1}'' unmöglich. Gewiss aber ist die Existenz des P_{x-1}'', von welchem P_x' abstammt, und fraglich ist nur, ob auch noch Punkt P_x'' ein Bild sei. Die Entscheidung dieser Frage hängt davon ab, ob x gerade sei oder ungerade.

Ist x gerade, so bestehen nach § 3. für die Punkte P_x', P_x'' die Angaben

$$\text{Wkl. } AOP_x' = (x-1)\,2\alpha + \varphi_2$$
$$BOP_x'' = (x-1)\,2\alpha + \varphi_1.$$

Diese lassen (wegen $\varphi_1 \leqq \varphi_2$) erkennen, dass $BOP_x'' \begin{smallmatrix} = \\ < \end{smallmatrix} AOP_x'$, somit < 180; und man sieht, dass P_x'' so gut wie P_x' ein Bild von P sei.

Ist aber x ungerade, so hat man vielmehr die Angaben

$$\text{Wkl. } AOP_x' = (x-1)\,2\alpha + \varphi_1$$
$$BOP_x'' = (x-1)\,2\alpha + \varphi_2$$

somit

$$BOP_x'' = AOP_x' + \varphi_2 - \varphi_1.$$

Jenachdem nun $\varphi_2 - \varphi_1$ (immer $< 2\alpha$) sich $\gtreqless \psi$ zeigt, wird der Winkel BOP_x'' (immer < 360) sich $\gtreqless 180$ finden. Und hieraus ist bei unserer Annahme der ungeraden x in aller Strenge zu schliessen, dass zu Grenzbild P_x' auch als richtiges Grenzbild entweder P_{x-1}'' oder P_x'' hinter dem zweiten Spiegel sich ergebe.

Zu jeder der eben erörterten Annahmen 1), 2), 3), welche die allein möglichen sind, zeigt sich offenbar eine bestimmte natürliche Zahl y als Ordnungszahl eines Grenzbildes P_y''.

Diese Zahl y, entweder $= x+1$, oder $= x$, oder $= x-1$ sich findend, ist auch gewiss die g r ö s s t e natürliche Zahl, welche den nach § 3. entwickelt zu denkenden Winkelwert $BOP_y'' < 180$ macht, Denn wenn auch noch $BOP_{y+1}'' < 180$ sein könnte, so könnte ja P_y'' nicht das Grenzbild sein, als welches es doch erwiesen wurde.

Jetzt die Ergebnisse vorstehender Untersuchung zusammenfassend erkennt man für j e d e frei innerhalb des Winkelspiegels angenommene Lage des P ($\varphi_1 \lesseqgtr \varphi_2$) die Giltigkeit der Sätze:

I) „Sowohl für die Bilder P' ergibt sich immer eine begrenzte „Anzahl u, als für die Bilder P'' eine begrenzte Anzahl v; immer „nämlich u als die grösste natürliche Zahl, welche den nach § 3. ent„wickelt zu denkenden Winkelwert $AOP_u' < 180$ macht, — und v „als die grösste natürliche, welche dasselbe mit Bezug auf BOP_v'' „leistet".

II) „Die Ordnungszahlen u und v der Grenzbilder P_u', P_v'' sind „immer entweder einander gleich oder nur um Eins verschieden."

Was übrigens die Gleichheit von u und v betrifft, so ist schon aus Obigem und späterhin noch genauer zu sehen, dass sie n i c h t b l o s s in den Fällen mit $\varphi_1 = \varphi_2$ eintreten wird, in welchen sie freilich (wegen vorhandener Symmetrieverhältnisse) als selbstverständsich sich darbietet.

Anmerkung 1. Sofern in obiger Untersuchung bei vorkommendem P_{x-1}'' die Zahl x gleich Eins würde, wäre natürlich unter P_0'' der leuchtende Punkt P selbst zu denken.

Anmerkung 2. „Der obige Hauptsatz I) bietet bereits eine immer „zum Ziel führende Methode dar zur Auflösung der Aufgabe: aus „gegebenen Werten von 2α, φ_1, φ_2 die entsprechenden Zahlen u und „v zu ermitteln".

Will man z. B. u ermitteln, so ist davon auszugehen, dass u (bei P_u') entweder eine ungerade Zahl u_1 oder eine gerade u_2 sein muss. Mit Bezug auf die erste Möglichkeit ist gemäss dem § 3. zu suchen

u_1 als grösste ungerade Zahl, welche der Ungleichung genügt

$$1)\quad (u_1-1)\,2\alpha+\varphi_1<180;$$

mit Bezug auf die andere Möglichkeit ist zu suchen

u_2 als grösste gerade Zahl, welche der Ungleichung genügt

$$2)\quad (u_2-1)\,2\alpha+\varphi_2<180.$$

Aus 1) und 2) ergibt sich

u_1 = grösste ungerade Zahl **unter** dem Quotientenwerte $\dfrac{180+2\alpha-\varphi_1}{2\alpha}$,

u_2 = grösste gerade Zahl **unter** dem Quotientenwerte $\dfrac{180+2\alpha-\varphi_2}{2\alpha}$.

Von den zwei hiemit bestimmten Zahlen u_1, u_2, ist die grössere für u zu wählen.

Man bemerke die für den Fall $\varphi_1=\varphi_2+\alpha$ sich ergebende Vereinfachung.

§ 6.

Jetzt vollkommen davon überzeugt, dass für die optische Anwendung jede der Reihen I), II) des § 3. eine begrenzte sei, wollen wir auf die genauere Untersuchung derselben eingehen.

Im Sinne der Allgemeinheit der zu erwartenden Ergebnisse lassen wir dahin gestellt, ob $\varphi_1 \lesseqgtr \varphi_2$ sei; wir halten nur immer fest die Voraussetzungen: 2α **zwischen** 0 und 180, φ_1 und φ_2 je >0, $\varphi_1+\varphi_2=2\alpha$.

Zunächst beschäftigen wir uns mit der ersten jener Reihen, welche die Angaben darbietet:

$$
\begin{aligned}
\text{Winkel } AOP_1' &= \varphi_1 \\
AOP_2' &= 2\alpha + \varphi_1 \\
AOP_3' &= 4\alpha + \varphi_1 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
AOP_{2m-1}' &= (2m-2)2\alpha + \varphi_1 \\
AOP_{2m}' &= (2m-1)2\alpha + \varphi_1 \\
AOP_{2m+1}' &= 2m.2\alpha + \varphi_1 \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Da in vorstehenden Auswertungen der Reihe nach die Winkelwerte 2α, 4α, 6α ... eine so ausgezeichnete Rolle spielen, so empfiehlt es sich, dieselben zu entsprechender Darstellung in der Ortsebene der Bilder P' zu bringen. — Zu dem Behuf werden auf dem Halbkreisbogen $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, auf welchen die sämmtlichen Bilder beschränkt sind, der Reihe nach die Punkte L_1, L_2, L_3 ... L_n so genommen, dass die einzelnen Bogen AL_1, L_1L_2, L_2L_3 ... $L_{n-1}L_n$ je gleich 2α seien, (d. h. die Gradzahl 2α haben), während der letzte $L_n\mathfrak{A}$ entweder auch gleich 2α ist, oder einen unter 2α liegenden Wert ω hat. Jetzt die Radien OL_1, OL_2 ... OL_n eingeführt, so sieht man, dass die Winkel 2α, 4α, 6α ... der Reihe nach durch die Winkelfächer AOL_1, AOL_2, AOL_3 ... dargestellt sind. Zugleich hat man vor sich der Reihe nach die Winkelfächer AOL_1, L_1OL_2 ... $L_{n-1}OL_n$, $L_nO\mathfrak{A}$. Diese zeigen sich so wichtig, dass wir sie bezeichnen wollen als **die zu dem ersten Spiegel gehörigen Hilfsfächer**: erstes, zweites ... $(n+1)$tes. Das letztgenannte heisse auch **das zu diesem Spiegel gehörige Schlussfach**.

Sofern nun jeder der Winkel φ_1 und φ_2 einen Wert **zwischen** 0 und 2α hat, so sind an ihr abwechselndes Vorkommen in den obigen Auswertungen der Winkel AOP' folgende Bemerkungen zu knüpfen.

Zunächst bei dem ersten Hilfsfach AOL_1 ist ersichtlich, dass das Bild P_1' frei in demselben liegt, so zwar, dass sein Fahrstrahl OP_1' von dem ersten Grenzradius des Faches um φ_1 abweicht.

Sieht man auf irgend ein Hilfsfach ungerader Ordnung $(2m-1)$, welches zwischen den Radien OL_{2m-2} und OL_{2m-1} liegt, so ergibt sich, dass P_{2m-1}' frei innerhalb solchen Hilfsfaches liegt, so zwar, dass OP_{2m-1}' von dem ersten Grenzradius desselben OL_{2m-2} um φ_1 abweicht.

Fasst man desgleichen in's Auge ein Hilfsfach gerader Ordnung ($2m$) mit Grenzradien OL_{2m-1}, OL_{2m}, so ist zu sehen: P_{2m}' liegt in demselben, so zwar, dass OP_{2m}' von OL_{2m-1} um φ_3 abweicht.

Sieht man endlich auf dass Schlussfach $L_n O\mathfrak{A}$, dessen Ordnungszahl ($n+1$) ist, so hat man zunächst für den Fall $L_n O\mathfrak{A} = 2\alpha$ zu bemerken, dass jenes genau sich verhalte entweder wie ein vorangehendes Hilfsfach ungerader Ordnung oder wie ein vorangehendes gerader, jenachdem $n+1$ ungerade ist oder gerade. Also muss in solchem Fache ein Bild P_{n+1} liegen und so liegen, dass der Fahrstrahl OP_{n+1}' dem Fahrstrahl OL_n entweder um φ_1 oder um φ_2 voraus ist, jenachdem $n+1$ ungerade ist oder gerade.

Wenn dagegen der Winkel $L_n O\mathfrak{A}$ eine Grösse ω unter 2α hat, dann hat man mit den Gleichungen

$$AOL_n = n.2\alpha$$
$$AO\mathfrak{A} = n.2\alpha + \omega$$

zusammen

$$\text{entweder } AOP_{n+1}' = n.2\alpha + \varphi_1 \quad \text{bei ungerader } n+1$$
$$\text{oder } AOP_{n+1}' = n.2\alpha + \varphi_2 \quad \text{bei gerader } n+1,$$

und es zeigt sich sofort: das Grenzbild P_{n+1}' kommt in dem Schlussfache dann und nur dann zu Stande, wenn entweder $n+1$ ungerade und $\varphi_1 < \omega$, oder wenn $n+1$ gerade und $\varphi_2 < \omega$; und der Fahrstrahl OP_{n+1}' weicht von dem ersten Grenzradius OL_n dieses Faches entweder um φ_1 oder um φ_2 ab, jenachdem $n+1$ ungerade oder gerade.

Hienach ergeben sich folgende Sätze über Lage und Ordnungszahl jedes einzelnen Bildes P', insbesondere des Grenzbildes.

I) „Jedes der zum ersten Spiegel gehörigen Bilder $\mathfrak{P}'$ liegt frei „in demjenigen Hilfsfach dieses Spiegels, welches dieselbe Ordnungs- „zahl hat wie das Bild; und der Fahrstrahl OP' des Bildes weicht „von dem ersten Grenzradius des Faches entweder um φ_1 oder um „φ_2 ab, jenachdem die Ordnungszahl ungerade ist oder gerade. Das „Grenzbild findet sich freiliegend entweder in dem Schlussfache oder „in demjenigen Hilfsfache, welches letzterem zunächst vorangeht."

II. „Ist n die grösste ganze Zahl, welche unterhalb des „Quotientenwertes $180:2\alpha$ liegt, und wird immer unter P_u' das zu „dem ersten Spiegel gehörige Grenzbild verstanden, so sind über seine „Ordnungszahl u und seine Lage die folgenden Angaben zu machen."

1) Ist $180:2\alpha$ eine ganze (die Eins übertreffende) Zahl $n+1$, so ist jedenfalls $u = n+1$; aber man hat

a) bei ungerader n

Winkel $AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_2$, d. h. auch $\mathfrak{A}OP_u' = \varphi_1$

b) bei gerader n

Winkel $AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_1$, d. h. auch $\mathfrak{A}OP_u' = \varphi_2$.

2) Wenn die Division $180:2\alpha$ einen Rest ω lässt, so dass $180 = n.2\alpha + \omega$, so hat man

a) bei ungerader n

entweder mit $\varphi_2 < \omega$ die Angaben

$$u = n+1,\quad AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_2,\quad \mathfrak{A}OP_u' = \omega - \varphi_2$$

oder mit $\varphi_2 \geqq \omega$ die Angaben

$$u = n,\quad AOP_u' = (n-1)2\alpha + \varphi_1,\quad \mathfrak{A}OP_u' = \omega + \varphi_2$$

b) bei gerader n

entweder mit $\varphi_1 < \omega$ die Angaben

$$u = n+1,\quad AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_1,\quad \mathfrak{A}OP_u' = \omega - \varphi_1$$

oder mit $\varphi_1 \geqq \omega$ die Angaben

$$u = n,\quad AOP_u' = (n-1)2\alpha + \varphi_2,\quad \mathfrak{A}OP_u' = \omega + \varphi_1.$$

Die in unsrem § vorangestellte Tafel der Winkel AOP_u' und ihrer Auswertungen fordert für sich zur Vergleichung von je zwei nächst benachbarten Gliedern der Winkelreihe auf. Da ergeben sich zunächst folgende Bemerkungen.

Die Differenz $AOP_2' - AOP_1'$ findet sich $= (2\alpha - \varphi_1) + \varphi_2 = 2\varphi_2$; und ganz dasselbe ergibt sich für $AOP_{2m}' - AOP_{2m-1}'$. Dagegen die Differenz $AOP_3' - AOP_2'$ findet sich $= (2\alpha - \varphi_2) + \varphi_1 = 2\varphi_1$, und dasselbe ergibt sich für $AOP_{2m+1}' - AOP_{2m}'$.

Man erkennt also allgemein:

III) „Der Bogenweg von einem Bilde P' ungerader Ordnung zu „dem nächst folgenden gerader Ordnung ist immer $= 2\varphi_2$; dagegen „der Weg von einem Bilde gerader Ordnung zu dem nächst folgen„den ungerader Ordnung ist immer $= 2\varphi_1$."

Wird auch die Summe von je zwei nächst benachbarten Gliedern in Betracht gezogen, und beachtet man immer, dass $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha$, so erhält man ein bemerkenswertes Ergebniss bezüglich der Hälfte solcher Summe. Man findet

$$\text{a)} \quad \tfrac{1}{2}(AOP_{2m-1}' + AOP_{2m}') = (2m-1)2\alpha = AOL_{2m-1}$$

$$\text{b)} \quad \tfrac{1}{2}(AOP_{2m}' + AOP_{2m+1}') = 2m \cdot 2\alpha = AOL_{2m}.$$

Da nun nach voriger Nummer III) anzugeben ist

$$\text{a}') \quad \tfrac{1}{2}(AOP_{2m}' - AOP_{2m-1}') = \varphi_2$$

$$\text{b}') \quad \tfrac{1}{2}(AOP_{2m+1}' - AOP_{2m}') = \varphi_1$$

so ergibt sich durch Verbindung einesteils der Angaben a, a′, anderenteils der b und b′, mit Beiziehung der Linien OL:

IV) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P' liegen symmetrisch „zu der Scheidelinie OL derjenigen zwei Hilfsfächer des ersten Spie- „gels, welchen sie selbst einwohnen. Von dieser Linie nämlich „weichen die aus O gehenden Fahrstrahlen solcher Bilder entweder „beide um φ_2 oder beide um φ_1 ab, jenachdem das bezügliche Bilder- „paar entweder besteht aus einem Bilde ungerader Ordnung mit „nächst folgendem gerader, oder aus einem Bilde gerader Ordnung „mit nächst folgendem ungerader.“

Das heisst auch:

„Je zwei Bilder P_x' und P_{x+1}' liegen so gegen einander, wie „wenn P_{x+1}' ein Spiegelbild von P_x' wäre, durch einen Planspiegel „hervorgerufen, dessen Ebene mit derjenigen der Geraden OL_x und „UV zusammenfiele.“

Wenn man bei Betrachtung der vorangestellten Tafel endlich auf irgend zwei solche Glieder sieht, welche nur durch ein einziges zwischenliegendes getrennt sind, so erkennt man sofort, dass die Differenz zwischen solchen immer einfach $= 4\alpha$ sei. Danach besteht die Angabe:

V) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P' von ungerader Ord- „nung haben zwischen sich das Bogenintervall 4α; und ebenso je „zwei nächst benachbarte von gerader Ordnung.“

Ganz dieselbe Art von Erörterung, wie sie so eben für die Reihe I) des § 3. durchgeführt wurde, ergibt sich mit selbstverständlichen Abänderungen für die dortige Reihe II), welche die folgenden Angaben darbietet:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Winkel } BOP_1'' & = \varphi_2 \\
\quad BOP_2'' & = 2\alpha + \varphi_1 \\
\quad \vdots & \quad \vdots \\
\quad BOP_{2m-1}'' & = (2m-2)2\alpha + \varphi_2 \\
\quad BOP_{2m}'' & = (2m-1)2\alpha + \varphi_1 \\
\quad BOP_{2m+1} & = 2m.2\alpha + \varphi_2 \\
\quad \vdots & \quad \vdots
\end{array}
$$

Zu diesen Angaben wird man in dem Ortskreise der Bilder des Punktes P, hinter der Spurlinie OB des zweiten Spiegels der Reihe nach einführen die Radien OR_1, $OR_2 \ldots OR_n$, so zwar, dass die Winkel BOR_1 $R_1OR_2 \ldots Q_{n-1}OR_n$ jeder gleich 2α seien, während der zuletzt sich anschliessende $R_nO\mathfrak{B}$ entweder gleich 2α ist, oder eine Grösse ω unter 2α hat. Man erhält demgemäss zum zweiten Spiegel gehörige Hilfsfächer, die den ebenso vielen und ebenso grossen zum ersten Spiegel gehörigen analog sind; man erhält namentlich auch als zum zweiten Spiegel gehöriges Schlussfach das mit $R_nO\mathfrak{B}$ zu bezeichnende, welches immer denselben Winkel 2α oder ω fasst, wie das zu dem ersten Spiegel gehörige $L_nO\mathfrak{A}$. Sofort überzeugt man sich, dass für die Bilder P'' und namentlich für das Grenzbild P_v'' folgende Sätze Ia) ... Va) sich ergeben müssen, welche den vorigen I) ... V) analog sind.

Ia) „Jedes der zum zweiten Spiegel gehörigen Bilder P'' liegt „frei in demjenigen Hilfsfach dieses Spiegels, welches dieselbe Ord- „nungszahl hat wie das Bild; und der Fahrstrahl OP'' des Bildes „weicht von dem ersten Grenzradius des Faches entweder um φ_2 „oder um φ_1 ab, jenachdem die Ordnungszahl ungerade ist oder ge- „rade. Das Grenzbild findet sich freiliegend entweder in dem Schluss- „fach oder in demjenigen Hilfsfach, welches diesem zunächst vorangeht."

IIa) „Ist n die grösste ganze Zahl, welche unterhalb des Quo- „tientenwertes $180:2\alpha$ liegt, und wird immer unter P_v'' das zu dem „zweiten Spiegel gehörige Grenzbild verstanden, so sind über seine „Ordnungszahl v und seine Lage die folgenden Angaben zu machen."

1) Ist $180:2\alpha$ eine (die Eins übertreffende) ganze Zahl $n+1$, so ist jedenfalls $v = n+1$, aber man hat

a) bei ungerader n

Winkel $BOP_v'' = n.2\alpha + \varphi_1$, d. h. auch $\mathfrak{B}OP_v'' = \varphi_2$

b) bei gerader n

Winkel $BOP_v'' = n.2\alpha + \varphi_2$, d. h. auch $\mathfrak{B}OP_v'' = \varphi_1$.

2) Wenn die Division $180:2\alpha$ einen Rest ω lässt, so dass $180 = n.2\alpha + \omega$, so erhält man

a) bei ungerader n

entweder mit $\varphi_1 < \omega$ die Angaben

$$v = n+1, \quad BOP_v'' = n.2\alpha + \varphi_1, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega - \varphi_1$$

oder mit $\varphi_1 \overset{=}{>} \omega$ die Angaben

$$v = n, \quad BOP_v'' = (n-1)2\alpha + \varphi_2, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega + \varphi_1$$

b) bei gerader n

entweder mit $\varphi_2 < \omega$ die Angaben

$$v = n+1, \quad BOP_v'' = n.2\alpha + \varphi_2, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega - \varphi_2$$

oder mit $\varphi_2 \overset{=}{>} \omega$ die Angaben

$$v = n, \quad BOP_v'' = (n-1)2\alpha + \varphi_1, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega + \varphi_2.$$

III a) „Der Weg von einem Bilde P'' ungerader Ordnung zu „dem nächst folgenden gerader ist immer $= 2\varphi_1$; dagegen der Weg „von einem Bilde P'' gerader Ordnung zu dem nächst folgenden un„gerader ist immer $= 2\varphi_1$."

IV a) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P'' liegen symmetrisch „zu der Scheidelinie OB derjenigen zwei Hilfsfächer des zweiten „Spiegels, welchen sie selbst einwohnen. Von dieser Linie nämlich „weichen die aus O gehenden Fahrstrahlen solcher Bilder entweder „beide um φ_1 oder beide um φ_2 ab, jenachdem das bezügliche Bil„derpaar entweder besteht aus einem Bilde ungerader Ordnung mit „nächst folgendem gerader, oder aus einem Bilde gerader Ordnung „mit nächst folgendem ungerader."

Das heisst auch:

„Je zwei Bilder P_x'', P_{x+1}'' liegen so gegeneinander, wie wenn „P_{x+1}'' ein Spiegelbild von P_x'' wäre, durch einen Planspiegel her„vorgerufen, dessen Ebene mit derjenigen der Geraden OR_x und UV „zusammenfiele."

V a) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P'' von ungerader „Ordnung haben zwischen sich das Bogenintervall 4α; und ebenso „je zwei nächst benachbarte von gerader."

Anmerkung. Durch leichte Ueberlegung ist zu finden, wie manchfaltige Constructionen aus Sätzen des vorstehenden § zu entnehmen sind, und wie weit letztere für das Verständniss der Erscheinungen an parallelen Spiegeln sich verwerten lassen.

§ 7.

Die Sätze des vorigen § sind hinreichend, um alle Fragen über Zahl und Lage zu beantworten, welche auf die Reihe der Bilder P' für sich allein, oder auf die Reihe der P'' allein sich beziehen mögen; es wird sich aber auch darum noch handeln, diese zwei Reihen in ihrer gegenseitigen Beziehung weiter zu untersuchen. Dieser Untersuchung mag nur noch vorausgehen eine genauere Betrachtung der Linien OL und OR, von welchen leicht zu erkennen ist, dass sie nicht bloss die Bedeutung geometrischer Hilfslinien, sondern eine eigene optische Bedeutung haben.

Zuerst nämlich überzeugt man sich, dass die Linie OL_1, hinter dem ersten Spiegel liegend, ein diesem zugehöriges Bild der OB sei, und ebenso zeigt sich die OR_1, hinter dem zweiten Spiegel liegend, als ein diesem zugehöriges Bild der OA.

Von der in § 6. gegebenen Vorschrift für die Construction der n Linien OL und der ebenso vielen OR ergibt sich nun erstlich eine Reihe von Gleichungen, die auf wiederholte Abbildungen OL_1, OR_2, OL_3, OR_4 ... von OB sich beziehen:

$$\begin{aligned} \text{Winkel } BOA &= 2\alpha = AOL_1 \\ L_1OB &= 4\alpha = BOR_2 \\ R_2OA &= 6\alpha = AOL_3 \\ L_3OB &= 8\alpha = BOR_4 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

zweitens eine Reihe von Gleichungen, die auf wiederholte Abbildungen OR_1, OL_2, OR_3, OL_4 ... von OA sich beziehen

$$\begin{aligned} \text{Winkel } AOB &= 2\alpha = BOR_1 \\ R_1OA &= 4\alpha = AOL_2 \\ L_2OB &= 6\alpha = BOR_3 \\ R_3OA &= 8\alpha = AOL_4 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

Dazu gewinnt man leicht, nach der Weise des § 5. schliessend die Ueberzeugung, dass die Linien OL und die OR zusammengenommen alle diejenigen seien, in welchen überhaupt die OA und OB sich abbilden können; immer unter n die grösste natürliche Zahl verstanden, welche unterhalb des Quotientenwertes $180:2\alpha$ liegt.

Daher ist mit völliger Bestimmtheit zu behaupten:

I) „In Gestalt der Radien $OL_1 \ldots OL_n$ hat man sämmtliche „Bilder, welche der erste Spiegel (UVA) von den Linien OA und „OB geben kann, so zwar, dass eine Linie OL_x als Bild von OB „oder OA erscheint, jenachdem x ungerade oder gerade. — Ebenso „in Gestalt der Linien $OR_1 \ldots OR_n$ hat man sämmtliche Bilder, welche „der zweite Spiegel von den Linien OA, OB geben kann, so zwar, „dass eine Linie OR_x als Bild von OA oder OB erscheint, jenachdem „x ungerade oder gerade."

An diesen Satz knüpft sich mit leichter Begründung der weitere.

II) „Von den Spiegeln UVA, UVB erhält man als ihre sämmt„lichen zu dem ersten Spiegel (UVA) gehörigen Abbildungen die n „Scheinspiegel UKL_1, UKL_2, $UKL_3 \ldots$ so zwar, dass ein Schein„spiegel UVL_x immer eine Abbildung von UVB oder UVA ist, je„nachdem x ungerade oder gerade. — Und von denselben Spiegeln „UVA, UVB erhält man als ihre sämmtlichen zu dem zweiten Spiegel „(UVB) gehörigen Abbildungen die n Scheinspiegel UVR_1, UVR_2, „$UVR_3 \ldots$ so zwar, dass ein Scheinspiegel UVR_x immer eine Ab„bildung von UVA oder UVB ist, jenachdem x ungerade oder gerade".

§ 8.

„Bezüglich der Linien OL, OR ist jetzt angezeigt, auch die Lage „der einen Reihe gegen die andere in's Auge zu fassen".

Zunächst ist klar, dass die $OL_1 \ldots OL_n$ der Reihe nach zu den „$OR_1 \ldots OR_n$ symmetrisch sind mit Bezug auf Axe $MO\mathfrak{M}$.

Weitere Bestimmungen werden davon abhängig sein, wie weit die zwei letzten OL_n, OR_n vorgeschoben sind, beziehungsweise gegen $O\mathfrak{A}$, $O\mathfrak{B}$ hin. Das hängt selbst davon ab, ob die Division $180:2\alpha$ (welche jedenfalls die Zahl n liefern muss) entweder aufgehe oder einen Rest ω lasse. Bei letzterem sind die drei Möglichkeiten $\omega \gtreqless \alpha$ zu unterscheiden, sind beziehungsweise durch die Angaben $\omega = \alpha + e\alpha$, $\omega = \alpha$, $\omega = \alpha - e\alpha$ darzustellen, wo e jeden positiven

echten Bruch bedeutet. Dieses berücksichtigt, so erhält man vier charakteristisch verschiedene Angaben:

1) Ist $180 = (n+1)2\alpha$, so ist die OL_n in der Lage OB zu finden, die OR_n in $O\mathfrak{A}$. Die zwei Reihen der Linien OL und OR sind also völlig getrennt, zu verschiedenen Seiten der Axe $MO\mathfrak{M}$, während dagegen die zwei Schlussfächer $L_nO\mathfrak{A}$, $R_nO\mathfrak{B}$ vollständig zusammenfallen (jedes $= 2\alpha$).

2) Ist $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, so fallen OL_n und OR_n beide frei zwischen $O\mathfrak{A}$ und $O\mathfrak{B}$, übrigens OL_n näher an $O\mathfrak{B}$, OR_n näher an $O\mathfrak{A}$. Die zwei Reihen der Linien OL und OR sind auch nun völlig getrennt durch die Axe $MO\mathfrak{M}$, die von keiner erreicht wird. Die zwei Schlussfächer aber haben das Winkelfeld L_nOR_n $(= 2e\alpha)$ und nur dieses gemeinschaftlich.

3) Ist $180 = n.2\alpha + \alpha$, so sind OL_n, OR_n vereinigt in der Linie $O\mathfrak{M}$, in welcher also die zwei Reihen (sonst getrennt wie sie sind) zusammenstossen. Die zwei Schlussfächer haben die Linie $O\mathfrak{M}$, und nur diese, gemeinschaftlich.

4) Ist $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, so fallen immerhin OL_n und OR_n frei zwischen $O\mathfrak{A}$, $O\mathfrak{B}$, aber OL_n näher an $O\mathfrak{A}$, OR_n näher an $O\mathfrak{B}$. Jede der zwei Linienreihen OL, OR greift über die Axe $MO\mathfrak{M}$ hinüber. Die andere hinein. Die zwei Schlussfächer sind völlig getrennt durch das Winkelfeld L_nOR_n, welches $(= 2e\alpha)$ zwischen ihnen liegt.

Sofern nun aber das Grenzbild P_n' des Punktes P in das Schlussfach $L_nO\mathfrak{A}$ fallen kann, aber nicht muss, und das Grenzbild P_v'' in das Fach $L_nO\mathfrak{B}$ fallen kann, aber nicht muss: so ist gemäss Obigem auch bezüglich der Bilder P' und P'' zu denken, dass für ihre weitere Untersuchung es von Bedeutung sein müsse, überall jene vier Fälle zu beachten, in welchen der Qnotient $180:2\alpha$ sich befinden kann.

Anmerkung 1. Zu den Gleichungen, welche als charakteristisch in den obigen Fällen 2, 3, 4 auftreten, ist eine Bemerkung zu machen, welche auch weiterhin zu berücksichtigen ist, wo es sich darum handeln wird, die ganzen Zahlen n und $2n$ mit Bezugnahme auf die Quotienten $180:2\alpha$ und $360:2\alpha$ auszudrücken.

Sofern ein solcher Quotient ein unechter eigentlicher Bruch ist soll (nach sonst üblicher Weise) die grösste in ihm enthaltene ganze Zahl beziehungsweise durch $\left[\frac{180}{2\alpha}\right]$. $\left[\frac{360}{2\alpha}\right]$ dargestellt werden. Nun ist zu sagen

ad 2) Da hier $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, so ist

$$\frac{180}{2\alpha} = n + \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{2}\right), \quad \frac{360}{2\alpha} = 2n + 1 + e$$

also

$$n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad 2n + 1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right], \quad 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] - 1$$

ad 3) Da hier $180 = n.2\alpha + \alpha$, so ist

$$\frac{180}{2\alpha} = n + \tfrac{1}{2}, \quad \frac{360}{2\alpha} = 2n + 1$$

also

$$n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad 2n = \frac{360}{2\alpha} - 1.$$

ad 4) Da hier $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, so ist

$$\frac{180}{2\alpha} = n + \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{2}\right), \quad \frac{360}{2\alpha} = 2n + (1 - e)$$

also

$$n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Anmerkung 2. Die Angaben des obigen § sind natürlich auch massgebend für das volle Verständniss des Auftretens der zu den Spiegeln *UVA*, *UVB* sich gesellenden Scheinspiegel.

Mit Bezug hierauf ist dem ersten der dort unterschiedenen Fälle eine besondere Wichtigkeit zuzuschreiben.

Seine genaue Betrachtung führt auf folgenden bemerkenswerten

Lehrsatz.

Wenn zwei wirkliche Planspiegel *UVA*, *UVB* zwischen sich einen hohlen Winkel haben, der als aliquoter Teil von 180^0 sich darstellt $= \frac{180}{n+1}$, so gilt die Behauptung: in der über *UV* hinausgehenden Erweiterung des wirklichen Spiegels $\begin{Bmatrix} UVB \\ UVA \end{Bmatrix}$ sieht man einen Scheinspiegel, welcher als eine zu dem Spiegel $\begin{Bmatrix} UVA \\ UVB \end{Bmatrix}$ gehörige Abbildung $\begin{Bmatrix} \text{entweder des Spiegels } UVB \text{ oder des } UVA \\ \text{entweder des Spiegels } UVA \text{ oder des } UVB \end{Bmatrix}$ erkannt wird, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

„Man sieht leicht, dass und wie dieser Satz sich benutzen lasse

„um einen vorgeblichen Winkel von $\frac{180^0}{n+1}$ auf diese Grösse zu prü-
„fen, oder einen Winkel von dieser Grösse herzustellen".

§ 9.

„Wenn wir jetzt näher auf die gegenseitige Beziehung eingehen „wollen, welche zwischen den Bildreihen P' und P'' stattfindet, so „wird es hauptsächlich darum sich handeln, die Sätze II) und II a) „des § 6. zu verbinden".

Bei Einleitung dieses Geschäfts zeigt sich sofort, dass überall Rücksicht zu nehmen sei auf das Verhältniss der Winkel φ_1 und φ_2 zu 2α und zu dem etwa auftretenden ω. Hiedurch wird man darauf hingeleitet, dass man behufs grösserer Uebersichtlichkeit und Klarheit der Darstellung eine Teilung der Arbeit vorzunehmen habe, so zwar, dass zunächst der Fall $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ erörtert werde, dann erst die Behandlung der übrigen Fälle mit $\varphi_1 \lesseqgtr \varphi_2$ kommen solle.

Für alle Fälle mag übrigens die Bemerkung vorausgeschickt werden. Sofern die Ordnungszahlen u, v zusammengehöriger Grenzbilder P_u', P_v'' gewonnen sind, hat man freilich in Gestalt der Summe $u+v$ die Gesammtzahl aller zusammengehörigen Bilder P' und P'' Will man aber, wie hier geschehen soll, mit s die Gesammtzahl aller mit dem Auge zu unterscheidenden Bilder des P bezeichnen, so ist die Angabe $s = u+v$ nur dann zu machen, wenn keine zwei Bilder vereinigt sind. Dagegen wird $s = u+v-1$ anzugeben sein, wenn (wie es vorkommen wird) ein einziges Bild P' mit einem einzigen P'' zur Vereinigung gelangt. — Dieser Sinn der Bezeichnung s soll in der weiteren Darstellung durchaus festgehalten werden.

§ 10.

Um jetzt die Annahme $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ vollständig zu discutiren, so hat man ihr gemäss den Punkt P (nebst P_0) in der ausgezeichneten Lage M; es handelt sich also um die Abbildungen M', M'' eben des Punktes M, für welche die nach § 3 I), II) zu bildenden Winkelangaben einfach lauten

I.

Winkel $AOM_1' = \alpha$

$AOM_2'' = 3\alpha$

$AOM_3' = 5\alpha$

$\vdots \quad \vdots$

$$AOM_x' = (x-1)2\alpha + \alpha$$
$$\vdots \quad \vdots$$

II.

Winkel $OOM_1'' = \alpha$
$BOM_2'' = 3\alpha$
$BOM_3'' = 5\alpha$
$\vdots \quad \vdots$
$BOM_x'' = (x-1)2\alpha + \alpha$
$\vdots \quad \vdots$

Man bemerkt, dass die $x$te Angabe unter I), wie unter II) ihre Form nicht ändert, ob nun x ungerade ist oder gerade. Man mag auch bemerken, wie sehr hienach bei der Annahme $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ die Untersuchung des § 5. und die Lösung der in dortiger Anmerkung behandelten Aufgabe sich vereinfacht hätte.

Sowol aus vorstehenden Winkelangaben als aus dem in § 6. dargelegten entnimmt man die Richtigkeit der sofort zu machenden, mit bisheriger Bezeichnungsweise auszusprechenden Angaben.

Sofern OL_n die letzte der Linien OL ist, so erhält man als zum ersten Spiegel gehörige Bilder des M jedenfalls die n Bilder M_1', M_2' ... M_n' der Reihe nach in den Halbirungslinien der Winkel AOL_1, L_1OL_2 ... $L_{n-1}OL_n$ d. h. in Mitten der n ersten Hilfsfächer, die zu dem ersten Spiegel gehören. Ein weiteres Bild M_{n+1}' findet sich innerhalb des Winkels $L_nO\mathfrak{A}$ (im Schlussfach des ersten Spiegels) dann und nur dann, wenn dieser Winkel entweder $= 2\alpha$ oder doch $> \alpha$; denn nur in jedem dieser zwei Fälle ist Winkel $M_n'OM_{n+1}'$ in der Grösse 2α und so zu construiren, dass Radius OM_{n+1}' frei innerhalb des Winkels $L_nO\mathfrak{A}$ fällt, somit (vgl. § 4. und 5.) einen letzten brauchbaren Ort für ein Bild M_{n+1}' abgibt. — Hienach ist leicht auch zu übersehen, wie die zum zweiten Spiegel gehörigen Bilder M'' in den bezüglichen Hilfsfächern dieses Spiegels sich ergeben. Es sind ihrer ebenso viele wie der Bilder M', und je zwei gleichbezifferte Bilder M_x', M_x'' liegen symmetrisch zu der Geraden $MO\mathfrak{M}$, wonach auch die zwei Bogenwege $\mathfrak{A}M_x'$, $\mathfrak{B}M_x''$ einander gleich gefunden werden.

Will man noch Genaueres über die Bilder M', M'' ermitteln, so sind bezüglich des Quotienten $180:2\alpha$ die vier in § 8. hervorgehobenen Fälle zu unterscheiden. Diese Unterscheidung durchführend, kann man für jeden Fall zunächst gemäss den Sätzen II) und IIa) des § 6. die gemeinschaftliche Ordnungszahl u der beiden

Grenzbilder M_u', M_u'' angeben — bestimmt mit Rücksicht auf den Quotienten $180:2\alpha$ und den etwa mitspielenden Divisionsrest. Zugleich bietet sich dar der absolute Wert jedes der gegenläufigen und gleichgrossen Bogenwege $\mathfrak{A}M_u'$, $\mathfrak{B}M_u''$, und hienach ist nicht bloss die genaue Lage jedes der zwei Grenzbilder bekannt, sondern auch die Lage des jedenfalls in $\mathfrak{M}$ halbirten Bogenweges M_u', M_u'' zu finden. Denn jenachdem $\mathfrak{A}M_u' + \mathfrak{B}M_u'' \lesseqgtr 2\alpha$ sich darbietet, ist

$$\text{absolute Bogenlänge } M_u'M_u'' = \pm\{2\alpha - (\mathfrak{A}M_u' + \mathfrak{B}M_u'')\}$$

anzugeben, während die etwa zutreffende Gleichung

$$\mathfrak{A}M_u' + \mathfrak{B}M_u'' = 2\alpha$$

offenbar auf $M_u'M_u'' = 0$ führt und die Vereinigung der zwei Bilder M_u', M_u'' in $\mathfrak{M}$ anzeigt.

An die gedachten Angaben ist auch die vollkommene Anschauung der gegenseitigen Lage der zwei Bilderreihen (M') und (M'') zu knüpfen, endlich die Zahl s entweder $= 2u$ oder $= 2u - 1$ anzugeben und in passendster Form (vgl. § 8. Anmerkung) zu entwickeln.

Geht man nun die einzelnen Fälle in Kürze durch, so zeigt sich Folgendes.

Erster Fall: $180 = (n+1)2\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+2$.

Man erhält

$$\begin{aligned} u &= n+1 = 180:2\alpha \\ \mathfrak{A}M_u' &= \alpha = \mathfrak{A}\mathfrak{M}, \\ \mathfrak{B}M_u' &= \alpha = \mathfrak{B}\mathfrak{M}, \\ M_u'M_u'' &= 0. \end{aligned}$$

Die Grenzbilder M_u', M_u'' sind in $\mathfrak{M}$ vereinigt. Die zwei Bilderreihen stossen in $\mathfrak{M}$ zusammen, während sie im übrigen getrennt liegen. Somit aus

$$2u = 2n+2 = 360:2\alpha$$

folgt

$$s = 2u - 1 = (360:2\alpha) - 1.$$

Die hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ sind alle zu entnehmen aus der Reihe

$$90^0;\ 60^0;\ 45^0;\ 36^0;\ 30^0;\ 25,7\ldots{}^0;\ \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{180^0}{x+1} \text{ oder } \frac{360^0}{2x+2} \text{ mit } x = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots$$

Zweiter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360 : 2\alpha = (2n + 1) + e$.

Man erhält

$$u = n + 1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right] + 1$$
$$\mathfrak{A}M_u' = \mathfrak{B}M_u'' = e\alpha$$
$$M_u'M_u'' = 2(\alpha - e\alpha).$$

M_u' liegt zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$, M_u'' zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$.

Jede der zwei Bilderreihen greift über $\mathfrak{M}$ hinaus. Kein Bild M' ist mit einem M'' vereinigt. Also

$$s = 2u = 2n + 2 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Dritter Fall: $180 = n.2\alpha + \alpha$, oder $360 : 2\alpha = 2n + 1$.

Man erhält

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]$$
$$\mathfrak{A}M_u' = \mathfrak{B}M_u'' = 2\alpha$$
$$M_u'M_u'' = 2\alpha.$$

M_u' liegt in $\mathfrak{B}$, M_u'' in $\mathfrak{A}$. Jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{M}$ auf. Kein Bild M' mit einem M'' vereinigt.

$$s = 2u = 2n = (360 : 2\alpha) - 1.$$

Die hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ sind alle zu entnehmen aus der Reihe

$$120^0;\ 72^0;\ 51, 42 \ldots {}^0;\ 40^0 \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{360^0}{2x+1} \quad \text{mit} \quad x = 1,\ 2,\ 3 \ldots$$

Vierter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$ oder $360 : 2\alpha = 2n + (1 - e)$.

Man erhält

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]$$
$$\mathfrak{A}M_u' = \mathfrak{B}M_u'' = 2\alpha - e\alpha$$
$$M_u'M_u'' = 2(\alpha - e\alpha).$$

M_u' liegt zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$, M_u'' zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$. Jede der

zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{M}$ auf. Kein Bild M' mit einem M'' vereinigt.

$$\nu = 2u = 2a = \left[\frac{360}{2\alpha}\right]$$

Angesichts obiger Angaben mag nur Folgendes noch besonders hervorgehoben werden.

I) „In jedem Fall werden die Grenzbilder M_u', M_u'' beide im „todten Raum gefunden. Die Grenzlinien $O\mathfrak{A}$, $O\mathfrak{B}$ desselben er-„reichen sie dann und nur dann, wenn $180:2\alpha$ den Rest α lässt, „d. h. $360:2\alpha$ eine ganze ungerade Zahl ist; hiebei je das zu dem „einen Spiegel gehörige Grenzbild in der Ebene des andern Spiegels „(in seiner Spurlinie) erscheinend".

II) Die Vereinigung zweier Bilder M', M'' kommt dann und „nur dann zu Stande, wenn $180:2\alpha$ eine ganze Zahl, d. h. $360:2\alpha$ „eine gerade Zahl ist; da sind die Grenzbilder M_u', M_u'' in $\mathfrak{M}$ ver-„einigt. Die grösste Oeffnung des Winkelspiegels, durch die solche „Vereinigung herbeigeführt wird, ist die von 90^0".

Anmerkung. Die zu den Fällen 1 und 3 erhaltenen Reihen der Werte von 2α sind zu verbinden zu der Reihe

$$120^0;\ 90^0;\ 72^0;\ 60^0;\ 51,42^0\ \ldots;\ 40^0;\ \ldots\ \frac{360^0}{2x+1};\ \frac{360^0}{2x+2}\ \cdots$$

Um an sie die den Fällen 2, 4 entsprechenden Werte zu knüpfen, hätte man vor ihren Anfang alle zwischen 180^0 und 120^0 liegenden Werte zu stellen, sodann aber zwischen je zwei weiteren nächstbenachbarten Gliedern alle möglichen Zwischenwerte einzuschalten.

§ 11.

„Jetzt wollen wir der Aufgabe näher treten, die Sätze II) und „IIa) des § 6. in dem Sinne zu verbinden, dass vollkommene Klar-„heit über alle diejenigen Fälle verbreitet werde, wo die Winkel φ_1 „und φ_2 ungleich sind"; hiebei die feste Bestimmung treffend, dass der kleinere von beiden der mit φ_1 bezeichnete (POA) sei.

Für die Ausführung gedachter Verbindung ist es nun wesentlich, nicht nur die in § 6. betonte Unterscheidung der geraden und der ungeraden n fest zu halten, sondern auch für den Rest ω, wo er vorkommt, die drei Möglichkeiten $\omega = \alpha + e\alpha$, $\omega = \alpha$, $\omega = \alpha - e\alpha$ in derselben Weise zu berücksichtigen, wie schon im § 8., dann in § 10. mit grösstem Nutzen geschehen ist. — Ist nämlich $\omega = \alpha + e\alpha$,

so weisen die Sätze II) des § 6. darauf hin, dass man für $\varphi_2 (> \alpha)$ unterscheide, ob entweder $\varphi_2 < \alpha + e\alpha$, oder $\varphi_2 \overset{=}{>} \alpha + e\alpha$, woran die entsprechenden Angaben für φ_1 (gemäss der Gleichung $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha$) sich knüpfen.

Ist aber $\omega = \alpha - e\alpha$, so verlangen jene Sätze vielmehr, dass bei $\varphi_1 (< \alpha)$ unterschieden werde, ob entweder $\varphi_1 < \alpha - e\alpha$ oder $\varphi_1 \overset{=}{>} \alpha - e\alpha$; woran die entsprechenden Angaben über φ_2 zu knüpfen sind. Wird Solches beachtet, so überzeugt man sich, dass es zwölf charakteristisch verschiedene Fälle sind, die wir noch zu erörtern haben; und dieselben sind gemäss dem Gesagten mit ihren Charakterisirungen aufzuführen wie folgt:

1) $180 = (n+1)\,2\alpha$, n ungerade
2) $180 = (n+1)\,2\alpha$, n gerade
3) $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, n ungerade, $\varphi_2 < \alpha + e\alpha$
4) $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, n ungerade, $\varphi_2 \overset{=}{>} \alpha + e\alpha$
5) $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, n gerade, $\varphi_2 < \alpha + e\alpha$
6) $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, n gerade, $\varphi_2 \overset{=}{>} \alpha + e\alpha$
7) $180 = n.2\alpha + \alpha$, n ungerade
8) $180 = n.2\alpha + \alpha$, n gerade
9) $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, n ungerade, $\varphi_1 \overset{=}{>} \alpha - e\alpha$
10) $180 = n \cdot 2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, n ungerade, $\varphi_1 < \alpha - e\alpha$
11) $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, n gerade, $\varphi_1 \overset{=}{>} \alpha - e\alpha$
12) $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, n gerade, $\varphi_1 < \alpha - e\alpha$.

Für jeden dieser Fälle ist die Bestimmung der Zahlen u und v aus den entsprechenden Angaben der Sätze II) und IIa) des § 6. sofort zu entnehmen; so auch die der absoluten Werte der (gegenläufigen) Bogenwege $\mathfrak{A}P_u'$ $\mathfrak{B}P_v''$. — Der für $\mathfrak{A}P_u'$ sich darbietende Wert wird für den Punkt P_u' sogleich die Entscheidung darüber geben, ob derselbe frei innerhalb des todten Raumes (W. $\mathfrak{A}O\mathfrak{B}$), oder auf der Grenze $(O\mathfrak{B})$ desselben, oder frei ausserhalb liege, da diesen drei Lagen beziehungsweise die Angaben $\mathfrak{A}P_u' \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 2\alpha$ entsprechen; und ebenso dient die Wertangabe von $\mathfrak{B}P_v''$ mit Bezug auf den Punkt P_v''. — Aus den Werten beider Bogenwege muss dann immer

sowol die Länge des Bogens $P_u'P_v''$, als die (wie sich zeigen wird) so sehr bemerkenswerte Lage seines Halbirungspunktes zu ermitteln sein. Letztere Aufgabe hat natürlich keine so einfache Lösung, wie sie im § 10. unter den dortigen einfacheren Umständen sich darbot; erstere kann immerhin nach der dortigen Methode auch behandelt werden. — Für gegenwärtigen § mag als allgemeine Methode der Auflösung beider Aufgaben zumal empfohlen werden die folgende. Man benutzt die absoluten Werte der gegenläufigen Bogenwege $\mathfrak{A}P_u'$, $\mathfrak{B}P_v''$, um aus ihnen für die beiden Punkte P_u', P_v'' sowol die absolute Differenz als die Summe von zwei gleichläufigen Bogenwegen herzuleiten, durch welche sie von einem und demselben der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus erreicht werden. Jene Differenz ist eben die Bogenlänge $P_u'P_v''$ selbst; die gedachte Summe oder vielmehr ihre Hälfte lässt sofort die Lage des fraglichen Halbirungspunktes erkennen. — Uebrigens gestatten verschiedene der jetzt zu behandelnden zwölf Fälle, je nach ihrer Eigentümlichkeit eine einfachere Erledigung der gedachten Aufgaben; wie man sich sogleich überzeugen wird.

Erster Fall: $180 = (n+1)2\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+2$, mit ungerader n.

Man findet

$$u = n+1 = 180:2\alpha, \quad \mathfrak{A}P_u' = \varphi_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{P}$$
$$v = n+1, \quad \mathfrak{B}P_v'' = \varphi_2 = \mathfrak{B}\mathfrak{P};$$

d. h. P_u', P_v'' vereinigt in $\mathfrak{P}$.

$$u+v = 2n+2$$
$$s = u+v-1 = (360:2\alpha)-1.$$

Alle hieher gehörigen Werte von 2α sind zu entnehmen aus der Reihe

$$90^0;\ 45^0;\ 30^0;\ 22,5^0\ \ldots$$

deren allgemeines Glied ist $180^0:(x+1)$ mit $x = 1, 3, 5 \ldots$

Zweiter Fall: $180 = (n+1)2\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+2$, mit gerader n.

Man findet

$$u = n+1 = 180:2\alpha, \quad \mathfrak{A}P_u' = \varphi_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{P}_0$$
$$v = n+1, \quad \mathfrak{B}P_v'' = \varphi_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{P}_0;$$

d. h. P_u', P_v'' vereinigt in $\mathfrak{P}_0$.

$$u+v = 2n+2$$
$$s = u+v-1 = (360:2\alpha)-1.$$

Alle hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ zu entnehmen aus der Reihe

$$60^0;\ 36^0;\ 25,71^0 \ldots;\ 20^0 \ldots$$

deren allgemeines Glied ist $180^0:(x+1)$ mit $x = 2, 4, 6 \ldots$

Dritter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n+1+e$, mit ungerader n;

$$\varphi_2 < \alpha + e\alpha, \quad \varphi_1 > \alpha - e\alpha.$$

Man findet

$$u = n+1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]+1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha - \varphi_2 < 2\alpha$$

$$v = n+1, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha;$$

d. h. P_u', P_v'', beide frei innerhalb des todten Raumes.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_2$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_u' + \mathfrak{B}P_v'' = 2\varphi_2 = 2\mathfrak{B}\mathfrak{P}$$

$$\mathfrak{B}P_u' - \mathfrak{B}P_v'' = 2\alpha - 2e\alpha;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{P}$, seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha)$.

Aus $\mathfrak{B}P_u' > \mathfrak{B}P_v''$ sieht man, dass jede der zwei Bilderreihen über $\mathfrak{P}$ hinausgreift in die andere hinein. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n + 2 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Vierter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n+1+e$, mit ungerader n;

$$\varphi_2 \overset{=}{>} \alpha + e\alpha, \quad \varphi_1 \overset{=}{<} \alpha - e\alpha.$$

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha + \varphi_2 > 2\alpha$$

$$v = n+1, \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{P}_v'' = \alpha + e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha;$$

d. h. P_u' frei ausserhalb des todten Raumes; P_v'' frei innerhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_u' + \mathfrak{A}P_v'' = 4\alpha = 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{A}P_u' - \mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha + 2e\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{B}$, seine Länge $= 2(\alpha + e\alpha - \varphi_1)$.

Jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes 𝔅 auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u+v = 2n+1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Fünfter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n+1+e$ mit gerader n;

$$\varphi_2 < \alpha + e\alpha, \quad \varphi_1 > \alpha - e\alpha.$$

Man findet

$$u = n+1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]+1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha$$

$$v = n+1 \qquad \mathfrak{B}P_v' = \alpha + e\alpha - \varphi_2 < 2\alpha$$

d. h. P_u', P_v'', beide frei innerhalb des todten Raumes.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_2$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_v'' + \mathfrak{A}P_u' = 2\varphi_2 = 2\mathfrak{A}\mathfrak{P}_0$$

$$\mathfrak{A}P_v'' - \mathfrak{A}P_u' = 2\alpha - 2e\alpha;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{P}_0$, seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha)$.

Aus $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_v'' > \mathfrak{A}P_u'$ folgt: jede der 2 Bilderreihen greift über $\mathfrak{P}_0$ hinaus. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u+v = 2n+2 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right]+1.$$

Sechster Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360:2\alpha = (2n+1)+e$, n gerade;

$$\varphi_2 \overset{=}{>} \alpha + e\alpha, \quad \varphi_1 \overset{=}{<} \alpha - e\alpha.$$

Man findet

$$u = n+1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]+1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha$$

$$v = n, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + e\alpha + \varphi_2 > 2\alpha;$$

d. h. P_u' frei innerhalb des todten Raumes; P_v'' frei ausserhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v'' + \mathfrak{B}P_u' = 4\alpha = 2\mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{B}P_v'' - \mathfrak{B}P_u' = 2\alpha + 2e\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in 𝔄, seine Länge $= 2(\alpha + e\alpha - \varphi_1)$.

Jede der 2 Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes 𝔄 auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n + 1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Siebenter Fall: $180 = n . 2\alpha + \alpha$, oder $360 : 2\alpha = 2n + 1$, n ungerade.

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + \varphi_2 > 2\alpha$$
$$v = n + 1, \quad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - \varphi_1 < 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei ausserhalb des todten Raumes; P_v'' frei **innerhalb**.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_u' + \mathfrak{A}P_v'' = 4\alpha = 2 . \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{A}P_u' - \mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - 2\varphi_1,$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{B}$, seine Länge $= 2(\alpha - \varphi_1)$.

Jede der 2 Bilderreihen hört vor Erreichung des **Punktes $\mathfrak{B}$ auf.** Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2u + 1 = 360 : 2\alpha.$$

Alle hieher gehörigen Werte von 2α zu entnehmen **aus der Reihe**

$$120^0; \quad 51, 42^0 \ldots; \quad 32, 72^0 \ldots; \quad 24^0 \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{360^0}{2x+1} \quad \text{mit} \quad x = 1, \; 3, \; 5 \ldots$$

Achter Fall: $180 = 2\alpha + \alpha$, oder $360 : 2\alpha = 2n + 1$, n **gerade**

Man findet

$$u = n + 1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right] + 1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - \varphi_1 < 2\alpha$$
$$v = n, \quad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + \varphi_2 > 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei innerhalb des todten Raumns; P_v'' frei **ausserhalb.**

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v'' + \mathfrak{B}P_u' = 4\alpha = 2\mathfrak{B}\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{B}P_v'' - \mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{A}$; seine Länge $= 2(\alpha - \varphi_1)$.

Jede der Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{A}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

Alle hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ zu entnehmen aus der Reihe

$$72^0:\ 40^0;\ 27,6^0 \ldots;\ 21,17^0 \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{360^0}{2x+1} \quad \text{mit} \quad x = 2,\ 4,\ 6 \ldots$$

Neunter Fall: $180 = n \,.\, 2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360 : 2\alpha = 2n + (1-e)$, n ungerade;

$$\varphi_1 \overset{=}{>} \alpha - e\alpha, \quad \varphi_2 \overset{=}{<} \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 \overset{=}{<} 2\alpha$$
$$v = n, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_1 < 2\alpha,$$

d. h. P_v'' frei innerhalb des todttn Raumes, P_u' entweder frei innerhalb oder an Grenze $O\mathfrak{B}$.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + e\alpha - \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_u' + \mathfrak{A}P_v'' = 2\varphi_2 = 2\mathfrak{A}\mathfrak{P}_0$$
$$\mathfrak{A}P_u' - \mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - 2e\alpha;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirf in $\mathfrak{P}_0$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha)$.

Aus $\mathfrak{A}P_u' > \mathfrak{A}P_v''$ folgt; jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung von $\mathfrak{P}_0$ auf. Kein Bild P' mit P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Zehnter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360 : 2\alpha = 2n + (1-e)$, n ungerade;

$$\varphi_1 < \alpha - e\alpha, \quad \varphi_2 > \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 > 2\alpha$$
$$v = n + 1, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei ausserhülb des todten Raumes; P_v'' frei innerhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + e\alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_u' + \mathfrak{A}P_v'' = 4\alpha = 2\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A}P_u' - \mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - 2e\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{B}$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha - \varphi_1)$.

Jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{B}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n + 1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Elfter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n + (1 - e)$, n gerade;

$$\varphi_1 \geqq \alpha - e\alpha, \quad \varphi_2 \leqq \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_1 < 2\alpha$$

$$v = n, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 \leqq 2\alpha.$$

d. h. P_u' frei innerhalb des todten Raumes. P_v'' frei innerhalb oder an der Grenze $O\mathfrak{A}$.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha - \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v'' + \mathfrak{B}P_u' = 2\varphi_2 = 2\mathfrak{B}\mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{B}P_v'' - \mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - 2e\alpha,$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{P}$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha)$.

Aus $\mathfrak{B}P_v'' > \mathfrak{B}P_v'$ folgt: jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{P}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Zwölfter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n + (1 - e)$, n gerade;

$$\varphi_1 < \alpha - e\alpha. \quad \varphi_2 > \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n + 1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right] + 1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha$$
$$v = n, \quad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 > 2\alpha;$$

d. h. P_u' frei innerhalb, P_v'' frei ausserhalb des todten Raumes.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v'' + \mathfrak{B}P_u' = 4\alpha = 2\mathfrak{B}\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{B}P_v'' - \mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - 2e\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{A}$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha - \varphi_1)$.

Jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des $\mathfrak{A}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n + 1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Anmerkung. Die zu den Fällnn 1, 2, 7, 8 gegebenen Reihen der Werte von $2\alpha^0$ sind zu einer einzigen zu verbindeu. Alle übrigen Werte, welche den übrigen acht Fällen entsprechen, wird man leicht gemäss den Charakterisirungen dieser Fälle bestimmen, und man kann sie an die vorhin gedachte Reihe teils durch Voranstellung teils durch Einschaltung anknüpfen.

§ 12.

Die Untersuchung im vorigen § ist zwar unter der bestimmten Voraussetzung durchgeführt worden, dass von den Winkeln φ_1, φ_2 der erstgenannte der kleinere sei. Indes ist aus jener ieicht zu erkennen die Richtigkeit der alsbald auszusprechenden allgemeinen Sätze, welche für $\varphi_1 \lessgtr \varphi_2$ gemeint sind.

Bei diesen ist nur immer streng festzuhalten: n die grösste ganze Zahl unterhalb des Quotientenwertes $180:2\alpha$ (der selbst >1 sein muss), $2n$ die grösste gerade Zahl unterhalb des Quotientenwertes $360:2\alpha$ (der selbst >2 sein muss). Und im übrigen sind die bisher gebrauchten Bezeichnungen in dem bisherigen Sinne festzuhalten.

Die bezüglichen allgemeinen Sätze (für $\varphi_1 \lessgtr \varphi_2$) lauten:

I) „Was die Ordnungszahlen der Grenzbilder P_u', P_v'' betrifft, „so ist entweder jede gleich $n+1$, oder jede gleich n, oder die eine „gleich $n+1$, die andere gleich n.“ Und zwar

1) Die Angabe $u = v = n + 1$ gilt sowol in jedem der Fälle, wo $180 : 2\alpha$ eine ganze Zahl ist, als in jedem solchen, wo die Division $180 : 2\alpha$ einen Rest $(\alpha + e\alpha)$ lässt, der sogar den grösseren der Winkel φ_1, φ_2 übertrifft. (§ 11.; 1, 2, 3, 5).

2) Die Angabe $u = v = n$ gilt in jedem derjenigen Fälle, wo die Division $180 : 2\alpha$ einen Rest $(\alpha - e\alpha)$ lässt, welcher höchstens den kleineren der Winkel φ_1, φ_2 erreicht. (§ 11,; 9, 11).

3) Die Angabe $u \gtrless v$ (mit $u + v = 2n + 1$) gilt in jedem der übrigen Fälle, wo nämlich die Division $180 : 2\alpha$ einen Rest lässt, welcher sich befindet auf dem Wege von dem grösserem (mit einbegriffenen) der beiden Winkel φ bis vor den kleineren.

Immer aber, wenn die Ordnungszahlen der Grenzbilder ungleich sind, ist die kleinere an den bei P näheren, oder an den von P entfernteren Spiegel geknüpft, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

II) „Was die Lage der Grenzbilder P_u', P_v'' gegen den todten „Raum betrifft, so bestehen folgende Angaben."

1) Ist $u = v = n + 1$', so liegt jedes der zwei Grenzbilder frei innerhalb des todten Raumes. (§ 11.; 1, 2, 3, 5).

2) Ist $u = v = n$, und zwar dadurch herbeigeführt, dass der kleinere der beiden Winkel φ grösser ist als der zu $180 : 2\alpha$ gehörige Divisionsrest, so liegt ebenfalls jedes der zwei Grenzbilder frei innerhalb des todten Raumes. (§ 11.; 9, 12).

3) Ist $u = v = n$, aber dadurch herbeigeführt, dass der kleinere der beiden Winkel φ gleich oben gedachtem Divisionsreste ist, so liegt das eine der Grenzbilder frei innerhalb des todten Raumes, das andere in einer der Linien $AO\mathfrak{A}$, $BO\mathfrak{A}$, und zwar in der bei P näheren, oder in der von P entfernteren, jenachdem n gerade oder ungerade.

4) Ist $u \gtrless v$, so ist immer das eine Grenzbild frei innerhalb des todten Raumes, das andere frei ausserhalb; und letzteres ist immer dasjenige mit der kleineren Ordnungszahl.

III) „Das Bogenstück $P_u'P_v''$ hat zum Halbirungspunkt immer „einen der vier Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; hiebei die Vorstellung des „Halbirtseins auch dann festzuhalten, wenn die Punkte P_u', P_v'' ver„einigt liegen; „welches letztere dann und nur dann (§ 11.; 1, 2) „zutrifft, wenn die Division $180 : 2\alpha$ aufgeht. Genauer ist zu sagen"

1) In jedem der Fälle $u = v$ ist es einer der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$, welcher die gedachte Rolle spielt. Und zwar, wenn $u = v = n+1$, so fällt diese Rolle dem $\mathfrak{P}$ oder dem $\mathfrak{P}_0$ zu, jenachdem n ungerade oder gerade ist; wenn aber $u = v = n$, so fällt sie dem $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}_0$ zu, jenachdem n gerade oder ungerade. (§ 11.; 1, 2, 3, 5, 9, 11).

2) In jedem der Fälle $u \gtrless v$ ist es einer der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, welcher den Bogen $P_u'P_v''$ halbirt. Und zwar spielt $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ die gedachte Rolle, jenachdem u oder v die grössere der zwei Zahlen ist.

IV) „Was die gegenseitige Lage der Bilderreihen (P'), (P'') „betrifft, so ergeben sich die Behauptungen:“

1) Die zwei Reihen stossen in einem der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ zusammen, wenn $u = v = n+1$ stattfindet mit $180:2\alpha = n+1$; und zwar erfolgt das Zusammenstossen in $\mathfrak{P}$ oder in $\mathfrak{P}_0$, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

2) Die zwei Reihen greifen in einander ein, wenn $u = v = n+1$ stattfindet, ohne dass $180:2\alpha = n+1$; und zwar greifen beide gleich weit über $\mathfrak{P}$ oder über $\mathfrak{P}_0$ hinaus, jenachdem n ungerade oder gerade.

3) Beide Reihen hören von einem und demselben der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$, unter gleichem Abstand von ihm auf, wenn $u = v = n$; und zwar spielt $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}_0$ die bezügliche Rolle, jenachdem n gerade oder ungerade.

4) Beide Reihen hören vor einem und demselben der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, unter gleichem Abstand von ihm auf, wenn u und v ungleich sind; und zwar spielt $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ die bezügliche Rolle, jenachdem u oder v die grösse Zahl ist.

V) „Was die Bogenlänge $P_u'P_v''$ betrifft, so ist sie von den „Grössen φ_1, φ_2 ganz unabhängig in allen denjenigen Fällen, wo einer „der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ es ist, der den Bogen $P_u'P_v''$ halbirt.“ In jedem derartigen Falle ist $P_u'P_v''$ entweder $= 0$ oder $= 2(\alpha - e\alpha)$; der Wert Null nur vorkommend, wenn $180:2\alpha$ eine ganze Zahl.

„Dagegen ist die Bogenlänge $P_u'P_v''$ von φ_1 oder φ_2 abhängig „in allen denjenigen Fällen', wo einer der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ es ist, der „den Bogen $P_u'P_v''$ halbirt.“ In jedem solchen Falle ist $P_u'P_v''$ entweder $= \alpha - \varphi$, oder $= \alpha + e\alpha - \varphi$, oder $= \alpha - e\alpha - \varphi$; unter φ den kleineren der ber beiden Winkel φ_1, φ_2 verstanden.

Dass durch den Uebergang von einem der zwölf Fälle des § 11. eine schroffe Aenderung der Erscheinungen bewirkt werde, ist aus

jenem § unmittelbar zu ersehen, und es bedarf dass keiner weiteren Ausführung. Durch vorstehende Angaben ist man aber darauf hingewiesen, gewisse Aenderungen und mit ihnen verbundene Beharrungen hervorzuheben, welche innerhalb jedes einzelnen jener zwölf Fälle sich zeigen, während doch die Bedingungen seines Zutreffens streng festgehalten werden. Gemäss vorigen Angaben III) ... V) ist zu behaupten:

VI) „Wenn bei gegebener Oeffnung des Winkelspiegels und ge„gebener nicht medianer Lage von P $\left\{\begin{matrix}\text{gleiche}\\ \text{ungleiche}\end{matrix}\right\}$ Ordnungszahlen „für die zwei Grenzbilder vorhanden sind, so ist innerhalb eines „zwischen (immer nach § 11. zu bestimmenden) Spielraums der Punkt „P so zu bewegen, dass zwar die Grenzbilder ihre Lage ändern, und „für den sie verbindenden Bogen $\left\{\begin{matrix}\text{die Lage seines Halbirungpunktes}\\ \text{seine Länge}\end{matrix}\right\}$ „sich stetig ändert, dagegen unverandert bleiben jene beiden Ord„nungszahlen und $\left\{\begin{matrix}\text{die Länge}\\ \text{die Lage des Halbirungspunktes}\end{matrix}\right\}$ jenes Bogens."

§ 13.

Wenn man die Fälle mit $\varphi_1 = \varphi_2$ denjenigen gegenüberstellt, wo $\varphi_1 \lessgtr \varphi_2$, so ist aus den §§ 10. ... 12. ersichtlich, dass jeder Fall der einen Art sehr wesentliche Eigentümlichkeiten hervorkehrt gegenüber jedem Falle der andern. Nur diejenigen Fälle der zweiten Art, wo die Ordnungszahlen u und v der beiden Grenzbilder einander gleich werden, zeigen eine merkliche Verwandtschaft mit solchen der ersten Art; was eben damit zusammenhängt, dass jeder der Fälle mit $\varphi_1 = \varphi_2$ als ein solcher anzusehen ist, wo die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{M}$ sich vereinigt haben, wie ja P und P_0 in M es getan.

Mit Rücksicht auf die Grösse der angedeutenden Unterschiede und bei dem übersichtlichen Charakter, welchen welchen man den Darstellungen der §§ 10. und 11. zu geben suchte, wird man darauf verzichten wollen, dass weiterhin Vergieichungen und Zusammenfassungen der beiderseitigen Resultate ausgeführt werden.

Nur mit Bezug auf die Zahl s, auf deren Ermittlung gewöhnlich das grässte Gewicht gelegt wird, mag das geschehen; es mag also noch ausgesprochen werden folgende

**Generalangabe
über die Gesammtzahl s der dem Auge unterscheidbaren
Bilder von P.**

„Wenn P irgendwie frei zwischen den beiden Spiegeln des Win-
„kelspiegels liegt, so dass jede der drei Möglichkeiten $\varphi_1 \lesseqgtr \varphi_2$ zu-
„gelassen ist, so hat man bezüglich der Zahl s zu behaupten:

1) Ist $180:2\alpha$ eine ganze Zahl {d. h. auch $360:2\alpha$ von der Form $2n+2$}, so ist $s = (360:2\alpha) - 1$.

Die hier gemachte Voraussetzung, und nur diese ist es, bei welcher zwei Bilder des P, nämlich die Grenzbilder, sich vereinigen.

2) Lässt die Division $180:2\alpha$ einen Rest $\alpha + e\alpha$ {d. h. ist $360:2\alpha$ von der Form $(2n+1)+e$}, so ist s entweder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]+1$ oder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]$. Ersteres trifft zu dann und nur dann, wenn jeder der Winkel φ_1, φ_2 kleiner ist als jener Rest; es trifft also namentlich auch zu, wenn $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$.

3) Lässt die Division $180:2\alpha$ den Rest α {d. h. ist $360:2\alpha = 2n+1$}, so ist s entweder $= 360:2\alpha$ oder $= (360:2\alpha) - 1$. Letzteres trifft zu dann und nur dann, wenn $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$.

4) Lässt die Division $180:2\alpha$ einen Rest $\alpha - e\alpha$ {d. h. ist $360:2\alpha$ von der Form $2n+(1-e)$}, so ist entweder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]+1$ oder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]$. Letzteres trifft immer zu bei vorhandener Gleichheit der Winkel φ_1 und φ_2: bei vorhandener Ungleichheit aber dann und nur dann, wenn selbst der kleinere mindestens jenem Reste gleich ist.

Man bemerke wol, dass vorstehende Angaben über s ganz unabhängig davon sind, ob die Hilfszahl n eine ungerade oder eine gerade ist.

§ 14.

Die Rolle, welche der Punkt $\mathfrak{M}$ in den Sätzen des § 10. spielt, ist ganz unmittelbar an den Umstand anzuknüpfen, dass die dortige Voraussetzung $\varphi_1 = \varphi_2$ eine durchgängige Symmetrie der Erscheinungen bewirken muss.

„Sofern aber in den Sätzen der §§ 11. und 12. auch die Punkte „𝔓, $\mathfrak{P}_0$, ja sogar die Punkte 𝔄, 𝔅 eine bis zu gewissem Grad ähn-„liche Rolle spielen wie 𝔐, so ist angezeigt, darüber noch weiteren „Aufschluss zu suchen". Solcher ist in der Tat aus den Sätzen V) und V a) des § 9. zu gewinnen, denn durch diese wird man auf Linien aufmerksam gemacht, deren jede als Symmetralaxe für gewisse Bilder P' und entsprechende P'' erscheinen muss. Sie ergeben sich wie folgt:

1) Die Gerade OP halbirt immer den Winkel $P_2'OP_2''$; denn es ist (vgl. § 3.)

einesteils Winkel $POP_2' = POA + AOP_2' = \varphi_1 + (2\alpha + \varphi_2) = 4\alpha$,
anderntcils Wkl. $POP_2'' = POB + BOP'' = \varphi_2 + (2\alpha + \varphi_1) = 4\alpha$.

Sofort gemäss § 10., V) und V a) erkennt man, dass die Bilder P_2', P_4', P_6' ... der Reihe nach mit P_2'', P_4'', P_6'' ... symmetrisch liegen bezüglich der Axe $PO\mathfrak{P}$.

Demgemäss, wenn die Ordnungszahlen u, v der Grenzbilder P_u', P'' gleich grosse g e r a d e Zahlen sind, muss für den Bogen P_uP_v'' sein Halbirungspunkt in 𝔐 sich ergeben, und auch die Unabhängigkeit seiner Länge von φ_1 und φ_2 ist zu begreifen.

2) Die Gerade OP_0 halbirt immer den Winkel $P_1'OP_1''$; denn es ist

einesteils Wkl. $P_0OP_1' = P_0OA + AOP_1' = \varphi_2 + \varphi_1 = 2\alpha$,
anderntcils Wkl. $P_0OP_1'' = P_0OB + BOP_1'' = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha$.

Sofort erkennt man, dass die Bilder P_1', P_3', P_5' ... der Reihe nach mit P_1'', P_3'', P_5'' ... symmetrisch liegen bezüglich der Axe $P_0O\mathfrak{P}_0$.

Demgemäss, wenn u, v gleich grosse u n g e r a d e Zahlen sind, muss für den Bogen $P_u'P_v''$ sein Halbirungspunkt in $\mathfrak{P}_0$ sich ergeben, und auch die Unabhängigkeit seiner Länge von φ_1 und φ_2 ist zu begreifen.

3) Die Gerade OA halbirt immer den Winkel $P_2'OP_1''$; denn es ist

einesteils Wkl. $AOP_2' = 2\alpha + \varphi_2$,
anderntcils Wkl. $AOP_1'' = AOB + BOP_1'' = 2\alpha + \varphi_2$.

Sofort erkennt man, dass die Bilder P_2', P_4', P_6' ... der Reihe nach mit den Bildern P_1'', P_3'', P_5'' ... symmetrisch liegen bezüglich der Axe $AO\mathfrak{A}$.

Demgemäss, wenn u gerade ist und um Eins grösser als v, ist ersichtlich, dass der Bogen $P_u'P_v''$ seinen Halbirungspunkt in 𝔄 haben muss; und auch die Abhängigkeit seiner Länge von φ_2 wird begreiflich.

4) Die Gerade OA halbirt immer auch den Winkel $P_3'OP_2''$; denn es ist

einesteils Wkl. $AOP_3' = 4\alpha + \varphi_1$
andernteils Wkl. $AOP_2'' = AOB + BOP_2'' = 2\alpha + (2\alpha + \varphi_1)$.

Sofort erkennt man, dass die Bilder P_3', P_5', P_7' … der Reihe nach mit P_2'', P_4'', P_6'' … symmetrisch liegen bezüglich der Axe AO𝔄.

Wenn also u ungerade ist und um Eins grösser als v, muss der Bogen $P_u'P_v''$ seinen Halbirungspunkt in 𝔄 haben; und auch die Abhängigkeit seiner Länge von φ_1 ist begreiflich.

Bezüglich der Geraden OB findet man ebenso gerechtfertigt die Angaben:

5) Die OB halbirt immer den Winkel $P_1'OP_2''$ und ist dessen Hälfte gleich $2\alpha + \varphi_1$. Hienach die Bilder P_1', P_3', P_5' … sind der Reihe nach zu P_2'', P_4'', P_6'' … symmetrisch bezüglich der Axe BO𝔅. Ist also u ungerade und um Eins kleiner als v, so muss der Bogen $P_u'P_v''$ in 𝔅 halbirt sein; und die Abhängigkeit seiner Länge von φ_1 ist ersichtlich.

6) Die OB halbirt auch den Winkel $P_2'OP_3''$, und ist dessen Hälfte gleich $4\alpha + \varphi_2$. Hienach die Bilder P_2', P_4', E_6' … sind der Reihe nach symmetrisch mit P_3'', P_5'', P_7'' … bezüglich der Axe BO𝔅. Ist also u gerade und ums Eins kleiner als v, so muss der Bogen $P_u'P_v''$ in 𝔅 halbirt sein, und auch die Abhängigkeit seiner Länge von φ_2 ist begreiflich.

Von vorstehenden Angaben fällt immerhin ein neues und wesentliches Licht auf sehr wichtige Bestandteile der in den §§ 11. und 12. gewonnenen Sätze; ja diese könnten sogar vollständig von jenem hergeleitet werden. Doch dürfte die hiemit angedeutete Herleitung in wesentlichen Stücken der im § 11. durchgeführten Methode nachstehen, welche dort jedenfalls als die nächst liegende und ihres Erfolges vollkommen sichere sich empfehlen müsste.

§ 15.

„Wenn die Oeffnung $2\alpha^0$ des Winkelspiegels fest gegeben ist, „und man lässt den Punkt P in einer zu der Axe UV senkrechten „Ebene AOB stetig sich bewegen", so zwar, dass seine Entfernung OP von der Axe sich nicht ändert, und dass er von einer Lage aus dicht bei der Spur OA des ersten Spiegels bis dicht vor der Spur OB hingeht; so ist aus den hier vorgetragenen Lehren immer der Gang der zugehörigen Bilder P', P'' anschaulich zu entnehmen, insbesondere das die Grenzbilder P_x', P_v'' Angehende, ihre Zahl und Lage Betreffende genau zu verstehen.

Das ist, wie man sofort erkennt, höchst einfach in den Fällen, wo $360:2\alpha$ die Form $2n+2$ mit ungerader oder mit gerader n hat, weniger einfach in den übrigen, von welchen wenigstens ein besonders vorsichtig zu behandelnder durch ein Beispiel erläutert werden mag.

Sei

$$2\alpha^0 = 78^0, \quad \alpha = 39.$$

Aus der Angabe

$$180 = 2.78+24$$

sieht man, die bisherigen Bezeichnungen beibehaltend, dass

$$n = 2, \quad \omega = \alpha - e\alpha = 24, \quad e\alpha = 15, \quad \alpha + e\alpha = 54.$$

Das Beispiel umfasst die Fälle 12) und 11) des § 11. nebst ihren durch Vertauschung von φ_1 und φ_2 sich ergebenden Modificationen es sind hienach die folgenden Angaben zu machen, welche auch mit Hilfe des § 3. zu controliren sind.

1) Während der Winkel AOP von einem dicht bei Null liegenden Werte an stetig wächst bis vor 24^0, hat man beständig $u = 3$, $v = 2$. Die Grenzbilder P_3', P_2'' bewegen sich beide stetig gegen den festen Punkt 𝔄 hin, P_3' innerhalb des todten Raumes, P_2'' ausserhalb, beide immer gleich weit von 𝔄 entfernt; diese Entfernung allmählich alle Werte zwischen Null und 24^0 annehmend.

2) Während AOP von 24^0 an stetig wächst bis zu 54^0 ($= 78^0 - 24^0$), ist immer $u = v = 2$. Der Bogen zwischen den Grenzbildern P_2', P_2'' ist unveränderlich gleich 48^0, sein Halbirungspunkt immer der mit P sich bewegende Punkt 𝔓. Die Bewegung des Bogens P_2''𝔓P_2' ist eine Fortschiebung in der Richtung 𝔄𝔐𝔅, so dass anfänglich P_2'' in 𝔄 ist, und zuletzt P_2' in 𝔅.

3) Während AOP stetig wächst über 54^0 hinaus bis dicht vor 78^0, ist immer $u = 2$, $v = 3$. Die Grenzbilder P_2', P_3'' bewegen sich

beide stetig von dem festen Punkte 𝔅 weg, P_2' ausserhalb des todten Raumes, P_3'' innerhalb; beide immer gleich weit von 𝔅 entfernt, diese Entfernung allmählich alle Werte zwischen 24^0 und Null annehmend.

§ 16.

Nachdem alles Wesentliche dargelegt ist, was auf die Abbildungen des einzelnen Punktes P sich bezieht, wollen wir irgend ein starres System Σ von Punkten C, D, E ... betrachten, welches in die Oeffnung (2α) des Winkelspiegels eingeführt sei; und es soll für die Punkte C, D, E ... der Figur Σ dahin gestellt bleiben, ob sie in Einer zu der Axe UV normalen Ebene sich befinden oder nicht.

Während wir nun bie bisherigen Bezeichnungen festhalten oder ihnen ganz analoge gebrauchen, machen wir zunächst die besondere Annahme, dass der Quotient $180:2\alpha$ eine ganze Zahl $n+1$ sei. Dann sind gemäss den Sätzen der §§ 6., 7. sofort die folgenden Angaben zu machen.

I) Als zu dem ersten Spiegel gehörige Abbildungen der Figur Σ ergeben sich der Reihe nach Figuren Σ_1', Σ_2', Σ_3' ... Σ_n', Σ_{n+1}', jene eine in einem der $n+1$ Hilfsfächer des ersten Spiegels, welche der Reihe nach sich darbieten als Flächenwinkel, jeder zwischen zwei nächst aufeinander folgenden der $n+2$ Ebenenstücke UVA, UVL_1, UVL_2 ... UVL_n, $UV\mathfrak{A}$. — Und mit analogen Bestimmungen erscheinen als zum zweiten Spiegel gehörige Abbildungen der Figur Σ die mit Σ_1'', Σ_2'', Σ_3'' ... Σ_n'', Σ_{n+1}'' zu bezeichnenden.

II) Je zwei nächst benachbarte Abbildungen Σ_k', Σ_{k+1}' sind symmetrisch mit Bezug auf die sie trennende Ebene (Scheinspiegel) UVL_k, so zwar, dass den Punktbildern C_k', D_k', E_k ... der Reihe nach entsprechen C_{k+1}', D_{k+1}', E_{k+1}' ... — In gleicher Weise sind Σ_k'', Σ_{k+1}'' symmetrisch mit Bezug auf die Ebene (Scheinspiegel) UVR_k.

III) Jede Abbildung Σ' oder Σ'' von ungerader Ordnung ist symmetrisch gleich dem Urbild Σ, so zwar, dass den Punkten C, D, E ... des letzteren entsprechen die in Σ' enthaltenen Punktbilder C', D', E'... und ebensogut die in Σ'' enthaltenen C'', D'', E'' ...

Daher: alle Abbildungen Σ' und Σ'' von ungerader Ordnung sind unter sich congruent, so zwar, dass in jedem Paare derselben die dann einen Partner angehörigen Bilder der Punkte C, D, E ... der Reihe nach entsprechen den im andern Partner befindlichen Bildern derselben Punkte.

IV) Jede Abbildnng Σ' oder Σ'' von ungerader Ordnung ist congruent mit dem Urbild Σ, so zwar, dass mit den Punkten C, D, E ... des letzteren beziehungsweise zur Deckung zu bringen sind, sowol die in Σ' enthaltenen Punktbilder C', D', E' ... als die in Σ'' enthaltenen C'', D'', E'' ...

Daher auch: alle Abbildungen Σ' und Σ'' von gerader Ordnung sind (in selbstverständlichem Sinne) unter sich congruent.

Den Sätzen der § 10., II) und § 12., II) gemäss knüpft sich hieran:

V) Die Abbildungen Σ_{n+1}', Σ_{n+1}'', beide in dem Winkel zwischen den Ebenenstücken $UV\mathfrak{A}$, $UV\mathfrak{B}$ eingeschlossen, müssen immer vollständig vereinigt sein, so zwar, dass die Punkte C_{n+1}', D_{n+1}', E_{n+1}' ... der Reihe nach in C_{n+1}'', D_{n+1}'', E_{n+1}'' ... sich finden.

Indes ist hiebei der Unterschied zu berücksichtigen, welcher sich ergibt, jenachdem die Zahl $n+1$ ungerade ist oder gerade.

Wird nämlich diejenige Ebene beigezogen, welche durch die Axe UV gehend, h i n t e r den beiden Spiegelflächen UVA, UVB befindlich, gleiche Winkel mit denselben macht, so ist in dem Falle der ungeraden $n+1$ zu bemerken: das Bild Σ_{n+1}' (oder das mit ihnen identische Σ_{n+1}'') liegt bezüglich genannter Ebene zu dem Urbild Σ symmetrisch, so dass jede der Strecken CC_{n+1}', DD_{n+1}', EE_{n+1}' ... durch genannte Ebene senkrecht halbirt ist. — Ist aber $n+1$ eine gerade Zahl, so sind Σ und Σ_{n+1}' in solcher gegenseitigen Lage, dass jede der Strecken CC_{n+1}', DD_{n+1}' EE_{n+1}' ... durch die Gerade UV senkrecht halbirt ist.

Die Bedeutung dieser Angabe zeigt sich an folgenden Beispielen:

Ist die Oeffnung $2\alpha^0 = 60^0$} $\{180:2\alpha = 3 = n+1\}$, so wird als mittleres Bild eines in den Winkelspiegel mit beiden Augen gleichmässig hineinschauenden Menschen ein solches Menschenbild erscheinen, dessen rechtes Auge die Abbildung von dem linken Auge des wirklichen Menschen ist.

Hat man aber $2\alpha^0 = 90^0\{180:2\alpha = 2 = n+1\}$, so wird als mittleres Bild eines in den Winkelspiegel mit beigen Augen gleichmässig hineinschauenden Menschen ein solches Menschenbild erscheinen, dessen rechtes Auge die Abbildung von dem rechten Auge des Urbildes ist.

§ 17.

Sei jetzt angenommen, dass die Division $180:2\alpha$ einen Rest ω lasse $\{180 = n.2\alpha + \omega\}$, und sei eine in die Oeffnung des Winkelspiegels eingeführte Figur Σ gedacht, wie im vorigen §.

Das $(n+1)$te Hilfsfach zum ersten Spiegel wie das $(n+1)$te zum zweiten ist nun ein Flächenwinkel $= \omega$, und sofort ist zu sagen:

Es erscheinen jedenfalls Abbildungen $\Sigma_1' \ldots \Sigma_n'$ und $\Sigma_1'' \ldots \Sigma_n''$, jede als eine vollständige Abbildung von Σ, und es sind für solche ganz dieselben Bestimmungen zu geben wie im vorigen §.

Was aber in dem $(n+1)$ten Hilfsfach (dem Schlussfach), zu dem einen oder andern Spiegel gehörig, zu suchen sei, dass ist jetzt näher zu erörtern.

Nach den §§ 10. und 12. kann irgend ein Punkt P der Figur Σ so liegen, dass entweder keines der Bilder P_{n+1}', P_{n+1}'' zu Stande kommt, oder nur ein einziges, oder beide. Daher ist bei jedem der zwei Schlussfächer an die drei Möglichkeiten zu denken, dass entweder gar kein Punkt der Figur Σ in demselben zur Abbildung gelange, oder nur ein Teil von Σ, oder Σ in ganzer Ausdehnung.

Indes ist eine Construction anzugeben, welche geeignet ist, für jeden Fall eine vollständige Aufklärung in anschaulicher Weise zu gewähren.

Aus Axe UV werde zunächst innerhalb des $n$ten Hilfsfaches des ersten Spiegels ein Ebenenstück $UV\mathfrak{L}$ so geführt, dass seine Abweichung von dem Ebenenstück $UVL_n = \omega$ sei. Dann ist aus § 6., V) zu entnehmen: was von der Figur Σ_n' zwischen den Ebenenstücken $UV\mathfrak{L}$ und UVL_n sich befindet, das und nur das erscheint auch in dem Schlussfache zwischen UVL_n und $UV\mathfrak{A}$, so zwar, das jedem Punkte C_n' ein Punkt C_{n+1}' entspricht, und die zwei Punkte C_n', C_{n+1}' zu der Ebene UVL_n symmetrisch liegen.

Desgleichen werde aus UV innerhalb des $n$ten Hilfsfaches des zweiten Spiegels ein Ebenenstück $UV\mathfrak{R}$ so geführt, dass seine Abweichung von dem Ebenenstück $UVR_n = \omega$ sei. Was dann von der Figur Σ_n'' zwischen den Ebenenstücken $UV\mathfrak{R}$ und UTR_n sich befindet, das und nur das erscheint auch in dem Schlussfache zwischen UVR_n und $UV\mathfrak{A}$, so zwar, dass jedem Punkt C_n'' ein Punkt C_{n+1}'' entspricht, und die zwei Punkte C_n'', C_{n+1}'' zu der Ebene symmetrisch liegen.

Man sieht hieraus, dass unter Umständen die ganze Leistung des Winkelspiegels mit Hervorbringung der Bilder Σ_n', Σ_n'' erschöpft ist, dass aber unter andern Umständen Figuren Σ_{n+1}', Σ_{n+1}'' entstehen, welchen so und so viel dazu fehlte, vollständige Bilder von Σ zu sein.

Um für solche ihre Beziehung zu Σ genauer zu erkennen, kann man zwei weitere Hilfsebenen einführen, beide aus UV gehend, innerhalb des Winkelspiegels selbst: die eine $UV\mathfrak{L}_1$ von UVA abweichend um ω, die andere $UV\mathfrak{R}_1$ von UVB abweichend um ω. — Sofort sind folgende Angaben zu verstehen:

I) Ueber die etwa zu Stande kommende Figur Σ_{n+1}'.

Ist $n+1$ eine gerade Zahl, so wird Σ_{n+1}' congruent sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVB, $UV\mathfrak{R}_1$. Genauer: bleibt Σ_{n+1}' in fester Verbindung mit den zwei Ebenenstücken $UV\mathfrak{A}$, UVL_n, und dreht man dieses System um die Axe UV (in der einen oder andern Richtung, ohne Gleitung) bis UVL_n mit UVB sich vereinigt, so wird jeder Punkt C_{n+1}' der Figur Σ_{n+1}' mit dem ihm entsprechenden C der Figur Σ vereinigt sein.

Ist aber $n+1$ eine ungerade Zahl, so wird Σ_{n+1}' symmetrisch gleich sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVA, $UV\mathfrak{L}_1$, und es existirt eine die UV enthaltende Ebene, mit Bezug auf welche je zwei einander entsprechende Punkte C_{n+1}' und C symmetrisch liegen.

II) Ueber die etwa zu Stande kommende Figur Σ_{n+1}''.

Ist $n+1$ eine gerade Zahl, so wird Σ_{n+2}'' congruent sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVA, $UV\mathfrak{L}_1$. Genauer: bleibt Σ_{n+1}'' in fester Verbindung mit den zwei Ebenenstücken $UV\mathfrak{B}$, UVR_n, und dreht man dieses System um die Axe UV (in der einen oder andern Richtung, ohne Gleitung) bis UVR_n mit UVA sich vereinigt, so wird jeder Punkt C_{n+1}'' mit dem ihm entsprechenden C der Figur Σ vereinigt sein.

Ist aber $n+1$ eine ungerade Zahl, so wird Σ_{n+1}'' symmetrisch gleich sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVB, $UV\mathfrak{R}$, und es existirt eine die Axe UV enthaltende Ebene, mit Bezug auf welche je zwei einander entsprechende Punkte C_{n+1}'' und C symmetrisch liegen.

§ 18.

Ist ein Punktsystem Σ (so wie in den zwei vorhergehenden §§ eingeführt, und hat man $180:2\alpha = n+1$, so ist klar, dass von den Bildern $\Sigma_1' \ldots \Sigma_n'$ und $\Sigma_1'' \ldots \Sigma_n''$ keines einen Punkt mit dem andern gemein hat; von diesen Bildern kann also keines irgendwie das andere stören. Aber auch bei den Bildern Σ_{n+1}' und Σ_{n+1}'' trifft letztere Behauptung zu. Da nämlich jeder Punkt P_{n+1}' des einen mit demjenigen Punkt P_{n+1}'' des andern vereinigt ist, welcher denselben Punkt P des Systems Σ abbildet wie jener, so wird durch die Vereinigung der Bilder Σ_{n+1}' Σ_{n+1}'' (innerhalb des todten Raumes) eben dafür gesorgt, dass in diesem ein einziges, nicht bloss ganz eines, sondern sogar in Betreff der Helligkeit begünstigtes Bild von Σ sich zeigt.

Sehen wir dagegen auf irgend einen derjenigen Fälle, wo (wie in § 17.) $180 = n.2\alpha + \omega$, so ist nur von den Bildern $\Sigma_1' \ldots \Sigma_{n-1}'$ und $\Sigma_1'' \ldots \Sigma_{n-1}''$ unbedingt zu sagen, dass keine zwei einander stören. Was dagegen Σ_n' und Σ_n'' betrifft, so sind diese zwar gewiss vollständige Bilder von Σ, aber bei jedem von ihnen ist die Möglichkeit zu berücksichtigen, dass es wenigstens teilweise in den todten Raume falle, auf welche vollends Σ_{n+1}' und Σ_{n+1}'' in ihrer ganzen etwa ergebenden Ausdehnung angewiesen sind. — Ist nun $\mathfrak{T}$ irgend ein Punkt innerhalb des todten Raumes, und fällt nach $\mathfrak{T}$ ein Bild P' von einem dem Σ angehörigen Punkt P, so sieht man leicht, dass $\mathfrak{T}$ kein Ort ist, sei es für ein anderes Bild P', noch für ein Bild P''; namentlich auch kein Ort für ein Bild Q', welches ein von P verschiedener Punkt Q des Σ geben möchte. Dagegen ist immer die Aufgabe zu lösen: man soll innerhalb der Oeffnung des Winkelspiegels einen Punkt Q suchen von solcher Lage, dass er ein Bild Q'' an der beliebig gegebenen Stelle liefere, wo bereits das Bild P' sich befindet.

Um die Auflösbarkeit dieser Aufgabe und die Einzigkeit der Auflösung streng und allgemein zu erweisen, kann man die folgende Betrachtung anstellen, welche wesentlich an den Satz IV a) des § 6. anknüpft.

Man stelle sich der Reihe nach vor die aus Axe UV entspringenden Ebenenstücke UVR_1, $UVR_2 \ldots$ bis zu demjenigen UVR_x, welches als letztes vor $UV\mathfrak{T}$ sich darbieten wird. Nun ist zu Punkt $\mathfrak{T}$ der ihm symmetrische mit Bezug auf Ebene UVR_x zu nehmen, zu diesem abgeleiteten Punkt wieder der ihm symmetrische mit Bezug auf Ebene UVR_{x-1}, zu diesem abgeleiteten wieder der ihm symmetrische

mit Bezug auf Ebene UVR_{z-2} u. s. w. Durch diese Veranstaltung wird offenbar jenseits der schliesslich zu benutzenden Ebene UVR_1, innerhalb der Oeffnung des Winkelspiegels ein solcher von $\mathfrak{X}$ abgeleiteter Punkt gewonnen, an dessen Stelle ein leuchtender Punkt Q gebracht — genau an der vorgeschriebenen Stelle $\mathfrak{X}$ des todten Raumes ein Bild Q'' liefern wird.

Aus dieser Darstellung erhellt, dass und wie immer diejenigen Störungen zu ermitteln sein werden, welche bezüglich der Reinheit der in den todten Raum fallenden Abbildungen eines Systems Σ sich ergeben mögen.

Im übrigen ist gemäss dem zuletzt Vorgetragenen herzorzuheben, dass freilich die besten Leistungen des Winkelspiegels im Sinne der Hervorbringung schöner Bilder eines beliebig ausgedehnten, in seine Oeffnung eingeführten Gegenstandes dann sich ergeben werden, wenn der Oeffnungswinkel ein absoluter Teil von 180° ist.

Uebersicht des Inhalts.

II.

Zur Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Von

Herrn **Otto Ohnesorge.**

Das Problem, welches in der vorliegenden Abhandlung behandelt wird, ist folgendes:

Es sind sämtliche reelle Functionen u zu bestimmen, von der Beschaffenheit, dass sie der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügen und auf einer gegebenen algebraischen Curve vorgeschriebene Werte annehmen.

Die allgemeine Lösung der obigen Gleichung ist:

$$u = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta),$$

wo $\xi = x + iy$ und $\eta = x - iy$ gesetzt ist. Im allgemeinsten Falle sind χ_1 sowol wie χ_2 vollständig willkürliche Functionen, soll ihre Summe jedoch eine reelle Function von x und y darstellen, so müssen sie einander conjugirt sein.

§. 1.

Ich bestimme zunächst u so, dass es constant ist auf einer gegebenen Curve. Ist dies der Fall, so lautet die Gleichung der Curve $\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) = \alpha$. Die Curve soll jedoch eine algebraische sein, mit-

hin muss durch diese Gleichung eine algebraische Relation zwischen ξ und η ausgedrückt sein. Hieraus folgt sofort die Form der Function χ, wenn die obige Gleichung durch eine algebraische Beziehung zwischen ξ und η für jeden Wert von α erfüllt ist; es kann dies nämlich nur dann stattfinden, wenn χ entweder selbst eine algebraische Function oder aber höchstens ein elliptisches Integral erster Gattung von einer algebraischen Function ist. Besteht aber eine algebraische Gleichung zwischen ξ und η nur für einen bestimmten Wert von α, so können auch transcendente Functionen höherer Ordnung auftreten.

Nach dieser Betrachtung kann man das obige Problem auch auffassen als folgendes:

Es ist eine Function zu bestimmen, deren Additionstheorem gegeben ist.

Ist die algebraische Gleichung, die das Additionstheorem der beiden Functionen χ_1 urd χ_2 herstellt, so beschaffen, dass dieses Problem überhaupt eine Lösung besitzt, so ist diese Lösrng leicht zu finden, da der Weg hierzu schon von Euler gegeben ist.

In der Tat, es sei $\varphi(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung der Curve, so ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta = 0.$$

Bestimmt man nun mit Hilfe der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ ξ als Function von η und η als Function von ξ und ersetzt ia $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ die η durch die ξ und in $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ die ξ durch die η, oder auch umgekehrt, so ist entweder

$$\chi_1 = \int \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi \quad \text{und} \quad \chi_2 = \int \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \partial \eta$$

oder

$$\chi_1 = \int \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}} d\xi, \quad \chi_3 = \int \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}} d\eta$$

oder allgemeiner:

$$\chi_1 = \int M \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi \quad \text{oder} \quad = \int \frac{M}{\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}} d\xi$$

und

$$\chi_2 = \int M \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta \quad \text{oder} \quad = \int \frac{M}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}} d\eta$$

wo natürlich auch in M, welches eine willkürliche, jedoch symmetrische Function von ξ und η sein muss, entweder die ξ durch die η oder die η durch die ξ, vermöge der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ zu ersetzen sind.

Die Gleichung der Curve ist in Bezug auf beide Variable vom $n$ten Grade, es fragt sich, welche von den n Wurzeln zu nehmen sind. Die Frage erledigt sich dadurch, dass, wenn $\xi = \omega(\eta)$ und $\eta = (\xi)$ ist, dass alsdann $\omega(\tau(\xi)) = \xi$ sein muss. Derartige Wurzeln existiren wie später bewiesen werden wird, stets.

Hat man die Functionen χ so bestimmt, so wird der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ durch die Beziehung $\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) = \alpha$ Genüge geleistet, bei passender Bestimmung der Constanten α, es bleibt nun noch zu beweisen, dass auch die erhaltenen Functionen χ_1 und χ_2 einander conjugirt sind.

Die Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ ist entstanden aus der algebraischen Gleichung $\psi(x, y) = 0$ dadurch, dass man an Stelle von x $\frac{1}{2}(\xi + \eta)$, und an Stelle von y $\frac{1}{2i}(\xi, \eta)$ gesetzt hat. Da nun $\psi(x, y)$ eine rationale Function von x und y ist, so ergiebt sich sofort, dass, wenn $\varphi(\xi, \eta)$ eine reelle Function von ξ und η ist, sie auch symmetrisch ist in Bezug auf ξ und η: es ist demnach, wenn $\xi = \omega(\eta)$ eine Wurzel der Gleichung ist, auch $\eta = \omega(\xi)$ eine, ferner ist $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ dieselbe Function von ξ und η wie $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ von η und ξ, hieraus folgt, dass χ_1 und χ_2 dieselben Functionen sind.

Ist jedoch $\varphi(\xi, \eta)$ eine complexe Function, so lässt sie sich stets auf die Form bringen $A + i(\xi - \eta)B$, wo A und B rationale und symmetrische Functionen sind. Dieser Ausdruck gleich null gesetzt und die so entstandene Gleichung nach ξ aufgelöst, gebe $\xi = \omega(\eta) + i\tau(\eta)$, es folgt hieraus, dass $\eta = \omega(\xi) - i\tau(\eta)$ ebenfalls eine Wurzel sein muss.

Nun ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial A}{\partial \xi} + iB + i(\xi - \eta)\frac{\partial B}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial A}{\partial \eta} - iB + (\xi - \eta)\frac{\partial B}{\partial \eta}$$

substituirt man hierin für ξ und für η die entsprechenden Functionen

und trennt zu gleicher Zeit die reellen von den imaginären Teilen, (immer berücksichtigend, dass, wenn $B(\omega+i\tau)=F+iG$ ist, $B(\omega-i\tau) = F-iG$), so erhält man:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = C+iD+i(F+iG)+i(\xi-\omega+i\tau)(J+iK)$$

(alles Functionen von ξ)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\eta} = C-iD-i(F-iG)+i(\omega+i\tau-\eta)(J-iK)$$

(alles Functionen von η), oder

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = C-G-J\tau-K(\xi-\omega)+i\{D+J-\tau K+(\xi-\omega)J\}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = C-G-J\tau+K(\omega-\eta)-i\{D+J-\tau K+(\eta-\omega)J\}$$

Mithin sind $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$ conjugirte Functionen, also auch

$$\chi_1 = \int M \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} d\xi \quad \text{und} \quad \chi_2 = \int M \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} d\eta$$

da auch M durch die Substitution $\xi = \omega(\eta)+i\tau(\eta)$ und $\eta = \omega(\xi) - i\tau(\xi)$ in zwei conjugirte Functionen verwandelt wird.

Diese Methode lässt sich leicht ausdehnen auf den Fall, wo u auf der gegebenen Curve nicht constant, sondern einer beliebigen Function gleich wird.

Es sei $\tau(\xi.\eta)$ die gegebene Function, so wird die Gleichung der Curve enthalten sein in der Gleichung:

$$\chi_1(\xi)+\chi_2(\eta) = \tau(\xi,\eta),$$

es werden also die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} d\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} d\eta = 0$$

und

$$\left(\chi_1'(\xi) - \frac{\partial\tau}{\partial\xi}\right) d\xi + \left(\chi_2'(\eta) - \frac{\partial\tau}{\partial\eta}\right) d\eta = 0$$

identisch sein müssen, also

$$\chi_1'(\xi) - \frac{\partial\tau}{\partial\xi} = M \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$$

$$\chi_2'(\eta) - \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = M \frac{\partial \varphi}{\partial \eta},$$

mithin wird

$$u = \int \left(M \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) d\xi + \int \left(M \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \right) d\eta.$$

Auch hier ist M eine symmetrische Function, und auch hier sind entweder die ξ durch die η, oder die η durch die ξ vermöge der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ zu ersetzen.

Ist τ ebenfalls eine symmetrische Function oder von der Form $A + i(\xi - \eta)B$, so wird auch u eine reelle Function von x und y sein.

Uebrigens kann man stets eine symmetrische Function herstellen, die auf der gegebenen Curve mit τ übereinstimmt.

In der Tat, es sei A irgend eine symmetrische Function von ξ und η, ersetzt man nun in $\tau(\xi, \eta)$, ξ und η durch t und φ vermöge der Gleichungen $t = t(\xi, \eta)$ und $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$, so wird $\tau(\xi, \eta) = \tau_1(t, \varphi)$, auf der gebenen Curve aber wird $\varphi = 0$, also τ nur eine Function von t, mithin symmetrisch in Bezug auf ξ und η.

Die gefundene Function ist insofern noch willkürlich als M willkürlich ist, M müsste demnach durch vorgeschriebene Stetigkeitsbedingungen bestimmt werden. Diese Aufgabe würde ohne Zweifel äusserst schwieriger Natur sein, doch kann man dieselbe teilweise umgehen, dadurch dass man zu dem oben bestimmten u diejenige allmeinste Function u_1 addirt, die auf der gegebenen Curve gleich null ist. Diese Function kann man, wie in dem nächsten Abschnitte gezeigt werden wird, stets ohne Integrale in endlicher Form darstellen. Die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen bietet alsdann, wenn sie auch allgemein nicht ausführbar ist, in den meisten Fällen keine grossen Schwierigkeiten mehr dar. Nur, wenn endliche Unstetigkeiten, die auf bestimmten Linien stattfinden, zu beseitigen sind, könnte man auf wesentliche Schwierigkeiten stossen.

§. 2.

Die Methode, die wir soeben entwickelt haben, führt nur dann zum Ziel, wenn die Gleichung der gegebenen Curve irreductibel ist, wenn also nur eine einzige algebraische Curve gegeben ist, auf der die Function constant sein soll. In diesem Abschnitte werde ich eine Methode geben, die sich auch auf Curven anwenden lässt, deren Gleichung reductibel ist. Sie ist jedoch insofern beschränkter, als u stets constant sein muss.

Die gesuchte Function u kann in doppelter Form dargestellt werden, nämlich durch

$$u - \alpha = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta)$$

oder durch

$$u - \alpha = \frac{1}{i}\{\chi_1(\xi) - \chi_2(\eta)\}.$$

Ich behandle zuerst den Fall, dass u in der zweiten Form dargestellt wird. In diesem Falle ist $u = \alpha$ auf der Curve $\chi_1(\xi) = \chi_2(\eta)$, auf der gegebenen Curve jedoch sei $\xi = \varphi(\eta, i)$ und $\eta = \varphi(\xi, -i)$, demnach muss sein $\chi_1(\xi) = \chi_2(\varphi(\xi))$. Ist φ eine reelle Function, so ist $\chi_1 = \chi_2$, also $\chi(\xi) = \chi(\varphi(\xi))$.

Zwischen ξ und η jedoch besteht eine symmetrische Gleichung, es ist mithin, wenn $\eta = \varphi(\xi)$ auch $\xi = \varphi(\eta)$, demnach wird stets eine Wurzel existiren, so dass $\varphi(\varphi(\xi)) = \xi$ ist.

Ist nun $\chi(\xi, \varphi(\xi))$ eine symmetrische Function von ξ und $\varphi(\xi)$ und bezeichne ich dieselbe mit $\chi(\xi)$, so ist $\chi(\xi) = \chi(\varphi(\xi))$.

Wir haben also erreicht, dass alle u, die constant sind auf der gegebenen Curve, sich darstellen lassen in der Form:

$$u - \alpha = i\{\chi(\xi, \varphi(\xi)) - \chi(\eta, \varphi(\eta))\},$$

wo $\chi(\xi, \varphi(\xi))$ eine willkürliche, jedoch symmetrische Function von ξ und $\varphi(\xi)$ sein muss.

Ist $\varphi(\xi)$ keine reelle Function von ξ, so ist, wie wir schon im ersten Abschnitte gesehen haben, an Stelle von $\varphi(\xi)$ zu setzen $\omega(\xi) - i\tau(\xi)$ und an Stelle von $\varphi(\xi)$ $\omega(\eta) + i\tau(\eta)$, demnach wird:

$$u - \alpha = i\{\chi(\xi, \omega(\xi) - i\tau(\xi)) - \chi(\xi, \omega(\eta) + i\tau(\eta))\}$$

wo χ wiederum eine reelle und symmetrische Function der beiden Argumente sein muss.

2) u habe die Form: $u - \alpha = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta)$, so erhält man leicht durch ähnliche Betrachtungen wie oben, dass zu setzen ist:

$$u - \alpha = \{\psi(\xi) - \psi(\varphi(\xi))\}\{\chi(\xi, \varphi(\xi)) + \{\psi(\eta) - \psi(\varphi(\eta))\} \cdot \chi(\eta, \varphi(\eta))$$

Es sind hierin die ψ und χ stets reelle, doch willkürliche Functionen.

Dass übrigens, wenn an Stelle von ξ $\varphi(\eta)$ gesetzt wird, die rechte Seite versshwindet, erkennt man leicht, nur muss die Bedingungsgleichung stattfinden

$$\varphi(\varphi(\xi)) = \xi.$$

Derartige Functionen $\varphi(\xi)$ sind aber immer vorhanden. Es ist $\varphi(\varphi(\xi))$ bestimmt als die Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren linke Seite eine symmetrische Function ist in Bezug auf $\varphi(\varphi(\xi))$ und $\varphi(\xi)$: setzt man nun an Stelle von $\varphi(\varphi(\xi))$ ξ ein, so erhält man eine ymmetrische Gleichung ξ und $\varphi(\xi)$, die identisch ist mit derjenigen, lurch welche $\varphi(\xi)$ als Function von ξ bestimmt wird, diese ist also mmer erfüllt, und mithin ist $\varphi(\varphi(\xi)) = \xi$ eine Wurzel der Gleichung.

Diese soeben aufgestellten Functionen u besitzen sämtlich auf ler gegebenen Curve den constansten Wert α; im allgemeinen werden ie nicht nur auf dieser einen Curve, sondern noch auf verschiedenen ndern gleich α sein, es bietet sich uns jetzt das Problem dar, von liesen Functionen diejenigen heraus zusuchen, die auf mehreren gegebenen algebraischen Curven constant sind. Zunächst ist klar, dass e mehr Curven gegeben sind, desto geringer die Willkürlichkeit der Function χ sein wird.

Es sei nun vorgeschrieben, eine Function zu bestimmen, die auf den beiden algebraischen Curven $\xi = \varphi_1(\eta)$ und $\xi = \varphi_2(\eta)$ gleich α wird.

Diese Function muss sich darstellen durch die beiden Formen:

$$\frac{u-\alpha}{i} = \chi_1(\xi, \varphi_1(\xi)) - \chi_2(\eta, \varphi_1(\eta))$$

und

$$\frac{u-\alpha}{i} = \chi_3(\xi, \varphi_2(\xi)) - \chi_4(\eta, \varphi_2(\eta))$$

diese Gleichungen gehen dann und nur dann in einander über, wenn χ eine symmetrische Function ist nicht nur von ξ und $\varphi_1(\xi)$, sondern auch von $\omega(\xi)$ und $\omega(\varphi_1(\xi))$, wo ω so beschaffen ist, dass $\omega(\varphi_1(\xi)) = \omega(\varphi_2(\xi))$, es wird also sein:

$$\frac{u-\alpha}{i} = \chi_1(\omega(\xi),\ \omega(\varphi_1(\xi))) - \chi_2(\omega(\eta),\ \omega(\varphi_1(\eta)))$$

Dass die rechte Seite verschwindet, wenn man an Stelle von ξ $\varphi_1(\eta)$ oder $\varphi_2(\eta)$, sieht man sofort.

Hätten wir u dargestellt durch die erste Form, also durch die Summe zweier Functionen χ, so würden wir zu derselben Function $\omega(\xi)$ gelangt sein.

Soll u auf den n vorgeschriebenen Curven $\xi = \varphi_1(\xi)$ oder gleich $\varphi_\lambda(\xi)$ (wo $\lambda = 1 \ldots n) = \alpha$ sein, so muss die Function ω den Bedingungen genügen:

$$\omega(\varphi_1(\xi)) = \omega(\varphi_2(\xi)) = \ldots\ \omega(\varphi_n(\xi)).$$

Es fragt sich nun, wie sind derartige Functionen zu bestimmen?

Die Functonalgleichung für ω ist

$$\omega(\varphi_1(\xi)) = \omega(\varphi_2(\xi)),$$

also auch

$$\omega(\xi) = \omega(\varphi_3(\varphi_1(\xi)) = \omega(\tau(\xi))$$

wenn

$$\varphi_2(\varphi_1(\xi)) = \tau(\xi)$$

gesetzt wird.

Ich bilde folgende Functionenreihe:

$$\xi = \tau^0(\xi), \quad \tau^1(\xi) = \tau(\xi)), \quad \tau^2(\xi) = \tau(\tau(\xi)) \ldots \tau^n(\xi) = \tau(\tau^{n-1}(\xi)) \ \ldots$$
$$\tau^{-1}(\xi), \quad \tau^{-2}(\xi) \ldots \tau^{-n}(\xi) \ldots$$

wo $\tau^{-1}(\xi)$ bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\tau(\tau^{-1}(\xi)) = \xi \quad \text{und} \quad \tau^{-n}(\xi) = \tau^{-1}(\tau^{-n+1}(\xi)).$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, entweder ist die Anzahl der so gebildeten und von einander verschiedenen Functionen eine endliche oder nicht. Damit der erste Fall eintrete muss irgend eine Gleichung bestehen von der Form

$$\tau^\nu(\xi) = \tau^{-\mu}(\xi),$$

ist dies der Fall, so ist ersichtlich, dass irgend eine symmetrische Function sämtlicher von einander unterschiedenen Functionen τ eine der gesuchten Functionen ω ist, man wird aber unendliche viele algebraische Functionen herstellen können, die der Functionalgleichung genügen.

Ist dies jedoch nicht der Fall, existiren aber unendlich viele von einander verschiedene Functionen τ, so wird man auch hier, um ω zu erhalten, aus diesen unendlich vielen Elementen eine symmetrische und convergente Function bilden müssen. Es werden aber nur transcendente Functionen bestehen, die der Functionalgleichung genügen.

Abgesehen davon, dass man diese Reihe nur anwenden kann, wenn nur einer Functionalgleichung zu genügen ist, wird die Aufstellung derselben schon im allgemeinen unüberwindliche Schwierigkeiten darbieten, da es bei einer wenig complicirten Function schwer, oft unmöglich sein wird, das $n$te Glied der Reihe in independenter Form darzustellen.

Wir verlassen mithin diese Reihe vollständig und suchen aus schon bekannten Functionen die ω darzustellen.

Das Problem ist, eine Function ω so zu bestimmen, dass $\omega(\xi) = \omega(\eta)$ ist, wenn zwischen ξ und η eine algebraische, jedoch nicht symmetrische Gleichung besteht. Ein Mittel hierzu bieten die periodischen Functionen. In der Tat, es ist z. B. $\sin\xi = \sin\eta$, wenn die nicht symmetrische Gleichung besteht $\xi - \eta = 2\pi$.

Ist aber χ eine periodische Function mit der Periode α, so ist:

$$\chi(\tau(\xi)) = \chi(\tau(\eta)) \quad \text{wenn} \quad \tau(\xi) - \tau(\eta) = \alpha \quad \text{ist.}$$

Soll nun diese Gleichung eine algebraische Relation zwischen ξ und η darstellen, so muss $\tau(\xi)$ entweder selbst eine algebraische Function sein oder ein elliptisches Integral erster Gattung von einer algebraischen Function von ξ; in diesem Falle würde man für jeden Wert von α eine algebraische Beziehung erhalten. Es kann jedoch auch hier τ eine transcendente Function höherer Gattung sein, doch wird man alsdann nur für einen bestimmten Wert von α eine algebraische Gleichung erhalten. Ist die algebraische Gleichung zwischen ξ und η so beschaffen, dass man mit Hülfe dieser Methode zum Ziel kommt, so kann man die im ersten Paragraphen gegebene Methode benutzen.

Diese Functionen sind die einzigen, die man mit Hülfe der einfach periodischen Functionen bilden kann. Benutzt man mehrfach periodische Functionen, so wird man auch Functionen erhalten, die durch mehrere Substitutionen ungeändert bleiben.

Als specielles Beispiel behandele ich den Fall, bei dem zwischen ξ und η eine lineare Gleichung besteht. Es ist aber eine Function ω aufzustellen, so dass

$$\omega(\xi) = \omega\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right)$$

Ich nehme an, ω sei eine Function von

$$\tau(\xi) = \frac{a\xi + b}{c\xi + a}$$

und versuche, ob sich nicht die Constanten a, b, c, d so bestimmen lassen, dass

$$\tau\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right) = \tau(\xi) + \lambda \quad \text{ist.}$$

Es muss demnach sein:

$$\frac{(a\alpha + b\gamma)\,\xi + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)\,\xi + c\beta + d\delta} = \frac{(a + \lambda c)\xi + b + \lambda d}{a\xi + b}$$

also

$$(\alpha - m)c + \gamma d = 0 \qquad \alpha a + \gamma b = m(a + \lambda c)$$
$$\beta c + (\delta - m)d = 0 \qquad \alpha a + \delta b = m(b + \lambda d)$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt zur Bestimmung vo m die quadratische Gleichung:

$$(\alpha - m)(\delta - m) - \beta\gamma = 0$$

ferner ist:

$$\frac{c}{d} = -\frac{\gamma}{\alpha - m} = -\frac{\delta - m}{\beta} = \frac{(\alpha - m)a + \gamma b}{\beta a + (\delta - m)b},$$

hieraus folgt zur Bestimmung von a und b:

$$((\alpha - m)^2 + \beta\gamma)a + \gamma(\alpha + \delta - 2m)b = 0$$

oder da

$$\beta\gamma = (\alpha - m)(\delta - m)$$

$$\{\alpha + \delta - 2m\}\{(\alpha - m)a + \gamma b\} = 0.$$

Da nun $\frac{a}{b}$ nicht gleich $\frac{c}{d}$ sein darf, so muss

$$\alpha + \delta - 2m = 0$$

sein, also

$$m = \frac{\alpha + \delta}{2}.$$

Dieser Wert in die Bestimmungsgleichung für m eingesetzt, giebt:

$$(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0.$$

Besteht also zwischen den Coefficienten der Substitution di Gleichung:

$$(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0,$$

d. h. sind die beiden Wurzeln der Gleichung

$$(\alpha - m)(\delta - m) - \beta\gamma = 0$$

einander gleich, so lässt sich stets eine Function $\tau(\xi)$ aufstellen, so dass

$$\tau\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right) = \tau(\xi) + \lambda$$

ist; also ist ω eine Function von $\tau(\xi)$ mit der Periode λ. Diese Periode wird aus den beiden noch vollständig willkürlichen Grössen a und b bestimmt.

2) Diese Bedingungsgleichung finde nicht statt, die Gleichung

$$m^2 - (\alpha + \delta)m + \alpha\delta - \beta\gamma = 0$$

abe also zwei verschiedene Wurzeln m_1 und m_2, so lässt sich stets ne Function

$$\tau(\xi) = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}$$

fstellen, so dass

$$\tau\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right) = \frac{m_1}{m_2}\,\tau(\xi) \quad \text{ist.}$$

In der Tat, man erhält zur Bestimmung von a, b, c, d die Glei-
ıngen:

$$(\alpha - m_1)\,a + \gamma b = 0 \qquad (\alpha_2 - m_2)\,c + \gamma d = 0$$
$$\beta a + (\delta - m_1)\,b = 0 \qquad \beta c + (\delta - m_2)\,d = 0$$

ıen immer genügt werden kann.

In diesem Falle ist also ω eine Function von $\log \tau(\xi)$ mit der riode $\log \frac{m_1}{m_2}$.

Sind m_1 und m_2 reelle Grössen, ist also $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma > 0$, so auch $\tau(\xi)$ stets eine reelle Function; sind sie jedoch complex, so ıss man das Additionstheorem des Arcus tangens anwenden, um ılle Functionen zu erhalten.

Es ist

$$\operatorname{arctg} \tau + \operatorname{arctg} m = \operatorname{arctg} \frac{\tau + m}{1 - \tau m},$$

ederum sei

$$\tau(\xi) = \frac{a\xi + b}{c\xi + d},$$

so

$$\operatorname{arctg} \tau\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right) = \operatorname{arctg} \frac{(a\alpha + b\gamma)\,\xi + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)\,\xi + c\beta + d\delta}$$

nd

$$\operatorname{arctg} \tau(\xi) + \operatorname{arctg} m = \operatorname{arctg} \frac{(a + mc)\,\xi + b + md}{(c - ma)\,\xi + d - mb},$$

lemnach setze ich:

$$\alpha a + \gamma b = \lambda(a + mc)$$

oder geordnet:

$$(\alpha - \lambda)a + \gamma b = m\lambda c \qquad (\alpha - \lambda)c + \gamma d = -\,m\lambda a$$
$$\beta a + (\delta - \lambda)b = m\lambda d \qquad \beta c + (\delta - \lambda)d = -\,m\lambda b,$$

hieraus folgt:

$$((\alpha - \lambda)^2 + \gamma\beta + m^2\lambda^2)c + \ldots$$
$$((\alpha - \lambda)^2 + \gamma\beta + m^2\lambda^2)$$

Wären die Coefficienten dieser Gleichungen von null verschieden, so würde man erhalten $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\tau(\xi)$ würde sich also auf eine Constante reduciren, es ist mithin:

$$(\alpha - \lambda)^2 + \gamma\beta + m^2\lambda^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta)$$

also

$$m\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{-((\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma)}$$

also reell.

Sind m und λ so bestimmt, so lassen sich zwei Gleichungen d Systems aus den beiden anderen ableiten, es bleiben mithin noch 2 übrig, und aus diesen folgt:

$$c = \frac{(\alpha - \delta)\,a + 2\gamma b}{m(\alpha + \delta)}, \qquad d = \frac{2\beta a + (\delta - \alpha)b}{m(\alpha + \delta)}$$

mithin:

$$\tau(\xi) = \sqrt{-((\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma)} \cdot \frac{a\xi + b}{((\alpha - \delta)a + 2\gamma b)\xi + 2\beta a + (\delta - \alpha)b}$$

Ist $\tau(\xi)$ so bestimmt, so ist

$$\operatorname{arc\,tg} \tau\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right) = \operatorname{arc\,tg} \tau(\xi) + \operatorname{arc\,tg} m.$$

Nimmt man nun irgend eine periodische Function von $\operatorname{arc\,tg} \tau(\xi)$ mit der Periode $\operatorname{arc\,tg} m$, so ist diese Function das gesuchte ω.

Wir haben für $\tau(\xi)$ stets eine lineare gebrochene Function gesetzt, es liegt die Frage nahe, ob es nicht noch gebrochene Functionen höherer Geraden giebt, die den obigen Bedingungen genügen?

Stellt man die Bedingungsgleichung für die Coefficienten einer solchen Function auf, so erkennt man dass allen Bedingungen stets genügt werden kann; eine eingehendere Untersuchung jedoch ergiebt, dass Zähler und Nenner so viele gemeinsame Factoren besitzen, um auch in diesem Falle $\tau(\xi)$ auf eine lineare gebrochene Function zu reduciren.

Teil II. Anwendungen.

Die soeben entwickelte Theorie lässt sich direct und ohne grosse Schwierigkeiten anwenden auf viele Probleme der Analysis und der mathematischen Physik, da bei allen diesen Anwendungen nur darauf zu achten ist, dass auch den Stetigkeitsbedingungen genügt wird.

Sind z. B. Functionen zu bestimmen, die stetig sind in der ganzen unendlichen Ebene mit Ausnahme des Unendlichkeitspunktes und der von einer oder mehreren Curven umgebenen Fläche, so genügt man den Stetigkeitsbedingungen meistensteuteils schon dadurch, dass man von allen Functionen, die constant sind auf den Begrenzungscurven und die die gegebene Unstetigkeit in der Unendlichkeit besitzen, diejenige auswählt, die den bestimmten constanten Wert nur auf diesen Grenzcurven besitzt.

Anders jedoch stellt sich die Sache, wenn Functionen zu bestimmen sind, die den bestimmten constanten Wert auf einer Curve besitzen, in derem Innern sie in bestimmten Punkten unstetig werden sollen. Die Functionen $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$, die wir durch Auflösung einer Gleichung $n$ten Grades gefunden haben, sind hier, direct wenigstens, meistenteils nicht anzuwenden, da sie gewöhnlich im Innern der Fläche in gewissen Linien oder Punkten endliche Unstetigkeiten besitzen werden, oder vielmehr, da sie im Innern der Fläche gewisse Linien nicht überschreiten dürfen, wenn sie am Rande der Fläche mit dem vorgeschriebenen Werte ankommen sollen. Man wird in diesem Falle zurückgehen müssen auf die im ersten Paragraphen gegebene Methode und versuchen, die Gleichung der Begrenzung darzustellen in der Form:

$$\chi(\xi) + \chi(\eta) = \alpha,$$

bei weiteren Rechnungen sind alsdann nur die Functionen $\chi(\xi)$ und $\chi(\eta)$ anzuwenden.

Als specielle Anwendungen werde ich, um den Umfang dieser Abhandlung nicht zu sehr anwachsen zu lassen, nur zwei Beispiele geben.

§. 1.

Die Gleichgewichtsverteilung der Elektricität auf zwei unendlich grossen Cylindern mit kreisförmiger Basis.

Diese Verteilung ist durch die Potentialfunction vollständig bestimmt. Diese Function muss den bekannten Stetigkeitsbedingungen genügen und constant sein auf der Peripherie beider Kreise.

Die Gleichungen der beiden Kreise seien:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad (x-a)^2 + y^2 = \varrho^2$$

oder in ξ und η ausgedrückt:

$$\xi . \eta = r^2 \quad \text{und} \quad \xi . \eta - a(\xi + \eta) = \varrho^2 - a^2$$

also ist auf der Peripherie

$$\eta = \frac{r^2}{\xi} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{a\xi + \varrho^2 - a^2}{\xi - a}.$$

Demnach ist zunächst eine Function zu bestimmen, die ungeänd bleibt durch die Substitution: $\left| \xi, \frac{r^2\xi - r^2 . a}{a\xi + \varrho^2 - a^2} \right|$. Um unsere früh Entwickelungen anzuwenden, ist zu setzen:

$$\alpha = r^2, \quad \beta = -ar^2, \quad \gamma = a, \quad \delta = \varrho^2 - a^2,$$

die in m quadratische Gleichung wird mithin:

$$m^2 - (r^2 + \varrho^2 - a^2)m + r^2 \varrho^2 = 0$$

also

$$\left. \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\} = \tfrac{1}{2}\{r^2 + \varrho^2 - a^2 \pm \sqrt{(r^2 + \varrho^2 - a^2)^2 - 4r^2 \varrho^2}\}.$$

Diese Gleichung besitzt zwei gleiche Wurzeln, wenn $a^2 = (r$ ist, wenn sich also die beiden Kreise berühren, schneiden sic beiden Kreise, so wird die Quadratwurzel imaginär, liegen sie von einander getrennt, so sind die Wurzeln reell.

1) Die beiden Kreise berühren sich, und es sei $a = r + \varrho$

Es ist zunächst die Function $\tau(\xi)$ aufzustellen, diese möge i Unendlichkeit gleich null werden und sich durch die Substitutio π vermehren, ich setze also:

$$\tau(\xi) = \frac{r . \varrho . \pi}{r + \varrho} \cdot \frac{1}{\xi - r}$$

ferner wende ich, um u aufzustellen, die Form an:

$$u - \alpha = \chi(\omega(\xi)) - \chi(\omega(\varphi(\xi))) + \chi(\omega(\eta)) - \chi(\omega\varphi(\eta))$$

und setze, da u in der Unendlichkeit unendlich werden soll wie Logarithmus der Entfernung:

$$\chi(\omega(\xi)) = k \log \sin \tau(\xi),$$

also ist:

$$u - \alpha = k . \log \frac{\sin \tau(\xi), \ \sin \tau(\eta)}{\sin \tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right), \ \sin \tau\left(\frac{r^2}{\eta}\right)}.$$

Nun ist aber

$$\tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right) = -\tau(\xi) - \frac{\varrho}{r + \varrho} . \pi,$$

u wird also gleich α auf den Curven:

$$\sin\left(\tau(\xi) + \frac{\varrho}{r+\varrho}\pi\right)\sin\left(\tau(\eta) + \frac{\varrho}{r+\varrho}\pi\right) - \sin\tau(\xi) \,.\, \sin\tau(\eta) = 0.$$

Es besteht aber folgende Gleichung:

$$\sin(x+\alpha)\sin(y+x) - \sin x \,.\, \sin y = \sin\alpha\sin(x+y+\alpha),$$

mithin ist $u = \alpha$ auf dem Curvensystem:

$$\tau(\xi) + \tau(\eta) + \frac{\varrho}{r+\varrho}\pi = n\pi$$

oder x und y eingeführt auf dem Curvensystem:

$$\left(x - \frac{n(r+\varrho)r}{n(r+\varrho)-\varrho}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r \,.\, \varrho}{n(r+\varrho)-\varrho}\right)^2.$$

Da n jede beliebige Zahl sein darf, so stellt diese Gleichung unendlich viele Kreise dar. Die Entfernung der Mittelpunkte vom Nullpunkte sei e_n und die Radien seien R_n, so ist

$$e_0 = 0 \qquad R_0 = r$$

und

$$e_1 = r + \varrho \qquad R_1 = \varrho$$

diese beiden Kreise sind die gegebenen.

Ferner ist, wenn n positiv:

$$e_n = \frac{n(r+\varrho)r}{n(r+\varrho)-\varrho} \quad \text{und} \quad R_n = \frac{r \,.\, \varrho}{n(r+\varrho)-\varrho}$$

also

$$e_n - R_n = r.$$

Da, wenn $n > 1$, $R_n < \varrho$ ist, so liegen diese Kreise sämtlich im Innern des zweiten Kreises, und ihre Peripherien gehen durch den Berührungspunkt.

Ist n negativ, so ist

$$e_n + R_n = r$$

die Mittelpunkte liegen also in dem ersten Kreise und ihre Peripherien gehen ebenfalls durch den Berührungspunkt. Für

$$n = \pm\infty \quad \text{ist} \quad e = r \quad \text{und} \quad R = 0.$$

Alle diese Kreise sind also eingeschlossen von den beiden gegebenen; wenn wir mithin die beiden gegebenen Kreise als Gren[illegible] des äusseren Raumes auffassen, so ist u im äusseren [illegible] nur [illegible] der Grenze gleich α.

In der Unendlichkeit wird u unendlich wie der Logarithmus der Entfernung, die übrigen Unstetigkeitspunkte liegen im Innern der Kreise, wenn man den Berührungspunkt, wie es in diesem Falle auch sein muss, zu den inneren Punkten rechnet. Uebrigens kann u in dem Berührungspunkt keinen anderen Wert besitzen als α, dies erkennt man leicht, wenn u durch x und y ausgedrückt wird.

Es ist

$$u - \alpha = k.\log \frac{\cos(\tau(\xi) + \tau(\eta)) - \cos(\tau(\xi) - \tau(\eta))}{\cos\left(\tau(\xi) + \tau(\eta) + \frac{2\varrho\pi}{r+\varrho}\right) - \cos(\tau(\xi) - \tau(\eta))}$$

also

$$u - \alpha = k \log \frac{\cos \mu \frac{x-r}{v} - \frac{1}{2}(e^{\frac{\mu y}{v}} + e^{-\frac{\mu y}{v}})}{\cos \mu \left(\frac{x-r}{v} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2}(e^{\frac{\mu y}{v}} + e^{-\frac{\mu y}{v}})}$$

wo

$$\mu = \frac{2 r \varrho \pi}{r + \varrho}; \quad v = (x-r)^2 + y^2$$

Diese Function ist, wie man leicht erkennt, vollständig eindeutig bestimmt bis auf den Berührungspunkt, hier kann u jeden beliebigen Wert annehmen und dieser Wert wird abhangen von dem Wege auf dem man zu dem Berührungspunkte gelangt. Da man aber von einem hinreichend nahen Punkte des äusseren Raumes zu dem Berührungspunkte nur auf der geraden Linie $x = r$ gelangen kann, so wird in ihm die Exponentialgrösse unendlich gross, das Argument des Logarithmus also gleich 1 und mithin $u = \alpha$.

2) Die beiden Kreise liegen von einander getrennt und es sei $a > r + \varrho$.

Die beiden Wurzeln m_1 und m_2 sind reell, mithin ist zu setzen, da für $\xi = \infty$, $\log \tau(\xi) = 0$ werden soll:

$$\tau(\xi) = \frac{a\xi - (r^2 - m_1)}{a\xi - (r^2 - m_2)} = 1 + \frac{m_1 - m_2}{a\xi - (r^2 - m_2)}$$

es wird

$$\tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right) = \frac{ar^2 - (r^2 - m_1)\xi}{ar^2 - (r^2 - m_2)\xi} = \frac{r^2 - m_1}{r^2 - m_2} \cdot \frac{1}{\tau(\xi)}$$

demnach:

$$u - \alpha = k \log \frac{\sin(\nu \log \tau(\xi)) \sin(\nu \log \tau(\eta))}{\sin(\nu \log (h\tau(\xi))) \sin(\nu \log (h\tau(\eta)))}$$

wo

$$\nu = \pi : \log \frac{m_1}{m_2}; \qquad h = \frac{r^2 - m_2}{r^2 - m_1}$$

Zunächst erkennt man, dass u in der Unendlichkeit unendlich wird wie der Logarithmus der Entfernung, es wird gleich α auf den Curven:

$$\frac{a\xi-(r^2-m_1)}{a\xi-(r^2-m_2)}\cdot\frac{a\eta-(r^2-m_1)}{a\eta-(r^2-m_2)}=\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^n,$$

es sei

$$\frac{m_1}{m_2}=k$$

so stellt diese Gleichung die unendlich vielen Kreise dar:

$$(x-e_n)^2+y^2=R_n^2$$

wo

$$e_n=\frac{(1-k^n)ar^2}{(r^2-m_2)-k^n.(r^2-m_1)}$$

und

$$R_n^2=e_n^2-\frac{r^2+\varrho^2-a^2}{a}e_n+r^2.$$

Es ist also

$$e_0=0 \quad \text{und} \quad R_0=r,$$

ferner

$$e_1=a \quad \text{und} \quad R_1=\varrho.$$

Dieses sind die beiden gegebenen Kreise, diese schliessen ebenso wie im vorigen Falle sämtliche übrigen ein.

Diese soeben aufgestellte Function u hat denselben constanten Wert auf der Peripherie beider Kreise, das ist offenbar nicht der allgemeinste Fall, es kann auch u auf den Peripherien einen verschiedenen Wert besitzen. Um eine solche Function zu erhalten, ist zu u noch der Ausdruck $A\log\tau(\xi).\tau(\eta)$ zu addiren oder

$$A.\log\frac{(ax-(r^2-m_1))^2+a^2y^2}{(ax-(r^2-m_2))^2+a^2y^2}$$

Dieser Ausdruck ist unstetig nur in den Punkten

$$x=\frac{r^2-m_1}{a},\quad y=0 \quad \text{und} \quad x=\frac{r^2-m_2}{a},\quad y=0,$$

also in Punkten, die innerhalb der beiden Kreise liegen. Ferner wird derselbe auf der Peripherie des ersten Kreises gleich $A.\log\frac{r^2-m_1}{r^2-m_2}$ und auf der des zweiten, also wenn

$$x^2+y^2=\varrho^2-a^2+2ax$$

gesetzt wird, gleich $A.\log\frac{a^2-(r^2-m_1)}{a^2-(r^2-m_2)}$, auf beiden also constant.

In der Unendlichkeit wird er null.

Um nun u im allgemeinsten Falle aufzustellen, setze ich:

$$\frac{(ax-(r^2-m_1)^2+a^2y^2}{(ax-(r^2-m_2))^2+a^2y^2}=\tau$$

und

$$\frac{2(m_2-m_1)y(a(x^2+y^2)-2(r^2-(m_1+m_2))x+ar^2)}{(a(x^2+y^2)-(2r^2-(m_1+m_2))x^2+ar^2)^2-(m_2-m_1)^2y^2}=\omega,$$

so ist

$$u-\alpha=A\log\tau+k\log\frac{\cos(\nu\log\tau)-\frac{1}{2}(e^{\nu\omega_1}+e^{-\nu\omega_1})}{\cos(\nu\log h^2\tau)-\frac{1}{2}(e^{\nu\omega_1}+e^{-\nu\omega_1})}$$

wo

$$\nu=\pi:\log\frac{m_1}{m_2};\quad h=\frac{r^2-m_2}{r^2-m_1};\quad \omega_1=\operatorname{arctg}\omega$$

Die 3 noch willkürlichen Constanten, die in dieser Formel auftreten, werden bestimmt durch die Werte die u auf den beiden Kreisen und in der Unendlichkeit annehmen soll. Ist die Gesamtmasse der Elektricität gleich null, so ist auch $k=0$, also

$$u-\alpha=A\log\tau.$$

Der Ausdruck für u enthält noch zwei vieldeutige Functionen den Logarithmus und den Arcus tangens. Der Logarithmus muss, da u reell ist, ebenfalls reell sein, also ist er eindeutig bestimmt. Anders der Arcus tangens. Zunächst ist klar, dass man an Stelle von $\operatorname{arctg}\omega$ setzen kann

$$2\operatorname{arctg}.\frac{(m_2-m_1)y}{a\left\{\left(x-\frac{r^2+a^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+y^2-\frac{(r^2+a^2-\varrho^2)^2-4a^2r^2}{4a^2}\right\}}$$
$$=2\varphi+2n\pi,$$

wenn φ der Winkel ist, den die beiden Verbindungslinien der Punkte

$$x=\frac{r^2-m_1}{a},\quad y=0\quad\text{und}\quad x=\frac{r^2-m_2}{a},\quad y=0$$

mit dem Punkte xy bilden. Da u in der Unendlichkeit logarithmisch unendlich werden soll, so muss $\operatorname{arctg}\omega=0$ für $\xi=\infty$ sein, hieraus folgt, dass $n=0$ sein muss, mithin ist auch der Arcus tangens eindeutig bestimmt.

Streng genommen, müsste φ in der für y positiven Halbaxe das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, wie in der für y negativen, wir können aber, da der Wert von u hierdurch nicht geändert wird, festsetzen, dass φ stets das positive Vorzeichen besitze.

Ebenso wie ω hat auch τ eine leicht zu übersehende geometrische Bedeutung. Es seien R_1 und R_2 die Entfernungen des Punktes xy von den beiden Punkten

$$x = \frac{r^2 - m_1}{a}, \quad y = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{r^2 - m_2}{a}, \quad y = 0,$$

so ist

$$\tau = \frac{R_1^2}{R_2^2},$$

also lässt sich u schliesslich schreiben:

$$u - \alpha = 2A \log \frac{R_1}{R_2} + k \log \frac{\cos\left(2\nu \log \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{1}{2}(e^{2\nu\varphi} + e^{-2\nu\varphi})}{\cos\left(2\nu \log \frac{R_1}{hR_2}\right) - \frac{1}{2}(e^{2\nu\varphi} + e^{-2\nu\varphi})}$$

Die Unstetigkeitspunkte der Function u liegen sämtlich auf der X Achse und innerhalb der beiden Kreise mit Ausnahme des Unendlichkeitspunktes. Wird $a = r + \varrho$, also $m_1 = m_2$, so geht die Function, wie man sich leicht überzeugen kann, über in die für zwei sich berührende Kreise entwickelte Potentialfunction.

Liegen die beiden Kreise in einander, so lässt sich die Potentialfunction leicht aus der obigen ableiten.

3) Die beiden Kreise mögen sich schneiden, also

$$r + \varrho > a > r - \varrho.$$

Es ist mithin $4r^2\varrho^2 - (r^2 + \varrho^2 - a^2)^2$ eine positive Grösse, sie sei gleich λ^2, ferner sei

$$m = \frac{\lambda}{r^2 + \varrho^2 - a^2},$$

so setze ich, damit für $\xi = \infty$ $\tau(\xi) = 0$ wird:

$$\tau(\xi) = \frac{\lambda}{2a\xi - (a^2 + r^2 - \varrho^2)},$$

also

$$u - \alpha = k \log \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau(\xi)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau(\eta)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau \frac{r^2}{\eta}\right)}$$

Nun ist

$$\operatorname{arctg}\tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right)=\operatorname{arctg}\frac{\lambda\xi}{2ar^2-(a^2+r^2-\varrho^2)\xi}$$
$$=-\left\{\operatorname{arctg}\tau(\xi)+\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{a^2+r^2-\varrho^2}\right\}.$$

und

$\operatorname{arctg}\tau(\xi)+\operatorname{arctg}\tau(\eta)$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\lambda(2a(\xi+\eta)-2(a^2+r^2-\varrho^2))}{4a^2\left(\xi-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)\left(\eta-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)-\lambda^2}$$
$$=\operatorname{arctg}\frac{\lambda\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)}{a\left[\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+y^2-\frac{\lambda^2}{4a^2}\right]}$$

Ferner ist

$\operatorname{arctg}\tau(\xi)-\operatorname{arctg}\tau(\eta)$

$$=-\operatorname{arctg}\frac{4\lambda ay.i}{4a^2\left\{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+y^2+\frac{\lambda^2}{4a^2}\right\}}$$
$$=\tfrac{1}{2}i.\log\frac{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+\left(y-\frac{\lambda}{2a}\right)^2}{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

Es sei nun

$$\tau=\frac{\lambda}{a}\,\frac{x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}}{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+y^2-\frac{\lambda^2}{4a^2}}$$

und

$$\omega=\frac{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+\left(y-\frac{\lambda}{2a}\right)^2}{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

so wird

$$u-\alpha=k\log\frac{\cos(2\nu_1\operatorname{arctg}\tau)-\frac{1}{2}(e^{\nu_1\log\omega}+e^{-\nu_1\log\omega})}{\cos(2\nu_1(\operatorname{arctg}\tau+2\Delta))-\frac{1}{2}(e^{\nu_1\log\omega}+e^{-\nu_1\log\omega})}$$

wo

$$\nu_1=\pi:2\operatorname{arctg}m;\quad \Delta=\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{a^2+r^2-\varrho^2}$$

In der Unendlichkeit wird $\tau=0$, mithin muss, da der Cosinus gleich 1 werden soll, $\operatorname{arctg}=0$ für $\tau=0$ sein. Der Arctg wird sich also, da τ erst unendlich wird auf der Peripherie des Kreises

$\left(x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4a^2}$, eines Kreises, der sich nicht im äusseren Raume befindet, stets in dem Intervall $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ befinden. Hieraus ergeben sich auch sofort die Werte, die $\operatorname{arc\,tg} m$ und $\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2}$ anzunehmen haben.

In der Tat, u soll $= \alpha$ sein auf den beiden gegebenen Kreisen; setzt man $x^2 + y^2 = r^2$, so wird $\tau = -\frac{\lambda}{a^3 + r^2 - \varrho^2}$; die beiden Cosinuse müssen aber einander gleich werden, dies kann nur dann geschehen, wenn auch $\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2}$ sich in dem Intervalle $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ befindet.

Setzt man

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 + 2ax - a^2,$$

so wird

$$\tau = \frac{\lambda}{a^2 + \varrho^2 - r^2}.$$

Nun ist aber

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + \varrho^2 - r^2} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{r^2 + \varrho^2 - a^2}$$
$$= -\operatorname{arc\,tg} m$$

demnach muss damit in diesem Falle die beiden Cosinuse einander gleich werden $\operatorname{arc\,tg} m$ durch die obige Gleichung bestimmt sein, also ist auch $\operatorname{arc\,tg} m$ eindeutig bestimmt.

Ich gehe nun über zu der geometrischen Bedeutung der in $u - \alpha$ vorkommenden Functionen.

Es ist $\frac{\lambda}{a}$ die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise, die Entfernung des Schnittpunktes dieser Sehne mit der Centralen vom Nullpunkte ist $\frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}$, und seine Entfernung vom Mittelpunkte des zweiten Kreises $\frac{a^2 + \varrho^2 - r^2}{2a}$.

Verbindet man den Punkt xy mit den beiden Schnittpunkten der beiden Kreise, so ist der Winkel, den diese beiden Verbindungslinien miteinander bilden $\varphi = \operatorname{arctg} \tau$, wo φ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem τ positiv oder negativ ist.

Ferner sei

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2} \quad \text{und} \quad \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + \varrho^2 - r^2},$$

so sind α und β die Winkel den die Centrale mit den beiden Linien bildet, die einen der Schnittpunkte mit den beiden Mittelpunkten verbindet; sie müssen immer spitze Winkel sein und haben das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem das Argument ihres Arcus tangens positiv oder negativ ist.

Die Unstetigkeitspunkte, die die Function besitzt, können, wie man leicht besonders unter Zuhülfenahme der geometrischen Anschauung findet, niemals ausserhalb der beiden Kreise liegen, folglich ist auch die Function u selbst in dem allein zu betrachtenden Raume eindeutig und stetig. Natürlich ist hierbei der Unendlichkeitspunkt ausgenommen.

Während die Niveaucurven, also die Curven $u =$ Const bei den bisher betrachteten Functionen stets transcendente Curven sind, können bei dieser Function auch algebraische Curven auftreten, die einzige Bedingung dafür ist die, dass das Verhältniss π: arc tg m eine rationale Zahl ist. Der erste hierher gehörende Fall ist der, dass sich die beiden Kreise rechtwinklig schneiden, alsdann ist nämlich $\operatorname{arc\,tg} m = \frac{\pi}{2}$:

Zur weiteren Berechnung wende ich die Formel an bei der x und y noch nicht eingeführt ist.

Es ist in diesem Falle

$$\tau(\xi) = \frac{r\varrho}{a\xi - r^2}$$

ferner ist

$$\sin(2 \operatorname{arc\,tg} \tau(\xi)) = \frac{2\tau(\xi)}{1 + \tau^2(\xi)} = \frac{2r\varrho(a\xi - r^2)}{r^2\varrho^2 + a^2\varrho^2 - 2ar^2\xi + r^4}$$

$$= \frac{2r\varrho(a\xi - r^2)}{\{(a\xi - r^2)\xi + r^2(a - \xi)\}a}$$

da

$$a^2 = r^2 + \varrho^2 \quad \text{ist.}$$

Demnach wird

$$u - \alpha = k \log \frac{(a\xi - r^2)\,(a\eta - r^2)}{\xi\,\eta\,(\xi - a)\,(\eta - a)}$$

$$= k \log \frac{a^2\left(\left(x - \frac{r^2}{a}\right)^2 + y^2\right)}{(x^2 + y^2)\,((x - a)^2 + y^2)}$$

Ist $u = \alpha$, so wird die Gleichung der Niveaucurve:

$$a^2(x^2+y^2)-2ar^2x+r^4=(x^2+y^2)^2-2a(x^2+y^2)x+a^2(x^2+y^2)$$

also

$$((x-a)^2+y^2-(a^2-r^2))(x^2+y^2-r^2)=0.$$

Diese Gleichung stellt die beiden Kreise dar.

Man hätte übrigens auf diese Function direct auf einem äusserst leichten Wege gelangen können, wenn man sich die Aufgabe gestellt hätte, diejenige Potentialfunction zu bestimmen, deren Niveaucurven Curven vierten Grades sind, die sich jedoch für einen bestimmten Wert von u in zwei Kreise zerlegen.

§. 2.

Die stationäre elektrische Strömung in leitenden Platten.

Es seien $u = \alpha$ die Curven gleichen Potentials und $v = \beta$ die Strömungslinien, so ist das Problem analytisch ausgedrückt folgendes:

Es sind diese Functionen derartig zu bestimmen, dass sie

1) der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

genügen, dass

2) die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

stattfindet, dass

3) v constant ist auf der Grenze der Platte, und dass

4) u im Innern der Platte mit Ausnahme der Ein- und Ausströmungspunkte eindeutig und stetig ist, in diesen Punkten jedoch unendlich wird wie der Logarithmus der Entfernung.

Es sei

$$\xi=\varphi(\eta) \quad \text{oder} \quad \eta=\varphi(\xi)$$

die Gleichung der Begrenzung, so setze ich:

$$u-\alpha=\chi(\xi)+\chi(\varphi(\xi))+\chi(\eta)+\chi(\varphi(\eta))$$

dnn

$$\frac{v-\beta}{i}=\chi(\xi)+\chi(\varphi(\xi))-\chi(\eta)-\chi(\varphi(\eta)),$$

so sind die Bedingungen 1), 2); 3) erfüllt.

Um der Bedingung 4) Rechnung zu tragen, sind zunächst die Functionen $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$ zu untersuchen. Diese Functionen sind Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades die auf der Grenze der Platte übergehen müssen in η oder ξ. D. h. wenn

$$\varphi(\xi)=A+iB$$

ist, so muss auf der Grenze der Platte $A=x$ und $B=-y$ werden. Im allgemeinen wird aber dieses nur stattfinden, wenn A und B im Innern der Platte gewisse Linien nicht überschreiten. Bleiben A und B stetig, so werden sie, wenn diese Linien von ihnen überschritten sind, im allgemeinen mit einem andern Werte als dem verlangten an der Grenze ankommen, oder aber sie müssten auf diesen Linien einen Sprung machen, dessen Grösse abhängig ist von dem Orte.

Bei der Ellipse z. B. ist die Brennlinie, oder die Verbindunglinie der beiden Brennpunkte eine solche Unstetigkeitslinie.

Ist dies der Fall, so kann man die Function $\varphi(\xi)$ und also auch die obigen Formeln direct nicht anwenden. Lässt sich jedoch die Gleichnug der Begrenzung schreiben in der Form:

$$\omega(\xi)\,.\,\omega(\eta)+a(\omega(\xi)+\omega(\eta))+b=0,$$

wo ω eine rationale Function bedeutet, so kann man setzen:

$$u-\alpha=\Sigma_\lambda m_\lambda \log(\omega(\xi)-\alpha_\lambda)(\omega(\eta)-\alpha_\lambda)\times\left(\frac{b+a\,\omega(\xi)}{a+\omega(\xi)}+\alpha_\lambda\right)\left(\frac{b+a\omega(\eta)}{a+\omega(\eta)}+\alpha_\lambda\right)$$

und:

$$\frac{v-\beta}{i}=\Sigma_\lambda m_\lambda \log\frac{(\omega(\xi)-\alpha_\lambda)\left(\dfrac{b+a\omega(\xi)}{a+\omega(\xi)}+\alpha_\lambda\right)}{(\omega(\eta)-\alpha_\lambda)\left(\dfrac{b+a\omega(\eta)}{a+\omega(\eta)}+\alpha_\lambda\right)}$$

Man erkennt leicht, dass diese Functionen allen Bedingungen genügen, auch die Lage der Einströmungspunkte ist leicht zu finden. Zu bemerken ist noch, dass, wenn die Functionen in dieser Form aufgestellt werden, die Einströmungspunkte sich stets auf der X Achse befinden müssen. Sind nur zwei Unstetigkeitspunkte vorhanden, so kann man diets stes erreichen dadurch, dass man die X Achse durch sie hindurchlegt, sind jedoch mehrere vorhanden, so muss man das Problem teilen, immer zwei Einströmungspunkte nehmen und die dazu

gehörigen Functionen aufsuchen, die Summe der so erhaltenen Functionen giebt dann schliesslich die verlangte.

Lässt sich die Gleichung der Begrenzung jedoch nicht in der obigen Form darstellen, so kann man die Functionen $\varphi(\xi)$ auch dann noch benutzen, wenn die endlichen Unstetigkeiten constant sind, d. h. wenn die Differenz der beiden Werte, die A oder B auf beiden Seiten der Unstetigkeitslinie in gegenüberliegenden Punkten besitzt, stets unabhängig vom Orte ist. Die Einführung einer periodischen Function von $\varphi(\xi)$, deren Periode gleich dieser Differenz ist, genügt, um diese Unstetigkeiten zu vernichten.

Sind diese Unstetigkeiten jedoch abhängig vom Orte, so müsste man, um sie fortzuschaffen, eine Function zu bestimmen suchen, die sich nicht ändert, wenn man zu ihrem Argument die Differenz der beiden Unstetigkeitswerte addirt.

Dieses Problem greifen wir nicht direct an, sondern wir versuchen, die Unstetigkeit constant zu machen. Hierzu dient die im ersten Paragraphen entwickelte Methode. Die mit Hülfe dieser Methode gefundenen Functionen sind durch Integration bestimmt, und in der Gleichung

$$\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) = \alpha,$$

die die Gleichung der Begrenzung darstellen soll, tritt α als Integrationsconstante auf, die für einen bestimmten Wert die Gleichung der Begrenzung giebt.

Sind nun χ_1 und χ_2 eindeutige Functionen in der Art, dass sie keine Wurzelgrössen enthalten, so wird auch α eindeutig sein. Ist dies jedoch nicht der Fall, so wird α im allgemeinen ebensoviele verschiedene Werte annehmen, als diese Functionen vermöge der in ihnen auftretenden Wurzelgrössen besitzen, so dass zu jedem Wurzelwerte auch ein bestimmter von α gehört. Die Functionen χ jedoch werden im allgemeinen beim Durchlaufen der Platte in einander übergehen, es wird alsdann auch aus dem einen α ein anderes geworden sein müssen, dies ist jedoch, da α constant ist, unmöglich, wenn es nicht selbst den Sprung $\alpha_\lambda - \alpha_1$ gemacht hat. Diese Unstetigkeiten sind aber constant, und lassen sich stets fortschaffen, dadurch, dass man an Stelle von χ eine periodische Function von χ einführt mit den Perioden $\alpha_\lambda - \alpha_1$ $(\lambda = 1 \ldots n)$, wenn $\alpha_1 \ldots$ die verschiedenen Werte sind, die α annehmen kann. Es sei ω eine solche Function, so wird man zu setzen haben:

$$u - \alpha = \Sigma_\lambda m_\lambda \log\{\omega_\lambda(\chi(\xi)) \,.\, \omega_\lambda(\chi(\eta)) \,.\, \omega_\lambda(\alpha - \chi(\xi)) \,.\, \omega_\lambda(\alpha - \chi(\eta))\}$$

und

$$\frac{v-\beta}{i} = \Sigma\lambda m\lambda \log \frac{\omega\lambda(\chi(\xi)) \, . \, \omega\lambda(\alpha - \chi(\xi))}{\omega\lambda(\chi(\eta)) \, . \, \omega\lambda(\alpha - \chi(\eta))}.$$

Berücksichtigt man jedoch, dass die Functionen χ im allgemei Abelsche Integrale sein werden, also auch die Vieldeutigkeiten selben besitzen, die, da ω im Innern der Platte eindeutig sein m auch fortzuschaffen sind, so muss man dem ω auch noch diejeni Perioden erteilen, die hierzu nötig sind.

Die $\omega\lambda$ in den obigen Formeln unterscheiden sich von eina nur durch ihre Nullpunkte, es soll $\omega\lambda$ in dem Punkte $\beta\lambda$ gleich werden.

Das einfachste Beispiel, welches dazu dienen kann, das oben sagte zu erläutern, ist die Strömung durch eine elliptische Platte

Die Gleichung der Ellipse sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oder

$$(b^2 - a^2)(\xi^2 + \eta^2) + 2(b^2 + a^2)\xi . \eta - 4a^2 b^2 = 0,$$

also

$$\eta = \varphi(\xi) = \frac{1}{a^2 b^2} \cdot \{(a^2 + b^2)\xi \pm 2ab\sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}\}$$

hieraus folgt:

$$\{(b^2 - a^2)\xi + (b^2 + a^2)\eta\}d\xi + \{(b^2 - a^2)\eta + (b^2 + a^2)\xi\}d\eta = 0,$$

nun aber ist

$$(b^2 - a^2)\xi + (b^2 + a^2)\eta = \pm 2ab\sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}$$

eingesetzt, ergiebt:

$$\sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)}d\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}\,d\eta = 0,$$

demnach ist:

$$\chi(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}} = \log(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}).$$

Die Gleichung der Begrenzung ist also entweder:

$$(\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)})(\eta + \sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)}) = \alpha_1$$

oder

$$(\xi - \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)})(\eta - \sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)}) = \alpha_2.$$

Es ist α_1 und α_3 zu bestimmen.

Beide Gleichungen mit einander multiplicirt, giebt:

$$(a^2-b^2)^2 = \alpha_1 . \alpha_2,$$

beide Gleichungen zu einander addirt:

$$\xi . \eta + \sqrt{\xi^2-(a^2-b^2)} . \sqrt{\eta^2-(a^2-b^2)} = \tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$$

von einander subtrahirt:

$$\xi\sqrt{\eta^2-(a^2-b^2)} + \eta\sqrt{\xi^2-(a^2-b^2)} = \tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2),$$

diese quadrirt:

$$2\xi^2 . \eta^2-(a^2-b^2)(\xi^2+\eta^2)+2\xi\eta\sqrt{\xi^2-(a^2-b^2)} . \sqrt{\eta^2-(a^2-b^2)}$$
$$= \tfrac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)^2,$$

die Wurzel eliminirt:

$$(b^2-a^2)(\xi^2+\eta^2)+(\alpha_1+\alpha_2)\xi . \eta = \tfrac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)^2$$

Aus dieser Gleichung folgt nun:

$$\alpha_1+\alpha_2 = 2(a^2+b^2)$$

und

$$\alpha_1-\alpha_2 = \pm 4ab,$$

also ist entweder:

$$\alpha_1 = (a+b)^2$$

oder gleich $(a-b)^2$

und

$$\alpha_2 = (a-b)^2$$

oder gleich $(a+b)^2$.

Im Innern der Platte kann jedoch auch ξ in zwei verschiedenen Punkten den entgegengesetzten Wert erhalten und man kann von dem einen Punkte zu dem anderen immer auf einem Wege gelangen, auf dem die Quadratwurzel nicht null wird, auf dem sie also ihr Vorzeichen behält, mithin geht alsdann die erste Form in die zweite über, und man muss von $\log(\xi+\sqrt{\xi^2-(a^2-b^2)})$ eine Function bilden, die die Periode $2\log\frac{a+b}{a-b}$ besitzt, ferner muss diese Function aber auch noch, da der Logarithmus unendlich vieldeutig ist, die Periode $2\pi i$ erhalten, sie wird also eine elliptische Function sein mit den Perioden $2\log\frac{a+b}{a-b}$ und $2\pi i$.

Bei der Aufstellung derartiger Functionen muss man aber stets die einfachsten nehmen, ich setze demnach, wenn

$$z = \log(\xi+\sqrt{\xi^2-(a^2-b^2)})$$

ist,

$$\tau = \sin\operatorname{am}(mz, k).$$

Die beiden constanten Grössen m und k sind aus den beiden Perioden zu bestimmen.

Der Modul k ist eindeutig bestimmt durch die Jacobi'sche Grösse

$$q' = e^{-\pi \frac{K}{K'}}$$

da aber

$$4K = 2m.\log\frac{a+b}{a-b}$$

und

$$2K' = 2m\pi$$

ist, so ist

$$q' = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

und

$$m = \frac{K'}{\pi}.$$

Auch K und K' sind durch q' eindeutig bestimmt.

Es werde nun v unstetig in den Punkten $\xi = \xi\lambda$, $\eta = \eta\lambda$ und es sei

$$z(\xi) = \log(\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}) - \log(\xi\lambda + \sqrt{\xi\lambda^2 - (a^2 - b^2)}),$$

so wird die Gleichung der Begrenzung

$$z\lambda(\xi) + z\lambda(\eta)$$

$$= \log\alpha + \log.(\xi\lambda + \sqrt{\xi\lambda^2 - (a^2 - b^2)})(\eta\lambda + \sqrt{\eta\lambda^2 - (a^2 - b^2)}) = \beta\lambda$$

demnach setze ich:

$$u - \alpha = \Sigma\lambda m\lambda \log\{\sin\operatorname{am}\frac{K'}{\pi} z\lambda(\xi) \,.\, \sin\operatorname{am}\frac{K'}{\pi} z\lambda(\eta) \times$$

$$\sin\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\beta\lambda - z\lambda(\xi)) \sin\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\beta\lambda - z\lambda(\eta))\}$$

und also:

$$\frac{v-\beta}{i} = \Sigma\lambda m\lambda \log\frac{\sin\operatorname{am}\frac{K'}{\pi} z\lambda(\xi) \,.\, \sin\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\beta\lambda - z\lambda(\xi))}{\sin\operatorname{am}\frac{K'}{\pi} z\lambda(\eta) \,.\, \sin\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\beta\lambda - z\lambda(\eta))}$$

Mit Hülfe der soeben entwickelten Methode ist aber das Problem der elektrischen Strömung vollständig gelöst, wenn die Begrenzung

der Platte durch eine einzige algebraische Gleichung dargestellt werden kann.

Besteht die Begrenzung der Platte aus mehreren algebraischen Curven, so hängt das Problem ab von der Bestimmung einer im Innern der Platte stetigen und eindeutigen Function, die sich nicht ändert, wenn man an Stelle des Arguments eine durch die specielleren Bedingungen des Problems bestimmte Function setzt.

III.

Die Umkehrung des Grundgedankens von Hindenburg's combinatorischer Analysis.

(Fortsetzung).

Von

Friedrich Roth.

---

b) Die weniger gewöhnlichen Combinationen und Variationen.

(Comb. und Var. mit eingeschränkter Wiederholung und Var. zu bestimmten Summen.)

In dem ersten Abschnitte dieser Abhandlung, der auf S. 427—434 abgedruckt worden ist, hatten wir diejenigen Teile der Combinationslehre behandelt, auf die man sich in der Regel bei dem Schulunterricht beschränkt. Es bliebe noch übrig, den Grundgedanken unserer Arbeit, der sich auf dem bisher betrachteten Gebiete so fruchtbar gezeigt hat, auch auf diejenigen Zusammenstellungen gegebener Elemente anzuwenden, welche in unserer Zeit, wo die Zwecke der Schule mehr in den Vordergrund getreten sind, in den meisten Lehrbüchern — (Beckers Arithmetik bildet eine mir bekannte Ausnahme) — keine Beachtung gefunden haben, während sie im vorigen Jahrhundert wegen ihrer Anwendbarkeit auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung von den bedeutendsten Mathematikern der wiederholten Erörterung und Untersuchung für wert gehalten wurden. Dass der angebene Grund wirklich der entscheindende war, erkennt man sofort, wenn man das allgemeine für die Combinatorik als grundlegend geltende Werk, die ars conjectandi, etwas genauer ansieht. Nicht allein, dass in der Vorrede Nikolaus Bernoulli von sich sagt, dass

er zur Herausgabe des Werkes seines Oheims aufgefordert worden sei, weil man von ihm eine Schrift kannte, in welcher er die von dem letzterm ausgebildete Wissenschaft auf Rechtsfragen angewandt hatte, es ist auch der erste Abschnitt des Buches der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beim Würfelspiel gewidmet, während der zweite Teil, der die eigentliche Combinatorik enthält, nur als blosse Zutat erscheint, gleichsam als unvermeidliche Beigabe, welche die Hülfsmittel bringt, die man in dem für praktische Bedürfnisse entworfenen ersten Abschnitte gebrauchen soll. Ausserdem wissen wir von Pascal, dass er durch Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Betrachtung der Combinationen geführt worden ist. Nun wird niemand die Wichtigkeit bestreiten, welche die Variationen zu bestimmten Summen, sowie die Combinationen und Variationen mit begrenzter Wiederholung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung besitzen, und es erklärt sich daher, warum die Mathematiker früherer Zeit ihre geistige Kraft mit Vorliebe an diesem Gegenstande übten. Dagegen ist wol der Mangel an Durchbildung und wissenschaftlicher Strenge der einschlägigen Beweise und Formeln daran schuld, dass gerade dieses Gebiet bei dem Unterrichte wenig Beachtung findet. Um so mehr scheint es geboten, gerade hier den Versuch zu wagen, durch neue Auffassung bessere Ableitungen zu schaffen und allgemeine Gesichtspunkte für solche Aufgaben aufzustellen, die bis jetzt nur durch rohes Probiren und durch Ausführung in bestimmten Zahlen gelöst worden sind.

Betrachten wir zunächst die Combinationen mit eingeschränkten Wiederholungen. Hier giebt es schon eine allgemeine Formel, aber nicht für eine bestimmte Classe, sondern für die Anzahl der Complexionen durch alle Classen zusammengenommen, von der ersten aufsteigend bis zu derjenigen, welche durch die Summe allen Wiederholungsexponenten bezeichnet wird. Weingärtner*) leitet merkwürdiger Weise diese Formel gar nicht ab, sondern teilt sie ohne Beweis mit. Er entwickelt nur das Gesetz für die Anzahl der einzelnen Ordnungen, d. h. derjenigen Gruppen der Formen, die dann, wenn die Elemente alphabetisch oder umgekehrt sich folgen, mit je einem gleichen Buchstaben beginnen. Im Uebrigen verweist er auf Jac. Bernoulli. Dieser selbst aber rechnet in der ars conjectandi eigentlich nur ein Beispiel aus, indem er vier Elemente a, b, c, d annimmt und als Dimensionen — wie er treffend die höchtmöglichste Anzahl

---

*) Johann Christoph Weingärtner, Conrector in Erfurt, Lehrbuch der combinatorischen Analysis nach der Theorie des Professor Hindenburg. Leipzig, bei Gerhard Fleischer dem Jüngeren, 1800.

der Wiederholungen nennt — nur bestimmte und zwar kleine Z
wählt. Daraus folgert er ohne weiteres die allgemeine Regel.
gegen findet sich in dem Exemplar seiner Schrift, das ich au
Göttinger Universitätsbibliothek erhalten habe, eine lateinische
bemerkung, in der, allerdings auch nur für vier Elemente, ei
weis aufgestellt wird, der es mir wert zu sein scheint, dass e
Oeffentlichkeit übergeben werde. Nach einer andern Bemerkun
gleicher Tinte und gleicher Handschrift stammt er vom Jahre
könnte also nicht von Kästner herrühren, da dieser erst zw
Jahre später nach Göttingen kam. Der Beweis lautet unter
behaltung der Interpunction und der mathematischen Schreib
seines Urhebers:

Sint inveniendae coniunctiones litterar. $a^m b^r c^t d^q$. Patet
a dari coniunctiones $m+1$ quarum prima est a^0 altima a^m. H
cuivis si accedat b, dantur novae coniunctiones $m+1$, et his
si addatur aliud b, rursus novae $m+1$, et cum haec additio pr
b^r. fieri possit r vicibus, patet accedere novas coniunctiones $r \times$
Quare numerus coniunctionum $a^m b^r$ est $m+1+r\times\overline{m+1} =$
$\times \overline{r+1}$. His accedere possunt ob c^t coniunctiones $\overline{m+1} \times$
$\times\, t$ in quibus est c. Quare fit numerus coniunctionum $a^m b^r$
$\overline{m+1}\times\overline{r+1}+\overline{m+1}\times\overline{r+1}\times t=\overline{m+1}\times\overline{r+1}\times\overline{t+1}$
sic progrediendo patet accedente d^q summam coniunct. esse
$\times\overline{r+1}\times\overline{t+1}\times\overline{q+1}$.

Ein ganz allgemeiner und strenger Beweis ist meines Wi
noch nicht gefunden; und doch giebt es nichts Leichteres al
wenn man nur die Hülfsmittel benutzt, die wir im ersten Teile
Abhandlung angegeben haben,

Es seien gegeben die n Elemente $a, b, c \ldots m$, die höchste
der erlaubten Wiederholungen sei bzhw. $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$. Dann würd
Aufgabe nach Hindenburg's Ausdrucksweise heissen: Suche di
zahl der Combinationen für den Zeiger $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots : m^\mu$. Nun
wir, wenn wir die Nullionen mit rechnen und die einzelnen
plexionen durch ein Pluszeichen verbinden,

als Arten, die nur a enthalten:

$$1+a+a^2+a^3+a^4+\ldots+a^{\alpha-1}+a^\alpha,$$

als Arten, die nur b enthalten:

$$1+b+b^2+b^3+b^4+\ldots+b^{\beta-1}+b^\beta,$$

als Arten, die nur c enthalten:

$$1+c+c^2+c^3+c^4+\ldots+b^{\gamma-1}+c^\gamma$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

endlich als Arten, die nur m enthalten:

$$1+m+m^2+m^3+m^4+\ldots+m^{\mu-1}+m^\mu.$$

Mit Ausnahme der 1 soll jedes Glied aus einer dieser n wagrechten Reihen mit einem jeden beliebigen Gliede der anderen Reihen zusammengestellt werden, doch so, dass niemals mehr als ein Summand aus derselben Zeile vorkommt. Es giebt unter den durch solche Zusammenstellung entstehenden Producten auch solche, die weniger denn n Potenzen als Factoren haben. Diese multiplicire ich so oft mal mit 1, dass die Anzahl der Factoren überall n beträgt. Ordne ich dabei die Buchstaben nach dem 𝔄𝔅ℭ und füge die Einsern an der Stelle der fehlenden Elemente ein, schreibe also z. B. für ac^2m^4 das Product $a.1.c^2.1.1 \ldots 1.m^4$, so leuchtet jedem, der sich die Regeln der Multiplication vergegenwärtigt, sofort ein, dass die in der Aufgabe geforderten Combinationen weiter nichts sind als die Glieder desjenigen Polynoms, dass ich bekomme, wenn ich die oben stehenden n wagerechten Reihen mit einander multiplicire und dabei den Einzelmultiplicator immer hinter seinen Multiplicanden schreibe. Sollen jedoch die Nullionen nicht mit gezählt werden, so muss ich das 1^n wegnehmen, das durch Multiplication der n ersten unter einander stehenden Summanden entsteht. Wie früher verwandeln wir die Summe des polynomischen Hauptproductes in die Anzahl der Glieder, indem wir jede Potenz der Elemente gleich eins setzen. Dadurch aber wird die erste wagerechte Reihe zu $1+\alpha$, die zweite zu $1+\beta$ u. s. f., mithin die gesuchte Anzahl der Formen

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots(1+\mu^{-1})(1+\mu)-1,$$

wo μ^{-1} den im Alphabet vor μ vorhergehenden Buchstaben bezeichnet.

Ist bei den Combinationen, um die es sich hier handelt, und bei den entsprechenden Variationen die einzelne Classe vorgeschrieben, so hat man, so viel mir bekannt, bisjetzt zur Auffindung der Anzahl der Arten weder eine allgemeine Regel noch eine Formel. Sind die Wiederholungsgrenzen in bestimmten Zahlen gegeben, so lehrt uns Jac. Bernoulli Tabellen entwerfen, mit deren Hülfe man die gesuchte Grösse ableiten kann. Doch ist dieses Verfahren mühselig, weil man die niedrigeren und meistens auch die nächst höheren Classen mit berechnen muss. Betrachtet man dagegen die Elemente einer jeden Complexion als Factoren, so ist nach dem oben Gesagten folgendes unmittelbar klar.

Sollen die n Elemente $a, b, c \dots t$ in der angegebenen Wei zur $m$ter Classe zusammengestellt werden, so ist die Anzahl all Arten der betreffenden Variationen ausgedrückt durch die Summe d Coefficienten der polynomischen Reihe, die durch Ausrechnung von

$$(a+b+c+ \dots +s+t)^m$$

entsteht, unter Weglassung aller derjenigen Glieder, welche ein solche Potenz der ursprünglichen Summanden a, b u. s. f. enthalten deren Exponen' die zugehörige Grenze der Wiederholungen über schreitet. Die Anzahl der übrig bleibenden Glieder giebt uns zu gleich die Menge der entsprechenden Combinationen. Ist keine de Dimensionen, die für die Wiederholungen gestattes sind, kleiner al m, so bleibt die Potenz der $n$gliedrigen Summe $\overline{a+b+ \dots t}$ voll ständig, und man erhält die bekannten Formeln für die gemeine Variationen und Combinationen m. W. Man kann also die zuletz gegebene Regel als den allgemeinen Satz ansehen, unter der die un beschränkte Wiederholung als besonderer Fall g hört.

Diese Regel, welche die hier zu betrachtenden Zusammenstel lungen auf den polynomischen Lehrsatz zurückführt, bietet zunächs eine Erleichterung des Verständnisses bei der Berechnung der Anzah der Combinationen, wenn nur für ein Element die Wiederholung be schränkt ist.

Sind z. B. unter den n Elementen für t allein w, für alle an deren dagegen m Wiederholungen zulässig, wobei w kleiner als m ist so fallen in der Reihe für $(a+b+c+ \dots +t)^m$ alle diejenige Glieder weg, welche Potenzen von t^{w+1} aufsteigend bis t^m enthalten Von diesen Gliedern sind aber so viele vorhanden, als sich die übrige $\overline{n-1}$ Buchstaben zu denjenigen Classen mit Wiederholungen com biniren lassen, deren Dimensionen mit den jedesmaligen zwische $w+1$ und m liegenden Exponenten von t zusammen m ausmachen ihre Anzahl ist also unter Benutzung von 4): *)

---

*) Anmerkung. Leider ist in dem ersten Teile meiner Abhandlung au der linken Seite dieser Gleichung ein Druckfehler übersehen worden. Es steh dort ${}^{w}\underset{m}{C}(r)$, wofür selbstverständlich ${}^{w}\underset{m}{C}(n)$ zu setzen ist. Will man übrigen Gleichung 4) mit dem von Bernh. Euler gefundenen Satze, für die ich a jener Stelle auf Baltzer's Elemente verwiesen habe, in Vergleichung bringen so setze man $n+m-r-1=p$, dann lautet sie:

$$ {}^{w}\underset{0}{C}(n-1) + {}^{w}\underset{1}{C}(n-1) + {}^{w}\underset{2}{C}(n-1) + \ldots + {}^{w}\underset{m-w-2}{C}(n-1)) + {}^{w}\underset{m-w-1}{C}(n-1) $$
$$ = {}^{w}\underset{m-w-1}{C}(n). $$

Für das in der Aufgabe Gesuchte ergiebt sich mithin

$$ 7) \qquad {}^{w}\underset{m}{C}(n) - {}^{w}\underset{m-w-1}{C}(n) = \binom{m+n-1}{m} - \binom{m+n-w-2}{m-w-1} $$

Der Vorteil, den diese Formel gewährt, tritt besonders dann hervor, wenn die Classenzahl sehr gross ist. Man versuche z. B. die Anzahl der Combinationen zur 100. Classe für die Zeiger $a^{100}\,b^{100}\,c^{94}$ mit Hülfe der Bernoulli'schen Tabelle zu berechnen, und man wird bald ermüdet den Arm sinken lassen, während sie nach unserer Vorschrift einfach wird

$$ {}^{w}\underset{100}{C}(3) - {}^{w}\underset{5}{C}(3) = \binom{102}{100} - \binom{7}{5} = 5151 - 21 = 5130. $$

Sollen die Combinationen so ausgeführt werden, dass bei einem Teile der Elemente die Wiederholungen unbeschränkt, bei den andern dagegen vorgeschrieben sind, dergestalt, dass bei diesen nur eine bestimmte Menge gleicher Elemente vorkommen darf, nicht mehr und nicht weniger, so haben wir eine leichte Aufgabe vor uns. Sollen z. B. in der $m$ten Classe von den $k$ten Elementen $a, b \ldots e$ das erste, a nur α mal, b nur β mal u. s. f. zuletzt e nur ε mal gesetzt werden, während die andern von den gegebenen n Elementen beliebig oft mal wiederholt werden dürfen, so sind so viel Arten vorhanden, als diese übrigen $n-k$ Elemente zur $\overline{m-\alpha-\beta-\ldots-\varepsilon}$ ten Classe m. W. combinirt werden können.

Bei den entsprechenden Variationen entwickele man die $m$te Potenz der $n$gliedrigen Summe $a+b+c+\ldots+t$ in der Weise, dass man diejenigen Elemente, deren Wiederholung vorgeschrieben ist, einzeln nimmt, während man die übrigen $\overline{n-k}$ aber zu einem einzigen Summanden zusammenfasst. D. h. man rechne $(a+b+\ldots+e+\overline{f+g+\ldots+s+t})^m$ nach dem polynomischen Satze für die Glieder $a, b \ldots e$ und $(f+g+\ldots+t)$ aus. Dann enthält dasjenige Glied der

---

$$ \binom{p+1}{m} = \binom{p}{m} + \binom{p-1}{m-1}\binom{r}{1} + \binom{p-2}{m-2}\binom{r+1}{2} + \ldots $$
$$ + \binom{p-k}{m-k}\binom{r+k-1}{k} + \ldots + \binom{p-\overline{m-1}}{1}\binom{r+m-2}{m-1} $$
$$ + \binom{r+m-1}{m} $$

entstehenden Reihe, in welchem die Potenzen $a^{\alpha} b^{\beta} \dots e^{\varepsilon}$ vorkomme die gesuchten Variationen. Ihre Anzahl wird gefunden', indem m unter Beibehaltung des Coefficienten für jeden Buchstaben 1 set Dies giebt, da dann $f+g+\dots+t$ gleich $n-k$ wird

$$8) \qquad \frac{m!(n-k)^{m-\alpha-\beta-\dots\varepsilon}}{\alpha!\beta!\dots\varepsilon!(m-\alpha-\beta-\dots-\varepsilon)!}.$$

Eine Gruppe von Elementen, die in jeder Art vorhanden sei soll, bezeichnete man früher als den Kopf der Combination (capu combinationis), es würde daher nach dieser Ausdrucksweise die vo uns gelöste Aufgabe heissen: Suche die Anzahl der Formen für di Combin. und Var. m. W., die alle den Combinationskopf $a^{\alpha} b^{\beta} \dots$ enthalten. Für die Combinationen ohne W. hat schon Weingärtn in dem oben ‚angeführten Buche eine Lösung dieser Aufgabe a S. 264—5 mitgeteilt.

Mit Hülfe der Formel (8) sind wir nun im Stande, auf bequem Weise die Anzahl der Variationen mit eingeschränkten Wiederholunge zu berechnen, wenn, wie wir bei den entsprechenden Combinatione angenommen hatten, nur für ein Element eine von der Classenzal verschiedene Dimension der Wiederholungen gegeben ist. Wen nämlich, wie oben, die n Elemente $a, b, c \dots t$ in der $m$ten Class jedes $m$mal, t allein aber nur $w$mal vorkommen darf, so hätten w in der Potenz $(a+b+c+\dots+t)^m$, da wir nach dem binomische Lehrsatze für die beiden Summanden $\overline{a+b+\dots s}$ und t entwickel nur diejenigen Glieder wegzunehmen, welche t in einer höhern a $w$ten Potenz enthalten, und dann unter Beibehaltung der Coeffic enten für jeden der Buchstaben $a, b \dots t$ eins zu setzen. Ist t^r ei solche Potenz, r mithin eine ganze Zahl zwischen w und m, so gie uns Formel (8) den durch Auslassung von t wegfallenden Summa den, indem wir r für α oder β u. s. f. schreiben und die übrige der k Grössen $\alpha, \beta \dots \varepsilon$ null werden lassen. Das Gesuchte ist dana

$$\frac{m!(n-1)^{m-r}.1^r}{r!(m-r)!} = \binom{m}{m-r}(n-1)^{m-r}.$$

Die Anzahl der Variationen für den Zeiger $a^{100} b^{100} c^{96}$ in der hu dersten Classe würde sich demnach bestimmen als

$$(2+1)^{100} - \left(1+\frac{100}{1}2^1+\frac{100\,.\,99}{1\,.\,2}2^2+\frac{100\,.\,99\,.\,98}{1\,.\,2\,.\,3}2^3\right)$$
$$= 3^{100} - (1+200+19800+1293600) = 3^{100} - 1313601,$$

ein Ausdruck, der mit Hülfe der Logarithmen weiter auszurechn wäre.

Ist dagegen m gleich 6 und der Zeiger $a^6 b^6 c^6 d$, so erhielten wir für die Anzahl der Complexionen

$$\overline{3+1}^6 - \left[1 + \binom{6}{1}3^1 + \binom{6}{2}3^2 + \binom{6}{3}3^3 + \binom{6}{4}3^4\right]$$
$$= 4096 - (1 + 18 + 135 + 540 + 1215)$$
$$4096 - 1909 = 2187 = 3^7.$$

Bleibt die Classe dieselbe, aber der Zeiger wird $a^6 b^6 d$, so ändert sich in der letzten Gleichung nur n, und man bekommt

$$3^6 - \left[1 + \frac{6}{1}2^1 + \frac{6.5}{1.5}2^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}2^3 + \frac{6.5}{1.2}2^4\right]$$
$$= 729 - (1 + 12 + 60 + 160 + 240) = 729 - 473 = 256 = 2^8.$$

Wie wir schon in der Einleitung zu diesem Abschnitte angedeutet haben, war eine der bekanntesten Aufgaben, an der manche bedeutende Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts ihre Kräfte versucht haben, die, zu bestimmen, wie viel Fälle möglich sind, in denen mit einer gewissen Anzahl von Würfeln eine verlangte Summe von Augen geworfen werden kann. Diese Aufgabe, die Jac. Bernoulli durch Entwerfung einer Tafel gelöst hat, in der er das Gesuchte, schrittweise zu einer immer grösseren Menge von Würfeln fortschreitend, durch Zusammenzählen einer Reihe lotrecht unter einander stehender Zahlen berechnet, führte zu der Behandlung der Variationen zu gegebenen Summen. Die Anzahl der Formen in jeder einzelnen Classe hiefür durch eine allgemeine Formel auszudrücken, gelang erst Hindenburg. Seine Ableitung ist nach Weingärtner die, dass er die erste Zahl der Complexion von 1 an wachsen lässt so hoch als möglich und jedesmal die Möglichkeit der Variationen den übrig bleibenden Elemente untersucht. Indem er dieses Verfahren für die ersten Classen, von der ersten aufsteigend bis zur vierten durchführt, ergeben sich figurirte Zahlen, deren Eigenschaften er ohne weiteres verallgemeinert, ohne den Euler'schen Schluss von m auf $m+1$ zu machen. Abgesehen von dem Mangel an wissenschaftlicher Strenge und von seiner Weitläufigkeit hat dieser Beweis noch den Nachteil, dass man nicht recht einsieht, wo eigentlich die Binomialcoefficienten herkommen bei einer Weise der Zusammenstellungen, die doch scheinbar mit den Combinationen ohne W. nichts zu tun haben. Sein Urheber ahnte nicht, dass in dem Grundgedanken seiner combinatorischen Analysis, nämlich darin, dass man die Elemente in den Formen der Combinationen m. W. als Factoren betrachtet, eine viel ein-

fachere und ganz allgemeine Ableitung des fraglichen Satzes
borgen liegt.

Aufgabe. Wie gross ist die Anzahl der Arten der Varia
m. W. in der $m$ten Classe zur Summe n?

Auflösung. Ich schreibe m Buchstaben: $a, b, c \ldots t$
in derselben Reihe hin nnd setze die zu variirenden Ziffern a
ponenten derselben, so erhalte ich die Abkürzungen für die C
nationen m. W. der m Elemente a, b, c u. s. f. zur $m$ten
jedoch nicht vollständig, da kein Buchstabe verschwinden darf.
dann würde eine jener Ziffern null werden, was nach dem B
der geforderten Variationen nicht erlaubt ist. So würden w
dem in Stahl's *) Grundriss der Combinationslehre auf S. 16
geführten Beispiele schreiben

in der ersten		Form statt	1117	$a^1 b^1 c^1 d^7$
„	22.	„	1441	$a^1 b^4 c^4 d^1$,
„	43.	„	2341	$a^2 b^3 c^4 d^1$,
„	64.	„	3511	$a^3 c^5 c^4 d^1$.

Sondere ich nun in dem allgemeinen Falle aus jeder Complexio
m Factoren enthaltende Product $a.b.c \ldots t$ als Coefficient ab,
der übrig bleibende Factor von der $\overline{n-m}$ten Dimension, und
in ihm der Wiederholung der Elemente nach keiner Seite hi
Beschränkung auferlegt. Er ist also die Abkürzung für je ei
der gemeinen Combinationen mit Wiederholungen von m Elem
zur $\overline{n-m}$ten Classe, mithin bezeichnet durch die Formel

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+\overline{n-m}-1)}{1.2.3.4\ldots(n-m-1)(n-m)},$$

wofür man bekanntlich auch schreiben kann

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-2)(n-1)}{1.2.3\ldots(m-3)(m-2)(m-1)}.$$

In dem letzten Bruche brauchen wir nur den Zähler rückwä
lesen, um darin sofort den Hindenburg'schen Ausdruck zu erh

9) $$\frac{{}^nM}{(1,2,3,4\ldots)} = \binom{n-1}{m-1}.$$

*) Stahl, Conr. Dietrich Martin, Professor in Jena, Grundr
Combinationslehre nebst Anwendung derselben auf die Analysis. Je
Leipzig 1800. Herrn Wolfgang Göthe gewidmet.

der für die **Variationen m. W. in der** m**ten Classe zur Summe** n **gültig ist.** Dabei haben wir nur die ältere Bezeichnung der Binomialcoefficienten in die jetzt übliche umgeändert.

Unsere Ableitung hat ausser dem Vorzuge der Kürze noch den, dass wir durch sie wiederum, wie es oben bei den gemeinen Combinationen mit und denen ohne Wiederholungen der Fall war, die verschiedenen Teile des von uns betrachteten Gebietes der Mathematik unter einen Gesichtspunkt vereinigen und so für Lehrer und Lernende die Arbeit bedeutend verringern. Die Variationen zu bestimmten Summen brauchen jetzt nicht mehr abgesondert und in gleicher Betonung mit den andern Zusammenstellungen behandelt, sondern nur anhangsweise als Beispiel bei den Combinationen m. W. betrachtet zu werden.

Ausserdem bietet der Gedankengang unseres Beweises von selbst die Lösung der Aufgabe, die Zahl der Variationen zu bestimmten Summen dann zu finden, wenn der Wert der Elemente nicht unter eine gewisse Ziffer heruntergehen soll. Denn, ist diese k, und setzen wir wiederum die Ziffernelemente als Exponenten der m Buchstaben $a, b, c \ldots t$, so können wir jetzt aus allen Producten der Potenzen den Coefficienten $a^k b^k c^k \ldots t^k$ absondern, sodass die Dimension der nach der Absonderung bleibenden Producte $n - km$ wird. Es sind deren also so viele vorhanden, als sich m Grössen zur $\overline{n - km}$ten Classe mit unbeschränkten Wiederholungen combiniren lassen. Nun ist nach dem schon vorhin erwähnten Satze

$$\underset{n-km}{{}^wC(m)} = \underset{m-1}{{}^wC(n-km+1)} = \binom{\overline{n-km+1}+\overline{m-2}}{m-1},$$

folglich nach vollzogener Vereinfachung

$$10)\qquad \underset{(k,\,k+1,\,k+2\,\ldots)}{{}^nM} = \binom{n-1-m(k-1)}{m-1},$$

eine Gleichung, die sich bei $k = 1$ in (9) verwandelt.

Zählen wir in den hier betrachteten Zusammenstellungen diejenigen Complexionen, in denen dieselben Elemente, aber in anderer Reihenfolge vorkommen, immer nur einmal, so erhalten wir die Combinationen zu bestimmten Summen. Setze ich wieder die Ziffernelemente als Exponenten von Potenzen, deren Grundzahlen m Buchstaben sind, die in gewisser Anordnung hinter einander stehen, so würde es jetzt gleichgültig sein, welchen der Buchstaben bestimmte Exponenten zukommen, wenn diese letzteren überhaupt nur in einer gewissen Auswahl vorhanden sind. So würde z. B. bei den

Combinationen der 4. Classe zur Summe 10 die Formen a
a^2b^6cd, abc^2d^6 u. a. nur als eine gerechnet werden. Setzen wi
im allgemeinen Falle aus der durch die Potenzen der Buchsta
b ... t gebildeten Producten, die wir uns durch ein Pluszeiche
bunden denken, $abc \ldots t$ (im eben besprochenen Beispiele
heraus, so leuchtet ein, dass die in der Klammer befindlichen
manden weiter nichts sind als die Gattungen der gemeinen C
nationen m. W. von m Elementen zur $\overline{n-m}$ten Classe, und da
Anzahl gleich ist der gesuchten Anzahl der Combinationen zur S
n in der $m$ten Classe. Denn die Gattung (genus) umfasst ja
alle solche Arten der Combinationen, in denen zwar versch
Elemente, aber mit denselben Verhältnissen der Wiederholunge
kommen. D. h. bei 3 Elementen in der 4. Classe würden a^3
ab^3, ac^3, b^3c, bc^3 nur eine Gattung der gemeinen Combinatio
W. bilden. Eine allgemeine Formel für die Combinationen
stimmten Summen ergiebt sich hieraus nicht; doch kann ma
umgekehrt die für letztere von Euler entworfenen Tabellen da
nutzen, um die Anzahl der Gattungen einer jeden Classe b
Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung zu finden, wen
nur die oben dargelegten Beziehungen zwischen Classe, Anzal
Elemente und Summen, wie sie unter den beiden Combination
bestehen, zu benutzen gelernt hat.

So bedeutend der Fortschritt auch war, der durch die A
lung der Formel für die Variationen zu bestimmten Summen g
wurde, so genügt er doch noch nicht, um die Aufgabe vom W
spiel, die ich oben als die Veranlassung zu den Untersuchunge
diese Art der Zusammenstellungen gemacht hatte, vollständig zu
Denn dieser Formel liegt die Annahme zu Grunde, dass die Z
die zusammen gleich der verlangten Summe sind, den höchstmög
Wert annehmen können, den überhaupt die gegebene Clas
stattet. Bei den Würfeln dürfen dieselben aber nicht über 6 h
gehen. Auch dann, wenn man mehrstellige Zahlen sucht,
Quersumme eine gewisse Grösse haben soll, kann man den H
burg'schen Ausdruck nur dann brauchen, wenn durch diese C
und die Exponenten der Classe die Möglichkeit ausgeschlossen
dass eine Ziffer über 9 hinaus wächst. Unter Benutzung de
wandlungen, welche den wichtigsten Teil unserer letzten Ent
lungen ausmachten, würde man hingegen die endgültige Lösung
Aufgaben erreicht haben, wenn es gelänge, eine Regel darübe
zufinden, wieviel Complexionen bei den Combinationen
gleichmässig beschränkten Wiederholungen in jed
liebigen Classe möglich sind. Diesem Ziele führt uns aber der
ganzen Arbeit zu grunde liegende Gedanke um einige Schritte

Wie im ersten Abschnitte behufs Ableitung der Gleichung 5) entwickeln wir auch jetzt die $m$te Potenz desselben n gliedrigen Polynoms nach dem binomischen Lehrsatze für die beiden Summanden $\overline{a+b+\ldots s}$ und t. Von den $m+1$ Gliedern der entstehenden binomischen Reihe können wir nun aber, wenn er die Grenze der erlaubten Wiederholungen bezeichnet, nur diejenigen brauchen, die solche Potenzen von t enthalten, deren Exponenten zwischen 0 und r liegen. Die fallenden Potenzen des ersten $\overline{n-1}$ gliedrigen Summanden würden bei einer vollständigen Reihe mit dem Exponenten m beginnen, nach der jetzigen Voraussetzung können sie aber im günstigsten Falle erst bei $(a+b+\ldots+s)^{(n-1)r}$ anfangen, und sie müssen, da ihre Exponenten sich mit denen von t zu m ergänzen, mit der $\overline{m-r}$ten Potenz abschliessen. Ist daher $m<(n-1)r$, so besteht die brauchbare Reihe aus $r+1$ Gliedern, von $(a+b+\ldots+s)^m$ bis $(a+b+\ldots+s)^{m-r}.t^r$ ist aber m grösser als $(m-1)r$, so hat sie, da die ersten Glieder wegfallen, eine geringere Ausdehnung nur bei $m=nr$, endlich ist nur eine Stelle brauchbar, nämlich die letzte, weil alle vorhergehenden solche Potenzen des $\overline{n-1}$ gliedrigen ersten Summanden enthalten, deren Exponenten über $(n-1)r$ steigen. Erlauben wir uns nun, damit unsere Darstellung nicht gar zu schleppend wird, für die Anzahl der Combinationen von x Elementen zur $k$ten Classe, wenn jedes der letzteren höchstens r mal vorkommen darf, dass Zeichen ${}^rC_k(x)$ einzuführen, so würden unsere Schlüsse unter Anwendung der in dieser Abhandlung zur Genüge erörterten Sätze zu der Folgerung führen:

$$
11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\text{Wenn } m>\overline{n-1}.r,\quad {}^rC_m(n) = {}^rC_{m-r}(n-1)+{}^rC_{m-r+1}(n-1)+\ldots\\
&\qquad +{}^rC_{(n-1)r-1}(n=1)+{}^rC_{(n-1)s}(n-1 = \Sigma^r C_{m-r \text{ bis } (n-1)r}(n-1),\\
&\quad ,,\quad m<\overline{n-1}.r,\qquad = {}^rC_{m-r}(n-1)+{}^rC_{m-r+1}(n-1)+\ldots,\\
&\qquad +{}^rC_{m-1}(n-1)+{}^rC_m(n-1) = \Sigma^r C_{m-r \text{ bis } m}(n-1).
\end{aligned}
\right.
$$

Dieser Satz führt also die zu lösende Aufgabe auf dieselbe Aufgabe, aber mit einer um eins geringeren Zahl der Elemente zurück. Er giebt uns dadurch den Fingerzeig, von der niedrigsten Zahl der letzteren auszugehen und stufenweise fortschreitend zu den höhern aufzusteigen. Dass für ein Element in jeder Classe, wenn m gleich r, nur eine Complexion möglich ist, bedarf keiner Erwähnung. Sind zwei zu combinirende Grössen a und b gegeben, so sind die brauchbaren Arten, in Potenzform ausgedrückt, folgende:

$$a^r b^{m-r},\quad a^{r-1}b^{m-r+1},\quad a^{r-2}b^{m-r+2},\ \ldots\ a^{m-r+1}b^{r-1},\quad a^{m-r}b^r.$$

Verbinden wir diese Complexionen durch das Pluszeichen, so können wir aus der dadurch entstehenden algebraischen Summe den Factor $a^{m-r}b^{m-r}$ heraussetzen; der Exponent des ersten, die Reihe in der Klammer beginnenden a wird dann $r-(m-r)$, d. i. $2r-m$, und da die Exponenten der folgenden a immer um eins fallen, die von b dagegen in derselben Weise steigen bis zu b^{2r-m}, so leuchtet ein, dass die Klammer diejenigen Einzelproducte enthält, welche — abgesehen von den Coefficienten — die Glieder des durch Ausrechnung von $(a+b)^{2r-m}$ sich ergebenden Polynomes bilden. Die Anzahl dieser Glieder ist aber bestimmt durch ${}^{w}\underset{2r-m}{C}(2)$, folglich haben wir unter Anwendung der oben von uns angenommenen Bezeichnungsweise:

$$12)\qquad {}^{r}\underset{m}{C}(2) = {}^{w}\underset{2r-m}{C}(2) = {}^{w}\underset{1}{C}(2r-m+1) = 2r-m+1.$$

Ist r kleiner als $\frac{1}{2}m$, m also grösser als $2r$, so ist gar keine Combination von der geforderten Eigenschaft möglich.

Gehen wir zu drei Elementen über, so lehrt uns Gleichung 11) dass wir den Fall, wo $m > 2r$, unterscheiden müssen von dem, w m unter diesen Wert herabsinkt. Nehmen wir zunächst den erst Fall und setzen m gleich $2r+x$, wo x eine ganze positive Zahl b deutet, die kleiner als r oder ihm gleich ist. Dann ist das Gesuc nach dem ersten Teile von 11) eine Reihe, welche anfängt mit ${}^{r}\underset{r+}{C}($ und aufhört bei ${}^{r}\underset{2r}{C}(2)$, während die Ausdehnung (dimensio) der Clas immer um eins steigt. Nun ist der erstere Ausdruck nach der letzt Gleichung gleich der Anzahl der Combinationen mit unbeschr. Wi derholung von 2 Elementen zur $(2r-\overline{r+x})$ten, die zur $\overline{r-x}$t Classe, und das letzte Glied der Reihe wird nach demselben Sat zu ${}^{w}\underset{0}{C}(2)$, während für die dazwischen liegenden Stellen in der en sprechenden ebenfalls aus (12) abgeleiteten Formel die Classe imm um eins niedriger wird. Lesen wir die Reihe umgekehrt, setzen f x seinen Wert $m-2r$ ein, wodurch sich $r-x$ in $3r-m$ verwande so erhalten wir unter Benutzung von (4) oder (5):

$$13\text{a})\quad \text{Wenn } m \geqq 2r,\quad {}^{r}\underset{2r}{C}(3) = 1 + {}^{w}\underset{1}{C}(2) + {}^{w}\underset{2}{C}(2) + {}^{w}\underset{3}{C}(2) + \ldots$$
$$+ {}^{w}\underset{3r-m-1}{C}(2) + {}^{w}\underset{3r-m}{C}(2) = {}^{w}\underset{3r-m}{C}(3).$$

Ist dagegen der Classenexponent m kleiner als $2r$, so setze m

zunächst m gleich $2r-q$ und entwickele nach dem binomischen Lehrsatze die Potenz $(\overline{a+b}+c)^m$ für die beiden Summanden $\overline{a+b}$ und c. Die für uns brauchbaren Glieder sind dadurch bestimmt, dass der Exponent von c nur bis r steigen kann, sie sind also

$$(a+b)^{2r-q}+(a+b)^{2r-q-1}c^1+\ldots+(a+b)^r c^{r-q}+(a+b)^{r-1}c^{r-q+1}+\ldots$$
$$+(a+b)^{r-q+1}c^{r-1}+(a+b)^{r-q}c^r.$$

In dieser Reihe liegt eine Grenzscheide bei $(a+b)^r$. Denn, während bei den folgenden niedrigeren Potenzen von $a+b$ nur von unbeschränkter Wiederholung der Summanden a und c die Rede sein kann, fallen die vorhergehenden unter Formel (12). Das dritte Element c kann, weil seine Potenzen immer nur eine Stelle geben, keinen Einfluss auf die Anzahl der Complexionen ausüben, die jedem einzelnen Gliede obiger Binomialreihe zukommen. Da nun $2r-q$ gleich m ist, so beträgt nach 12)

bei $(a+b)^{2r-q}$ die Anzahl der braucharen Formen ${}^{w}\underset{2r-m}{C}(2)$,

" $(a+b)^{2r-q-1}$ " " " " " ${}^{w}\underset{2r-m+1}{C}(2)$,

⋮ ⋮ ⋮

zuletzt bei

$(a+b)^r$ " " " " " ${}^{w}\underset{r}{C}(2)$.

Bilden wir die Summe und zählen zu ihr $\underset{0 \text{ bis } 2r-m-1}{\Sigma}{}^{w}C(2)$ einmal positiv und einmal negativ hinzu und verwandeln die dadurch gebildeten Reihen nach 4), so erhalten wir für die Gesamtzahl aller hier in Betracht kommenden Combinationen

(I) $$\underset{0 \text{ bis } r}{\Sigma}{}^{w}C(2)-\underset{0 \text{ bis } 2r-m-1}{\Sigma}{}^{w}C(2)={}^{w}\underset{r}{C}(3)-{}^{w}\underset{2r-m-1}{C}(3).$$

Wir haben nun in obiger Binomialreihe noch diejenigen Potenzen zu betrachten, deren Exponenten unter r herabgehen. Hierbei ist die Gesamtzahl der Complexionen leicht zu bestimmen als eine Reihe, die mit ${}^{w}\underset{r-q}{C}(2)$ beginnt und bei ${}^{w}\underset{r-1}{C}(2)$ abschliesst. Zu dieser zähle ich wiederum eine mit 1 beginnende und mit ${}^{w}\underset{r-q-1}{C}(2)$ aufhörende gleichartige Reihe einmal positiv und einmal negativ hinzu, setze für q seinen Wert $2r-m$ ein, schreibe demgemäss für $r-q-1$ das gleiche $m-r-1$ und wende 4) an, so kommt

(II) $$\underset{0 \text{ bis } r-1}{\Sigma}{}^{w}C(2)-\underset{0 \text{ bis } m-r-1}{\Sigma}{}^{w}C(2)={}^{w}\underset{r-1}{C}(3)-{}^{w}\underset{m-r-1}{C}(3).$$

Bevor wir nun (I) und (II) zusammen nehmen, machen wir von der schon auf S. 90 zur Ableitung von 9) benutzten Umwandlung Gebrauch, so dass wir haben:

$$\text{Wenn } 2r \geqq m > r, \quad {}^{r}\underset{m}{C}(3) = {}^{w}\underset{2}{C}(r+1) + {}^{w}\underset{2}{C}(r) - {}^{w}\underset{2}{C}(2r-m) - {}^{w}\underset{2}{C}(m-r).$$

Die beiden ersten Summanden lassen sich noch durch Zusammenziehen vereinfachen, indem man die bekannten Werte für sie einführt, dann $r+1$ heraussetzt und seine Coefficienten $2r+2$ durch 2 hebt. Dann gestaltet sich das Gesuchte zu:

$$\text{13b)} \quad \text{Wenn } 2r \geqq m > r, \quad {}^{r}\underset{m}{C}(3) = (r+1)^2 - {}^{w}\underset{2}{C}(2r-m) - {}^{w}\underset{2}{C}(m-r).$$

Solange nicht mehr als drei Elemente gegeben sind, können wir jede Aufgabe über die Combinationen mit gleichmässig beschränkter Wiederholung lösen. Will ich z. B. wissen, wie oft mal mit 3 Würfeln 13 Augen geworfen werden können, so betrachte ich die Würfel als Stellen einer Variation m. W. zur Summe 13. Denke ich mir nun die zu summirenden Ziffern einzeln als Exponenten von a, b und c, so verwandle ich durch Absonderung des Factors abc die Aufgabe in die andere: Wie oft mal lassen sich 3 Elemente zur 10. Classe combiniren, wenn jedes nur 5 mal vorkommen darf? Gleichung 13a) gibt uns darauf die Antwort:

$${}^{w}\underset{2.5-5}{C}(3) = {}^{w}\underset{5}{C}(3) = {}^{w}\underset{2}{C}(6) = \frac{6.7}{1.2} = 21.$$

Ebenso nach 13b):

$$(5+1)^2 - {}^{w}\underset{2}{C}(0) - {}^{w}\underset{2}{C}(5) = 36 - 0 - \frac{5.6}{1.2} = 21.$$

Wie man sieht, gelten beide Formeln 13a) und b). Es muss dies auch so sein, da nach unsern Annahmen nichts im Wege steht, x sowol als y null werden zu lassen.

Sollen mit derselben Würfelzahl 12 Augen geworfen werden, so erhalte ich die Lösung:

$${}^{5}\underset{9}{C}(3) = 6^2 - {}^{w}\underset{2}{C}(1) - {}^{w}\underset{2}{C}(4) = 36 - \frac{1.2}{1.2} - \frac{4.5}{1.2} = 25.$$

Diese Ergebnisse stehen in Uebereinstimmung mit der erwähnten Bernoulli'schen Tabelle, das letzte auch mit Beckers Arithmetik, 2. Buch, § 29 Beispiel 2. Doch besitzt unsere Formel den Vorzug der Allgemeinheit, während jene Tafel für jede andere Wiederholungsgrenze neu entworfen werden muss, und in dem letztern Buche die Variationen wirklich ausgeführt werden. Der Vorteil, den der von uns vorgeschagene Weg bietet, tritt besonders dann hervor, wenn die gegebenen Grössen sehr grosse Zahlen sind. Würden wir z. B. die Frage zu beantworten haben, auf wieviel verschiedene Weisen man 1000 Mark so unter 3 Personen verteilen könne, dass jede nicht weniger als 100, aber nicht mehr als 600 M. erhielte, so würde für Entwerfung jener Tabelle das Papier und das Auge nicht ausreichen. Denn man hätte 501 Einsen neben einander zu schreiben, dann diese Reihe, indem man immer eine Stelle nach rechts rückt, noch 500 mal darunter zu setzen, um die Summe zu bilden. Wenn man dies nun auch durch die aufsteigenden und nieder fallenden natürlichen Zahlen ersetzen würde, so hätte man immer noch die entstehenden 1001 Ziffern 501 mal schief unter einander zu schreiben und die lotrechten Reihen zusammenzuzählen. Wir dagegen denken uns die drei Anteile als Exponenten der Buchstaben a, b und c, sondern $a^{100}b^{100}c^{100}$ überall als Factor ab und können so die gesuchte Anzahl der möglichen Fälle ausdrücken durch 13b). Es ist $r = 500$, $m = 700$, m also kleiner als $2r$. Danach ergiebt sich als Lösung:

$$\underset{700}{{}^{500}C}(3) = 501^2 - \underset{2}{{}^{w}C}(300) - \underset{2}{{}^{w}C}(200) = 251001 - 45150 - 20100$$
$$= 185751.$$

Wenn wir nun die Zahl der Elemente von 3 an immer um eins steigen liessen, so würde uns die Gleichung 11) die Mittel an die Hand geben, die betreffende Formel für jede Zahl der Elemente und bei jeder beliebigen Classe abzuleiten. Doch würde uns das zu weit führen. Wir beschränken uns darauf zu zeigen, wie durch die Anwendung des Grundgedankens dieser Abhandlung noch eine einfache Beziehung und die Verallgemeinerung zweier schon für engere Grenzen entwickelten Sätze aufgefunden werden können.

Man denke sich nämlich alle Formen der Combinationen der n Buchstaben a, b, c ... t, von denen ein jeder nur r mal gesetzt werden darf, in der $m$ten Classe wirklich ausgeführt, betrachte die Elemente als Factoren und teile mit einer jeden Complexion der Reihe nach in $a^r b^r c^r \ldots t^r$: dann geben die Quotienten die verschiedenen Formen der gleichartigen Zusammenstellungen in der $\overline{nr - m}$ten Classe. Und zwar sind diese letzteren vollständig vorhanden. Denn jeder $x$ten Dimension eines Elementes in den ursprünglichen Combi-

nationen entspricht immer eine $\overline{r-x}$te Dimension desselben Buchstabens in den Quotienten. Wenn x von 0 bis r steigt, fällt $r-x$ von r bis 0. Nun entstehen soviele Quotienten, als Divisoren da sind, mithin ist

$$ {}^{r}\underset{m}{C}(n) = {}^{r}\underset{nr-m}{C}(n), $$

oder in Worten ausgedrückt: Es sind immer gleichviel Arten in je zwei solchen Classen vorhanden, deren Dimensionen gleich weit von 0 und von nr abstehen.

Ist nun m grösser als $(n-1)r$ oder ihm gleich, so ist $nr-m$ kleiner als r oder ihm gleich; die Combinationen zur $\overline{nr-m}$ten Classe haben also dann, auch wenn jedes Element höchstens r mal vorkommen darf, unbeschränkte Wiederholung, folglich nach der letzten Gleichung:

14) Wenn $m > (n-1)r$, ${}^{r}\underset{m}{C}(n) = {}^{w}\underset{nr-m}{C}(n)$,

eine Verallgemeinerung und Bestätigung von 12) und 13a).

Wenden wir dies auf die öfters erwähnte Aufgabe vom Würfelspiel an und fragen: „Wieviel Fälle sind möglich, dass man mit 6 Würfeln 32 Augen werfe", so wäre bei den ensprechenden Combinationen mit gleichmässig beschr. W. $r=5$, $n=6$, $nr=30$, $m = 32-6.1 = 26 (> 5.5)$, mithin das Gesuchte

$$ {}^{5}\underset{26}{C}(6) = {}^{w}\underset{4}{C}(6) = \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} = 126. $$

Dasselbe kommt heraus, wenn m gleich 4 ist, oder wenn $6+4$, d. i. 10 Augen geworfen werden sollen, Ergebnisse, die durch die Bernoulli'sche Tafel bestätigt werden.

Denke ich mir 5 regelmässige Dodekaeder und bei einem jeden auf den 12 Seitenflächen der Reihe nach 1, 2, 3 u. s. f. bis 12 Punkte eingravirt, so finde ich für die Anzahl der Fälle, in denen die oben auf liegenden Flächen zusammen 50 Augen zeigen, unter Berechnung der von uns gegebenen Vorschriften

$$ {}^{11}\underset{45}{C}(5) = {}^{w}\underset{10}{C}(5) = {}^{w}\underset{4}{C}(11) = 1001. $$

Hätten wir ferner die Frage zu beantworten, wieviel Zahlen unter einer Million zur Quersumme 37 haben, so lassen wir bei den zur Summe 37 zu variirenden Ziffern die Null zu. Solche Complexionen, bei denen vorne Nullen hinter einander stehen, geben uns diejenigen

Zahlen, die weniger als 5 Stellen haben. Bei den zugehörigen Combinationen mit gleichm. beschränkten Wiederh. ist jetzt

$$m = 37, \quad n = 5, \quad r = 9, \quad nr - m = 8,$$

das Gesuchte also:

$${}^{9}\underset{37}{C}(5) = {}^{w}\underset{8}{C}(5) = {}^{w}\underset{4}{C}(9) = 495.$$

Obgleich es bis jetzt immer von Erfolg begleitet war, wenn wir die Variationen zu bestimmten Summen auf die Combinationen mit entsprechenden Wiederholungen zurückführten, so will ich doch den Versuch machen, den bei der Ableitung der bekanntesten Combinationsformeln von mir gebrauchten Kunstgriff noch einmal zum Schlusse bei der Lösung der Aufgabe anzuwenden: Wie gross ist die Anzahl aller Variationen zu einer bestimmten Summe aller Classen, von der ersten aufsteigend bis zur höchstmöglichen?

Wir bilden uns nun das Product aus den n Factoren

$$a(b + \alpha_1)(c + \alpha_2)(d + \alpha_3) \ldots (r + \alpha_{n-3})(s + \alpha_{n-2})(t + \alpha_{n-1}),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ Grössen von der Eigenschaft bezeichnen, dass sie die Gestalt desjenigen Summanden des unmittelbar vorhergehenden Factors annehmen, an welchen sie bei der Multiplication angefügt werden. α_1 wird also dann zu a, α_2 zu b oder α_1, α_3 zu c oder α_2 u. s. fort. Führen wir nun die Multiplication, wie im ersten Teile dieser Abhandlung S. 429—31 in der Weise aus, dass wir den Einzelfactor in einem späteren Binome immer hinter dem betreffenden Gliede des unmittelbar vorhergehenden Binoms anfügen, so erhalten wir die wiederholt auftretenden Buchstaben überall neben einander stehend, durch kein von ihnen verschiedenes Element von einander getrennt.

Denken wir uns zweitens die Variationen m. W. zur Summe n so entstanden, dass wir eine Reihe von n Einsen neben einander hinschreiben, und dann eine bestimmte Menge der letzteren zu den Elementen der Variation zusammenfassen, so kann dies gar nicht anders bewerkstelligt werden, als dass wir neben einander liegende Einsen zusammen nehmen.

Schreiben wir nun in der angegebenen Multiplication die in dem Gesammtproducte vorkommenden Potenzen in ihrer ursprünglichen Gestalt, d. h. als Producte gleicher Factoren, von denen jeder die erste Potenz eines der Elemente a, b, c u. s. w. ist, so tritt eben-

falls an die Stelle des Zahlenexponenten eines einzelnen Buchstaben eine Reihe von neben einander stehenden Einsen.

Die Vergleichung beider Darstellungsweisen zeigt unzweideutig, dass die Potenzexponenten in den bei obiger Multiplication entstehenden Einzelproducten die Elemente der Variation zu einer bestimmten Summe vorstellen, dass folglich die Anzahl dieser Producte gleich ist der gesuchten Menge der Complexionen der fraglichen Variationen durch alle Classen. Die Einzelproducte sind aber die Glieder der polynomischen Reihe, welche durch Ausmultipliciren des Productes

$$a(b+\alpha_1)(c+\alpha_2)\ \ldots\ (s+\alpha_{n-2})(t+\alpha_{n-1})$$

erzeugt wird. Die Summe der ganzen Reihe verwandelt sich aber in die Anzahl ihrer Summanden, wenn wir einen jeden derselben gleich eins setzen; und dies erreichen wir dadurch, dass wir für jeden Buchstaben 1 schreiben. Auf diese Weise erhalten wir für die in unsrer Aufgabe gesuchte Grösse:

15) $$1.(1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Man wird mir vielleicht einwenden, dass dieses Ergebnis ja viel schneller so herzuleiten gewesen wäre, dass man, wie es bei Weingärtner geschehen ist, in der für die $m$te Classe geltenden Formel 9) die Menge (m) der an einander zu fügenden Ziffern von 1 bis n wachsen lässt und dann die Binomialcoefficienten zusammenzählt. Wozu also, wird man vielleicht fragen, dieser Aufwand von Arbeit und von Nachdenken, wenn die Sache doch einfacher zu machen ist? Dagegen erwidere ich, dass es mir in dieser Abhandlung gerade darauf ankam zu zeigen, wie durch die Anwendung der Regeln der Multiplication eine jede Formel der Combinationslehre selbständig gefunden werden kann, ohne dass man eine der andern zu kennen braucht. Es ist ja allerdings bequemer, über einen Fluss mit dem Boote zu fahren, als ihn zu durchschwimmen, aber das Vergnügen der Kraftleistung geht dann verloren. Ebenso mögen diejenigen, welche die Vorzüge des in dieser Schrift angewandten Beweisverfahrens nicht anerkennen wollen, meine Entwickelungen als eine Art geistigen Turnens betrachten, meinetwegen nur als ein anziehendes Spiel, bei dem es darauf ankam zu zeigen, wieviel Goldkörner in dem Grundgedanken der combinatorischen Analysis Hindenburg's verborgen liegen, wenn man dieselbe überhaupt als die innige Verwandtschaft auffasst, die zwischen der Combinationslehre und der Multiplication mehrstelliger Grössen besteht.

Buxtehude im April 1884.

VI.

Miscellen.

1.

Ein Beitrag zur Schattenlehre.

Werden die Tangenten zur Selbstschattengrenze der schiefen Schraubenfläche bei parallelen Lichtstrahlen construirt, so bedient man sich gewöhnlich des Dufun'schen Theorems*). Ob zwar die dazu nötige Construction genug einfach ist, kann man sie dennoch ohne Benutzung des genannten Theorem's dadurch vereinfachen, indem man den, zur Construction der Selbstschattengrenze nötigen, Linien eine andere Bedeutung gibt.

In der Figur sind die horizontalen Projectionen der Axe A der schiefen Schraubenfläche, und der, im bestimmten Sinne sich bewegenden, Erzeugenden P dieser Fläche dargestellt. Die Erzeugende P schneidet die Axe im Punkte a und die Entfernung ihrer horizontalen Spur m von der Axe gibt den Parameter r der horizontalen Spur der Schraubenfläche an. Die Gerade L, welche den Punkt a enthält, und ihre Spur im Punkte m' hat, bestimmt die Richtung der parallelen Lichtstrahlen.

Um eine vorteilhafte Vereinfachung der weiteren Construction zu erreichen, setzt man gewöhnlich voraus, dass die Projections-Ebene sich mit der Erzeugenden P bewegt. Wir werden uns aber, dieser Voraussetzung entgegen, denken, dass sich die Erzeugende in

*) „Traitè de géométrie“ descriptive“ par Jules de la Gournerie. Troisième partie, art. 994, 1012.

jeder ihrer Lagen, samt ihrer Berührungsebene in der normalen Richtung zur Projections-Ebene so weit bewegt, bis sie den Punkt a enthält. Dann bilden alle Geraden P ... eine Kegelfläche K (den Richtungskegel), und ihre Spurpunkte befinden sich in einem Kreise K, als der Spur dieser Fläche.

Die Geraden P und L bestimmen eine Ebene B, die zu den Lichtstrahlen parallel ist. Um den Berührungspunkt d dieser Ebene mit der Schraubenfläche zu bestimmen, errichten wir zu der Projection der Erzeugenden P eine Senkrechte, und tragen auf diese in bestimmter Richtung mittelst des Kreises K den Parameter r über. Vom so erhaltenen Punkte f ziehen wir eine zweite Senkrechte auf die, durch die Punkte m und m' bestimmte Spur M der Ebene B. Diese Senkrechte ist die horizontale Projection einer Geraden des grössten Falles F (in der Ebene B), welche die Gerade P in dem gesuchten Berührungspunkte d schneidet. Ihre Spur befindet sich im Punkte h.

Die Projectionen aller dieser Geraden des grössten Falles F . . schneiden sich in einem Punkte t, der auf einer, in der Projection des Punktes a zu der Projection der Geraden L errichteten Senkrechten liegt, und dessen Entfernung von der Axe A der Entfernung der Spur m' von derselben Geraden gleich ist. Darum bilden die Geraden F ... ein einschaliges Hyperboloid H, dessen Leitlinien: die Gerade L, die horizontal-projicirende Gerade Z und der Kreis H (welcher die Spuren aller Geraden F ... enthält), als dessen horizontale Spur, sind.

Die zu construirende Selbstschattengrenze S können wir als die Schnittcurve dieses Hyperboloids mit der Kegelfläche K betrachten und auf Grund dessen ihre Tangenten als den Schnitt der beiden, im Punkte a zu beiden Flächen construirten Berührungsebenen, bestimmen. Die Tangente im Punkte m zu dem Kreise K ist die horizontale Spur der betreffenden Berührungsebene der Kegelfläche. Die Berührungsebene des Hyperboloids im Punkte d ist durch die Geraden F des einen und G des zweiten Systems bestimmt. Durch die Spurpunkte h und h' dieser Geraden geht die Spur dieser zweiten Berührungsebene. Der Schnittpunkt p der Spuren beider Ebenen bestimmt mit dem Punkte d die gesuchte Tangente T. —

Diese Construction der Selbstschattencurve so wie ihren Tangenten hat volle Geltung auch für die gerade Schraubenfläche als einem Specialfalle der schiefen Schraubenfläche.

Die Kegelfläche K geht in eine mit der Projectionsebene paral-

lele Ebene über. Diese Ebene schneidet das Hyperboloid H in einem Kreise, in dessen Projection sich auch die Selbstschattencurve dieser Schraubenfläche projicirt.

F. Procházka.

2.

Bemerkung zu einem Satze von Craig.

In Johns Hopkins University Circulars, Baltimore 1882 p. 178. findet sich der folgende interessante Satz ohne Beweis aufgestellt.

„Zieht man parallel allen Hauptnormalen einer geschlossenen Curve vom Mittelpunkte einer Kugel Radien, so teilt die Curve der Endpunkte die Oberfläche in zwei gleiche Teile.“

Da die sphärische Curve geschlossen sein muss um einen Kugelflächenteil zu begrenzen, so setzt der Satz offenbar Stetigkeit der Urcurve mindestens bis auf 2. Ordnung voraus.

Sei, zur Prüfung des Satzes, der Kugelmittelpunkt Anfang der xyz, der Radius $= c$. Dann ist, wenn (xyz) einen Punkt irgend einer geschlossenen sphärischen Curve bezeichnet, und

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tg} \varphi$$

gesetzt wird, der Kugelflächenteil zwischen der Curve und der yz Ebene (Aequator)

$$\Omega = c \int_0^{4k\mathrm{R}} x \, \partial\varphi$$

wo k ganze Zal, und die Flächen auf negativer Seite des Aequators negativ zu rechnen sind.

Bezeichnen fgh, $f'g'h'$, lmn die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale der Urcurve s, dann verlangt nach Substitution von cf', cg', ch' für xyz der Satz, dass

$$\Omega = c^2 \int_0^{4k\mathrm{R}} f' \partial\varphi = 0; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{h'}{g'} \tag{1}$$

sei. Aus der letztern Gleichung findet man, wenn $\partial\tau$, $\partial\vartheta$ die Contigenzwinkel der Tangente und Krümmungsaxe bedeuten:

$$\partial\varphi = \frac{g'\partial h' - h'\partial g'}{g'^2 + h'^2} = \frac{g'(n\partial\vartheta - h\partial\tau) - h'(m\partial\vartheta - g\,\partial\tau)}{g'^2 + h'^2}$$
$$= \frac{f\partial\vartheta + l\,\partial\tau}{1 - f'^2}$$

daher

$$f'\partial\varphi = \frac{-f\partial l + l\partial f}{f^2 + l^2} = \partial \operatorname{arc tg} \frac{f}{l} \tag{2}$$

und

$$\Omega c^{-2} = 2k_1 \mathrm{R}$$

wo die ganze Zahl k_1 zunächst unbekannt bleibt. Ihr Wert hängt von der Anzahl der Vorzeichenwechsel von f und l ab. Da l für sich nur eine gerade Anzahl Wechsel erfahren kann, so muss k_1 gerade sein und sei $= 2k_2$. Dann zeigt die erste Gl. (1), dass (wofern nicht f' constant $= 1$ ist)

$$-k < k_2 < k$$

sein muss. Macht also die Hauptnormale nur einen Umlauf um die x Axe, so dass $k = 1$ wird, so ist $k_2 = 0$ und der Satz richtig.

Gehe ferner μ_1 und ν_1 mal l bei positivem f, μ_2 und ν_2 mal bei negativem f vom $+$ zum $-$ und vom $-$ zum $+$ über, dann ist

$$k_1 = \mu_1 - \nu_1 - \mu_2 + \nu_2$$

Es muss aber sein

$$0 = \mu_1 - \nu_1 + \mu_2 - \nu_2$$

folglich ist

$$k_1 = 2(\mu_1 - \nu_1) = -2(\mu_2 - \nu_2)$$

oder

$$k_2 = \mu_1 - \nu_1 = -(\mu_2 - \nu_2) \tag{3}$$

Da ferner

$$\partial \operatorname{arc tg} \frac{f}{l} = -\partial \operatorname{arc tg} \frac{l}{f}$$

ist, so lässt sich bei Bestimmung von k_2 auch die Tangente mit der Binormale vertauschen, während k_2 nur sein Vorzeichen wechselt.

Ausreichende und notwendige Bedingung des Satzes ist also, dass der Winkel zwischen der Binormale und einer beliebigen Geraden, in Intervallen wo der Winkel zwischen der Tangente und jener Geraden spitz ist, ebenso oft aus einem spitzen in einen stumpfen übergeht als umgekehrt.

Ist diese Bedingung für eine Gerade erfüllt so ist sie es für jede. Ueberdies ist sie dann mit vertauschten Rollen von Tangente und Binormale erfüllt und umgekehrt.

Gleichwol möchte dieser weitesten Ausdehnung des Satzes eine engere Begrenzung vorzuziehen sein. Er umfasst nämlich auch Fälle, wo zu seiner Verification Flächenstücke auf der einen Seite doppelt, auf der andern negativ gerechnet müssen, und verliert durch diese notwendigen Interpretationen seine Einfachheit. Solche Fälle können indes nur stattfinden, wo die sphärische Curve Doppelpunkte hat. Schliessen wir aber Doppelpunkte aus, so tritt das erstgenannte Kriterium in Kraft; denn dann kann die sphärische Curve einen Punkt der Kugelfläche nur einmal umlaufen. Mit den Doppelpunkten werden dann zugleich die mehrmals durchlaufenen Curven ausgeschlossen, für welche der Satz nie richtig ist. Letzterer würde nun lauten:

Ein Kugelradius in gleicher Richtung mit der Hauptnormale einer geschlossenen und bis auf 2. Ordnung stetigen Curve geführt zeichnet auf der Kugelfläche eine geschlossene Curve, die, wenn sie keine Doppelpunkte hat, die Kugelfläche in zwei gleiche Teile teilt.

Das Vorstehende lässt es ungewiss erscheinen, ob es geschlossene Curven gibt, für welche die Bedingungen des Satzes nicht erfüllt sind, für welche also k_2 nicht null ist. Den einfachsten Beweis für deren Existenz geben aber die Curven cyklischer Torsion *). Denn deren Hauptnormale hat constante Neigung $< R$ gegen eine feste Axe, so dass die sphärische Curve ein nichtgrösster Kreis wird. Ihre specifische Gleichung ist

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \cot^2\alpha \quad (\alpha \text{ constant})$$

woraus sich

$$f' = \sin\alpha; \quad \Omega = 4k\mathrm{R}\sin\alpha$$

ergibt. Setzt man $\sin\alpha$ gleich einem rationalen Bruch und s proportional der Krümmungsbreite λ, so schliesst sich die Urcurve stets nach einer Variation von λ um ein Vielfaches von 4R, und k erweist sich als beliebige, durch $\sin\alpha$ darstellbare Zahl. Die Kugelfläche wird beliebig rational geteilt.

Da ein Beispiel zum Beweise genügt, sei

$$\sin\alpha = \tfrac{1}{2}; \quad s = a\lambda$$

dann wird

$$x = -\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\lambda; \quad y = \frac{a}{4}(3\sin\lambda + \tfrac{1}{3}\sin 3\lambda)$$

$$z = -\frac{a}{4}(3\cos\lambda + \tfrac{1}{3}\cos 3\lambda)$$

---

*) Hoppe, Analytische Geometrie §. 60. Gru̇n. Arch. LVI. S. 65.

Diese Curve schliesst sich nach Variation von λ um 4R und hat im diesem Intervalle keinen Doppelpunkt. Ihre Hauptnormale hat die Richtungscosinus:

$$f' = \tfrac{1}{2}; \quad g' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\lambda; \quad h' = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\lambda$$

woraus

$$\varphi = 2\lambda + R$$

daher wird der sphärische Kreis zweimal durchlaufen. Zwischen ihm und dem Aequator liegt die Zone

$$\tfrac{1}{2}\Omega = 2Rc^2 = \frac{c^2}{2}.8R\sin\alpha$$

daher ist $k = 2$. Ferner findet man:

$$f = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\lambda; \quad l = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\lambda$$

woraus man leicht erkennt, dass

$$\mu_1 = 1; \quad \nu_1 = 0; \quad k_2 = 1$$

Demnach wird die Kugelfläche im Verhältniss 1:3 geteilt, was die Allgemeingültigkeit des Craig'schen Satzes augenfällig widerlegt.

R. Hoppe.

3.

Ein Satz über Determinanten.

Es soll folgender Satz bewiesen werden:

Die Determinante von 4 Determinanten, deren je 2 in einer Reihe stehende nur eine ungleiche Verticalreihe haben, ist gleich dem Product der 2 Determinanten, die man aus den erstern durch die allein noch übrigen Combinationen der 2 ungleichen Reihen erhält.

Bezeichnen wir abkürzend durch $|abef\ldots|$ die Determinante eines Systems, dessen Horizontalreihen aus der Reihe $abef\ldots$ durch Hinzufügung von Indices hervorgehen; so behauptet der Satz, dass

$$\begin{vmatrix} |ace\ldots| & |ade\ldots| \\ |bce\ldots| & |bde\ldots| \end{vmatrix} = |abe\ldots| . |cde\ldots|$$

sei.

Zuerst ist nämlich leicht zu beweisen, dass jeder der 2 Factoren der Rechten Factor der Linken ist. Denn lässt man den Factor $|abe\ldots|$ verschwinden, so ist

$$\begin{aligned} a &= b\beta + e\varepsilon + f\zeta + \ldots \\ a_1 &= b_1\beta + e_1\varepsilon + f_1\zeta + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

und nach Einsetzung dieser Werte verschwindet die Linke. Das gleiche gilt vom Factor $|cde\ldots|$.

Ferner ersieht man auch sogleich, dass beide Factoren der Rechten unter einander keinen Factor gemein haben, wenn alle verschieden bezeichnete Elemente unabhängig sind. Denn betrachtet man den erstern und den letztern als lineare Function der Unabhängigen $a, a_1, \ldots,$ bzhw. $c, c_1, \ldots,$ so würde jeder gemeinsame Factor beider gemeinsamer Factor von allen Coefficienten dieser Unabhängigen d. i. von ihren entsprechenden Unterdeterminanten sein müssen. Ein solcher müsste dann irgend welche Elemente beider Systeme enthalten, und diese Elemente müssten in allen Unterdeterminanten vorkommen. Dies ist nicht der Fall; denn jedes Element fehlt in irgend einer Unterdeterminante.

Aus beiden Ergebnissen folgt nun, dass die ganze Rechte. d. i. ein Ausdruck von gleichem Grade mit der Linken, Factor der Linken ist, so dass beide Seiten der Gleichung bis auf einen numerischen Factor gleich sein müssen.

Um letztern zu bestimmen, setze man alle Elemente der Rechten ausser den Diagonalen

$$ab_1e_2\ldots \quad \text{und} \quad cde_2\ldots$$

null, dann wird die Linke

$$\begin{vmatrix} 0 & ad_1e_2\ldots \\ -b_1ce_2\ldots & 0 \end{vmatrix} = ab_1e_2\ldots cd_1e_2\ldots$$

also der Rechten gleich, und der Quotient $= 1$, der Beweis des anfänglichen Satzes folglich vollständig.

R. Hoppe.

4.

Ueber die Grenze der Stabilität eines longitudinal compri geraden elastischen Stabes.

In einem Aufsatze über Biegung prismatischer Stäbe, I dorff Ann. CII. S. 227—245, 1857, habe ich (S. 237) bewiese ein gerader elastischer Stab durch Longitudinalcompression er gebogen werden kann, wenn dieselbe eine gewisse endliche überschreitet, und diese Grenze bestimmt. Eine abweichende war mir damals nicht bekannt. Später bin ich aber wiederl auf Rechnung gestützten Ansicht, die ich für die gewöhnliche muss, begegnet, dass ein gerader Stab bei der geringsten Comp sich zu biegen anfängt. Der Grund der Abweichung liegt i Principien und Voraussetzungen, sondern in der Rechnung; zeigen ist der Zweck des Folgenden.

Unveränderlichkeit des Normalschnitts ist gemeinsame A der beiderseitigen Rechnungen; ihre Zulässigkeit kann wol h es sich um keine oder eben beginnende Biegung handelt, n Frage kommen. Die Curve der Mittellinie (d. i. Ort des Quers Schwerpunktes) war eben. Auf beliebige einzelne Punkte de wirkten Kräfte in dieser Ebene. Aus der Gleichung der vi Geschwindigkeiten ergaben sich die 2, von den Grenzbedin unabhängigen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(1-\frac{1}{\sigma'}\right)x'+by'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho\sigma'}\right)\right\}=0 \\ \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(1-\frac{1}{\sigma'}\right)y'-bx'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho\sigma'}\right)\right\}=0 \end{aligned}\right\}$$

wo σ den ungespannten, s den actuellen Bogen der Mittell zum Punkte (xy), der Accent die Differentiation nach s, ϱ den mungsradius von s, f den Querschnitt, bf sein Trägheitsmon die Biegungsaxe bezeichnet. Auch diese Gleichungen finden sic überall in Uebereinstimmung.

Hier setzt nun die gewöhnliche Rechnung, mit Vernachlä höherer Potenzen der Transversalverschiebungen, vor der Inte

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{(wo die } y \text{ transversal gerichtet sind)}$$

und behandelt die Gleichungen als lineare. Lässt man sie al dem man sie als genau geltend betrachtet, unverändert, so s ohne alle Vernachlässigung in geschlossener Form integrabe

letztere ist in meiner Rechnung geschehen. Es zeigte sich, dass der Bogen zwischen 2 successiven Angriffspunkten stets ein Stück der Curve eines freien Stabes ist, auf dessen Enden entgegengesetzte Kräfte in der Richtung der Sehne wirken, einer Curve deren Pfeil jede beliebige Grösse haben kann. Die Sehne zur x Axe genommen, ergab sich als Integral der Gl. (1):

$$x = \frac{\sqrt{b}}{2\sin^2\beta}\int_0 \left\{ \cos^2\beta - 2z\sin^2\gamma\sin^2\beta - 2(1-z)\sin^2\gamma \right\} \frac{\partial z}{N}$$

$$y = 2\sqrt{b}\,\frac{\sin\gamma}{\sin^2\beta}\sqrt{z}\sqrt{\cos^2\beta - z\sin^2\gamma}$$

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{b}\int_0 (\cos^2\beta - 2z\sin^2\gamma)\,\frac{\partial z}{N}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\sqrt{b}\cos 2\gamma\int_0 \frac{\partial z}{N} \tag{3}$$

$$N^2 = z(1-z)(\cos^2\beta - z\sin^2\gamma)(\sin^2\beta - (1-z)\sin^2\gamma)$$

wo z durch Gl. (3) bestimmt wird, und β, γ Integrationsconstanten bedeuten. Die Kräfte sind

$$p = fE\,\frac{\sin^2\beta}{\cos 2\gamma}$$

E Elasticität des Stoffes.

Vermindert man p, bis der Stab gerade wird, so verschwindet mit y die Constante γ, und man hat, wenn der Index 1 sich auf die Mitte der Curve bezieht:

$$x_1 = s_1 = \mathrm{R}\sqrt{b}\cot\beta; \quad y_1 = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{\mathrm{R}\sqrt{b}}{\sin\beta\cos\beta}$$

$$x : s : \sigma = x_1 : s_1 : \sigma_1$$

$$p = fE\sin^2\beta$$

und nach Elimination von β:

$$p = fE\left(1 - \frac{s_1}{\sigma_1}\right) = \frac{\mathrm{R}^2 fEb}{s_1\,\sigma_1} \tag{4}$$

Die Verkürzung

$$2(\sigma_1 - s_1) = \frac{2\mathrm{R}^2 b}{s_1}$$

nahezu $= 2\mathrm{R}^2 b : \sigma_1$ also unabhängig vom Material

Die so bestimmte endliche Compression ist diejenige, in deren Grenzen die gerade Gestalt des Stabes stabil, eine Biegung unmöglich ist.

Wendet man gegen die Geltung dieses Resultats ein, dass eine Berücksichtigung der höhern Potenzen der Transversalverschiebung illusorisch sei, sofern sie die Grenzen der Elasticitätstheorie übersteige, so kann man aus diesem Gesichtspunkt höchstens die Genauigkeit des gefundenen Stabilitätsintervalls in Zweifel ziehen, nicht aber folgende Consequenzen bestreiten.

Ist das auf die lineare Form der Differentialgleichungen gestützte Ergebniss in Bezug auf Transversalverschiebung, Gestalt der Biegungscurve, Spannung u. s. w. das Aeusserste, was die Elasticitätstheorie zu leisten vermag, so ist die weitere Folgerung auf ein Stabilitätsintervall $= 0$ eine Ueberschreitung ihrer Competenz, weil sich das Resultat als abhängig von den als unbekannt vernachlässigten Elementen erwiesen hat, und ein Rechnungsfehler. Die auf diesem Fehler beruhende gewöhnliche Ansicht hat gegenüber der vorstehenden Aufstellung keinen Anspruch auf Geltung.

Das Vorstehende will ich noch in Vergleich stellen mit dem, was Grasshof in seinem Werke: „Festigkeitslehre 1866" über den angeregten Punkt sagt. Er nennt gleichfalls die Methode, welche zu einem Stabilitätsintervall $= 0$ führt, die gewöhnliche und erklärt ebenso das irrige Resultat durch die in der Substitution (2) begangene Vernachlässigung. Uebereinstimmend ist auch das durch Berücksichtigung der Differenz von ihm berechnete Stabilitätsintervall (abgesehen von der unmerklichen Abweichung, dass in Gl. (3) s_1^2 statt $s_1 \sigma_1$ steht). Seine Rechnung selbst hingegen ist ganz verschieden: eine genaue Integration vollzieht er nicht, sondern leitet den gesuchten Wert approximativ mit elementaren Mitteln her.

Die Vergleichung liefert mir manche willkommene Rechtfertigung. Zunächst kann ich mich auf Grasshof's weiter reichende Erfahrung berufen, indem ich jene irrige Ansicht die gewöhnliche genannt habe. Ist sie nun 9 Jahre nach ihrer Berichtigung trotzdem die gewöhnliche geblieben, so bürgt nichts dafür, dass sie es nicht auch heute noch ist, und kann die hier behandelte Frage durch ihr Alter nicht gegenstandslos geworden sein.

R. Hoppe.



5.

Zur harmonischen Teilung.

Jakob Steiner stellt (ges. Werke I. 400.) u. A. die Aufgabe: man soll die gegenseitige Lage der 16 (oder 8) Punkte untersuchen, aus welchen sich 4 harmonische Punkte einer Geraden durch ein gegebenes harmonisches Büschel projiciren lassen. Wir werden im folgenden versuchen sie zu erledigen.

Um zunächst zu den 16 Punkten zu gelangen, aus welchen eine harm. Punktreihe $ABCD$ sich durch ein gegebenes harm. Büschel projiciren lässt, haben wir nur über den conjugirten Strecken der Punktreihe Kreise zu beschreiben, welche Winkel fassen, die gleich den Winkeln α, β der conjugirten Strahlen des Büschels sind. Dies gibt 8 Kreise. Jeder Punkt nun, in dem ein den Winkel α fassender Kreis einen den Winkel β fassenden trifft, ist ein Punkt, welcher die erwähnte Eigenschaft besitzt. Dies gibt uns 16 Punkte, welche sich symmetrisch zur Geraden AD verteilen. Sind nun ferner M, N die Halbirungspunkte zu den conjugirten Strecken AC, BD, und ist MN in P, Q so geteilt, dass

$$PM : PN = QM : QN = AC : BD$$

so finden wir ohne Schwierigkeit, dass wenn wir irgend einen der 16 Punkte mit irgend einem der 4 Punkte M, N, P, Q verbinden, diese Verbindungslinie noch durch einen zweiten der 16 Punkte geht. Das gleiche findet statt für den Punkt R, für welchen $RA \,.\, RB = RC \,.\, RD$ ist; jedoch liegen die Punktepare nicht mehr auf derselben Seite von AD.

Ferner finden wir, dass wenn z. B. V und W 2 der 16 Punkte sind, welche auf einer Linie mit einem der 5 Punkte M, N, P, Q, R sich befinden, für diesen Punkt, etwa Q, stets $QV \,.\, QW =$ const ist. Aus letzterem Umstande folgt aber, dass jeder durch V und W und einen dritten der 16 Punkte gelegte Kreis notwendigerweise noch durch einen vierten gehen muss. Berücksichtigen wir dies in Bezug auf 8 auf einer Seite von AD gelegene Punkte, so ergibt sich hieraus mit Hülfe der Punkte M, N, P, Q, dass alle 8 Punkte auf einem Kreise liegen müssen. Fassen wir diese Resultate zusammen, so finden wir folgenden Satz.

Die 16 Punkte, aus welchen eine gegebene harmonische Punktreihe sich durch ein gegebenes harmonisches Büschel projiciren lässt, liegen zu je 8 auf 2 Kreisen [illegible] Punkte eines jeden Kreises

liegen überdies parweise mit jedem der 4 harmonischen Punkte N, P, Q auf AD in einer Geraden, und jeder der Punkte des e Kreises liegt mit einem Punkte des andern und einem festen P R auf AD in einer Geraden.

Betrachten wir ferner die 8 Punkte eines jeden der beiden Kr so finden wir, dass wenn wir den Kreis in einem bestimmten S durchlaufen, die Verbindungslinien des 1. und 5ten, 2. und 6 3. und 7ten, 4. und 8ten Punktes sich in einem Punkte, dem der Linie AD in Bezug auf dem Kreis, schneiden. Der 1., 3. 7te und ebenso der 2., 4., 6., 8te Punkt bilden überdies auf Kreisen harmonische Würfe.

Weingarten, im October 1884.

B. Sporer.

V.

Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten.

Von

Herrn **P. H. Schoute,**

Professor in Groningen.

Erster Abschnitt.

Einleitende Sätze.

1. „Sind CX und CY (Fig. 1.) die Asymptoten und P und Q zwei Punkte einer gleichseitigen Hyperbel, und construirt man auf PQ als Diagonale ein Rechteck, dessen Seiten zu den Asymptoten parallel laufen, so geht die zweite Diagonale RS dieses Rechtecks durch den Mittelpunkt C der Hyperbel. Und haben umgekehrt die Punkte P und Q in Bezug auf die senkrecht auf einander stehenden Geraden CX und CY eine solche Lage, dass die zweite Diagonale des auf PQ mittelst Parallelen zu CX und CY beschriebenen Rechtecks durch C geht, so sind P und Q Punkte einer gleichseitigen Hyperbel mit den Asymptoten CX und CY".

Dieser Satz, der bei Ersetzung vom Rechteck durch Parallelogramm ganz allgemein für ungleichseitige Hyperbeln gilt, ist überbekannt. Man kann ihn geometrisch beweisen mittelst Anwendung des Pascal'schen Satzes auf das eingeschriebene Sechseck $XXPYYQ$, wenn unter X und Y die unendlich fernen Punkte der Asymptoten verstanden werden.

Zur Abkürzung werde ich die gleichseitige Hyperbel, welche CX und CY zu Asymptoten hat und durch die Punkte P, Q ... hindurch geht, durch das Symbol $H(CX, CY; P, Q \ldots)$ andeuten. Weiter mag das mittelst Parallelen zu CX und CY auf der Sehne PQ als Diagonale beschriebene Rechteck als „das Asymptotenrechteck PQ" der Hyperbel bezeichnet werden. Und endlich werde ich zwei Gerade, die wie die Diagonalen PQ und RS dieses Asymptotenrechtecks nach verschiedenen Seiten mit jeder der Aymptoten gleiche Winkel bilden, in Bezug auf CX und CY „antiparallel" zu einander nennen [1]).

2. „Die Tangente der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P)$ im Punkte P ist antiparallel zu CP in Bezug auf die Asymptoten".

Wenn man den Punkt Q (Fig. 1.) der Hyperbel entlang dem Punkte P fortwährend näher treten lässt, so werden PQ und RS immer antiparallel zu einander bleiben in Bezug auf die Asymtoten, PQ in die Tangente der Hyperbel in P, RS in CP übergeführt werden. Es ist also dieser ebenfalls sehr bekannte Satz eine Folge des Vorhergehenden [2]).

3. „Wenn man (Fig. 2.) die Seiten PR und PS des Asymptotenrechtecks PQ der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P, Q)$ um

---

1) Wenn man den besonderen Charakter der von den conjugirten Durchmessern der gleichseitigen Hyperbel gebildeten quadratischen Involution, nach welchem die Asymptoten die Teilstrahlen sind von den von irgend einem Paare conjugirter Durchmesser gebildeten Scheitelwinkeln, als bekannt annimmt, so wird oben stehender Satz auch bewiesen mittelst der Bemerkung, dass die Gerade, welche C mit der Mitte der Strecke PQ verbindet, als zu der Sehne PQ conjugirter Durchmesser antiparallel zu PQ ist in Bezug auf die Asymptoten und die deshalb mit der zweiten Diagonale des Asymptotenrechtecks PQ zusammenfällt. Da eine geometrische Behandlung des Lehrstoffes den Pascal'schen Satz unmittelbar an die projectivische Erzeugung der Kegelschnitte festknüpft, so habe ich es vorgezogen, den diesem Satze entnommenen Beweis anzudeuten.

In seiner allgemeinen Form führt der Satz zur Construction einer Hyperbel, von welcher drei Punkte und die Richtungen der Asymptoten gegeben sind („Leçons de géométrie analytique" de Briot et Bouquet, dixième édition, livre 3, chapitre 9, exercice 4 et livre 3, chap. 3, exerc. 14).

2) Auch dieser Satz folgt aus dem besonderen Charakter der von den conjugirten Durchmessern gebildeten Involution. Nach diesem wird auch die Verbindungslinie der Mitten zweier einander unter einem gegebenen Winkel schneidenden Sehnen der gleichseitigen Hyperbel aus dem Mittelpunkte dieser Curve immer unter dem nämlichen Winkel gesehen („Traité de géométrie analytique" de Piquet, tome I, § 167, exercice 8).

ihre eigene Länge bis in T und U verlängert, die neuen Endpunkte T und U mit C verbindet und die Schnittpunkte V und W von CT mit SQ und von CU mit RQ bestimmt, so hat man in V und W zwei Punkte der Tangente in P an $H(CX, CY; P, Q)$ erhalten. Und umgekehrt liegt Q auf der Hyperbel $H(CX, CY; P)$ und ist PVW die Tangente dieser Curve in P, wenn die auf der angegebenen Weise aus P, Q und den senkrecht auf einander stehenden Geraden CX und CY hervorgehenden Punkte V und W auf einer durch P gehenden Gerade liegen".

Ist Q ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P)$, so geht nach Artikel 1. die wegen der Umkehrung des Satzes in der Figur nicht angegebene zweite Diagonale RS des Asymptotenrechtecks PQ durch C. Wird nun CP von den Seiten QS und QR in V_1 und W_1 getroffen, so folgt aus $PR = RT$ und $PS = SU$ unmittelbar $V_1S = SV$ und $W_1R = RW$. Und diese Relationen zeigen, dass PV und PW nach Artikel 2. mit der Tangente der Hyperbel in P zusammenfallen.

Ist umgekehrt wol bekannt, dass die auf die angegebene Weise aus P, Q, CX, CY abgeleiteten Punkte V, W mit P in einer Geraden liegen, nicht aber dass Q ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P)$ und PVW die Tangente dieser Curve in P ist, so kann man wie folgt verfahren. Die Geraden VU und TW sind parallel, da sie wegen der Relationen $PS = SU$ und $PR = RT$ antiparallel zu PVW sind in Bezug auf die Asymptoten. Deshalb ist $CU : CW = CV : CT$ und da auch $CV : CT = CV_1 : CP$ ist, so ergiebt sich $CU : CW = CV_1 : CP$, d. h. die Geraden UV_1 und WP sind parallel. Also ist das Viereck $PVUV_1$ und ebenso das Viereck W_1TWP eine Raute; ausserdem sind diese Vierecke ähnlich und ähnlich liegend mit dem Punkte C als Aehnlichkeitspunkt und liegen deshalb ihre einander entsprechenden Mittelpunkte R und S mit C in einer Geraden, d. h. es geht die gleichseitige Hyperbel $H(CX, CY; P)$ nach Artikel 1. durch Q. Offenbar sind dann endlich auch die Geraden CP und PVW antiparallel in Bezug auf die Asymptoten und ist PVW also die Tangente der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P, Q)$ in P.

Mit dem Auge auf Artikel 2. brauche ich kaum hervorzuheben, dass ich mit dem Satze dieses Artikels nicht die Anweisung einer Construction der Tangente in einem Punkte der gleichseitigen Hyperbel beabsichtige. Vielmehr wird er uns im Folgenden die Erkennung einer bestimmten Geraden als Tangente einer bestimmten gleichseitigen Hyperbel in einem bestimmten Punkte erleichtern [3]).

---

3) Man vergleiche den dritten Abschnitt, Artikel 31.

4. „Eine gleichseitige Hyperbel ist für irgend eins ihrer Paa von einander gegenüberliegenden Punkten P_1, P_2 (Fig. 3.) der O der Punkte P, für welche die Geraden PP_1 und PP_2 antiparallel si in Bezug auf die Asymptoten".

Da die Büschel der in Bezug auf die zwei einander senkrec schneidenden Geraden CX und CY antiparallel zu einander dur P_1 und P_2 gelegten Geraden P_1P und P_2P projectivisch sind, so der Ort der Punkte P ein durch P_1 und P_2 gehender Kegelschni Ist P_1P zu CX, resp. CY parallel, so ist P_2P es auch; also ist d erzeugte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel mit zu CX und (parallelen Asymptoten. Endlich sind die Tangenten dieser Curve den Punkten P_1 und P_2 beide antiparallel zu P_1P_2, also zu einan parallel, d. h. der Mittelpunkt C der Strecke P_1P_2 ist Mittelpu der Curve, und diese Curve also auch die gleichseitige Hyper $H(CX, CY; P_1, P_2)$ [4]).

5. „Bewegen die Geraden PQ und RS sich antiparallel zu e ander in Bezug auf irgend eine feste Gerade CV, und ist dies den Geraden PQ und TU in Bezug auf irgend eine andere feste G rade CW der Fall, so ist der von RS und TU gebildete Winkel unveränderlicher Grösse.

Sind PQ und RS antiparallel in Bezug auf die Asymptoten, und TU antiparallel in Bezug auf die Achsen einer gleichseitig Hyperbel, so stehen RS und TU auf einander senkrecht".

Lassen wir im ersten Teil des Satzes an die Stelle der g gebenen Geraden PQ, RS, TU ihre durch den Schnittpunkt C v CV und CW (Fig. 4.) geführte Parallelen CL, CM, CN treten, ist Wkl. MCL = 2 Wkl. VCL und Wkl. NCL = 2 Wkl. WC

---

4) Die Bemerkung, dass die Verbindungslinien P_1P und P_2P von und P_2 mit irgend einem Punkte P der Curve $H(CX, CY; P_1, P_2)$ supp mentäre Sehnen dieser Curve sind, wenn P_1 und P_2 einander diametral geg überliegen, führt in Verbindung mit dem besonderen Charakter der Involut der conjugirten Durchmesser ebenfalls zum Beweise des Satzes, welcher in d bekannten mechanischen Probleme der Laterne, die mittelst eines über z nicht eben hoch liegende Punkte gespannten Seils gehoben wird, eine il strirte Einkleidung gefunden hat. Da der geometrische Weg eher zum ob gegebenen Beweise führt, habe ich diesen vorgezogen.

Man vergleiche „Jacob Steiner's gesammelte Werke", erster Band, S. 442, Satz 18, links b)

also nach Subtraction auch Wkl. $MCN = 2$ Wkl. VCW[5]). Und im zweiten Teile des Satzes ist Wkl. $VCW = 45^0$, also Wkl. $MCN = 90^0$.

6. „Die vier Schnittpunkte eines Kreises mit irgend einem Kegelschnitte K liegen dreimal auf zwei in Bezug auf die Achsen von K zu einander antiparallelen Geraden.

Der Krümmungskreis irgend eines Punktes P (Fig. 5.) einer gleichseitigen Hyperbel bestimmt in dieser Curve eine zum Durchmesser CP des Punktes P senkrechte Sehne PQ. Diese Bemerkung führt zu einer einfachen Construction des Krümmungskreises, indem der Krümmungsmittelpunkt M_p und C das eine Paar und P und die Mitte M von PQ das andere Paar Gegenecken eines Parallelogrammes bilden [6])".

Den bekannten ersten Teil des Satzes beweist man geometrisch am leichtesten mittelst der von den beiden Curven auf der unendlich fernen Gerade g_∞ bestimmten Involution. Man erblickt nämlich unmittelbar, dass die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Achsen von K die Doppelpunkte dieser Involution sind. Denn diese Doppelpunkte sind erstens auf g_∞ harmonisch getrennt von den unendlich fernen Punkten von K, also auf g_∞ conjugirte Punkte in Bezug auf K, d. h. Schnittpunkte von g_∞ mit conjugirten Durchmessern von K. Aber ebenso sind die Doppelpunkte zweitens Schnittpunkte von g_∞ mit conjugirten Durchmessern des Kreises, d. h. die Doppelpunkte liegen in auf einander senkrecht stehenden Richtungen auf g_∞, sind also die unendlich fernen Punkte der senkrecht auf einander stehenden Durchmesser, der Achsen von K. Und hieraus folgt dann weiter, dass jeder Kegelschnitt des von K und dem Kreise gebildeten Büschels g_∞ in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungslinie mit irgend einem Punkte im Endlichen in Bezug auf die Achsen von K zu einander antiparallel sind; was dann auch gilt für die drei in Geradenpaare zerfallenden Kegelschnitte des Büschels [7]).

---

5) Hieraus folgt auch, dass die zwei Durchmesser von irgend zwei gleichseitigen Hyperbeln, welche einer nämlichen Richtung conjugirt sind, einander unter einem nicht von dieser Richtung abhangenden Winkel schneiden (Picquet a. a. O., tome I, § 167, exercice 9).

6) Schon als ich diese Construction längst gefunden hatte, bemerkte ich, dass sie vorkommt in A. Milinowski's „Elementar-synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel", Seite 55, Artikel 84.

7) Der analytische Beweis des Satzes folgt aus der Bemerkung, dass die Gleichung $F \equiv \varphi + k\psi = 0$ der Kegelschnitte durch die Schnittpunkte des gegebenen Mittelpunktskegelschnittes $\varphi \equiv Ax^2 + By^2 + C = 0$ mit irgend

Nach dem nun bewiesenen ersten Teile des Satzes ist die Sch PQ, welche der Krümmungskreis im Punkte P von irgend ein Kegelschnitte in dieser Curve bestimmt, antiparallel zu der Tange in P in Bezug auf die Achsen des Kegelschnittes, was dann a schon Steiner zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes verwen hat[8]). Aber bei der gleichseitigen Hyperbel führt die Anwendung zweiten Teiles des vorhergehenden Satzes auf die oben angedeut Lage der Sehne PQ. Ist nun weiter M die Mitte von PQ, so CM als zu der Sehne PQ conjugirter Durchmesser antiparallel zu in Bezug auf die Asymptoten und also auch, da CP auf PQ se recht steht, antiparallel zu CP in Bezug auf die Achsen. Ebe ist CP antiparallel zu der Normale PM_p in Bezug auf die Achs da CP antiparallel ist zu der Tangente in P in Bezug auf die Asy ptoten. Also sind CM und PM_p beide antiparallel zu CP in Be auf die Achsen und deshalb zu einander parallel. Da nun Punkt M_p offenbar der Schnittpunkt ist von der Normale PM_p der in M auf PQ errichteten Senkrechten MM_p, so ist ebenfalls zu MM_p parallel und $PCMM_p$ ein Parallelogramm.

Ist nun von H ausser den Asymptoten nur der Punkt P geben, so findet man den Krümmungsmittelpunkt folgendermaass Man errichtet in P eine Senkrechte auf die Verbindungslinie von mit C, sucht die Mitte M der von den Asymptoten auf dieser Se rechten bestimmten Strecke P_xP_y und macht die Strecke MM_p gle und parallel zu CP.

Die von Steiner gegebene Construction des Krümmungsmitt punktes wird illusorisch, wenn P einer der Scheitel der gleichseiti

---

einem Kreise $\psi = x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$ offenbar kein Glied xy hält. Denn wenn die das Glied xy nicht enthaltende Gleichung $F = 0$ in Gleichungen $m_1x + n_1y + p_1 = 0$ und $m_2x + n_2y + p_2 = 0$ zerfällt, hat $m_1n_2 + m_2n_1 = 0$, d. h. die beiden Geraden $mx + ny + p = 0$ sind a parallel in Bezug auf die Achsen.

Einen anderen Beweis giebt Salmon („A treatise on conic sections", si edition, Art. 244).

Aus dieser Quelle fliesst auch die Lösung des Problemes, welches sagt, dass die Teilstrahlenpaare der von den Gegenseitenpaaren eines Kr vierecks gebildeten Scheitelwinkel drei zu drei parallel sind (Briot et Bou a. a. O., livre 2, chapitre 3, exercice 17, oder in der ursprünglichen Fassu Steiner, a. a. O., erster Band, Seite 128, Satz 7).

Man vergleiche auch „Die Geometrie der Lage" von Dr. Th. Reye, Auflage, 1. Abteilung, Seite 184, Aufgabe 119.

8) Steiner, a. a. O., zweiter Band, Seite 17, Satz 6).

Hyperbel ist. Für diesen Fall ergibt meine Construction, dass der Krümmungsradius dem Radius Vector CP gleich ist.

Durch irgend einen Punkt Q von H gehen drei ihrer Krümmungskreise. Denn der auf CQ als Durchmesser beschriebene Kreis schneidet H ausser Q noch in drei Punkten.

7. „Die Betrachtung der Ellipse als Projection des Kreises und der ungleichseitigen Hyperbel als Projection der gleichseitigen Hyperbel führt zur Kenntniss der Krümmungshalbmesser des Mittelpunktskegelschnittes in seinen Scheiteln".

Ist E (Fig. 6.) die gegebene Ellipse, Kr der über ihrer grossen Achse AB als Durchmesser beschriebene Kreis, sind P_e und P_k einander entsprechende sich in P auf AB projicirende Punkte dieser Curven und schneidet der durch P_e gelegte Kreis, welcher E in A berührt, die Achse zum zweiten Male in Q, so hat man $AP.PQ = PP_e^2$ und $AP.PB = PP_k^2$, also durch Division, wenn a und b wie gewöhnlich die Halbachsen von E andeuten, $\frac{PQ}{PB} = \frac{b^2}{a^2}$. Ersetzt man nun die Punkte P_e und P_k durch einander entsprechende Punkte von E und Kr, deren gemeinsame Projection P dem Scheitel A immer näher rückt, so findet man an der Grenze für den Krümmungshalbmesser R_a der Ellipse E in A den Wert $\frac{b^2}{a}$. Ebenso findet man mittelst des auf der kleinen Achse von E als Durchmesser beschriebenen Kreises, wobei man allerdings den Kreis als die Projection der Ellipse zu betrachten hat, für den Krümmungshalbmesser R_b der Ellipse in den Endpunkten der kleinen Achse den Wert $\frac{a^2}{b}$.

Für die reellen Scheitel der Hyperbel findet man mittelst der Bemerkung am Schlusse des vorhergehenden Artikels auf ganz gleiche Weise die Relation $R_a = \frac{b^2}{a}$. Dabei hat man die ungleichseitige Hyperbel als Projection der gleichseitigen Hyperbel mit gleicher reellen Achse zu betrachten oder umgekehrt die gleichseitige Hyperbel als Projection der ungleichseitigen, je nachdem diese letztere Curve innerhalb der scharfen oder innerhalb der stumpfen Scheitelwinkel ihrer Asymptoten enthalten ist [9]).

---

[9]) Einen mehr allgemeinen Satz findet man schon in Dupin's „Développements de géométrie" (page 29).

8. „Die Fusspunkte der Normalen, welche man von einem gebenen Punkte P auf einen gegebenen Mittelpunktskegelschnitt fällen kann, sind die Schnittpunkte von K mit einer durch P, unendlich fernen Punkte A und B der Achsen von K und den M telpunkt C von K gehenden gleichseitigen Hyperbel. Und umgek schneidet jede gleichseitige Hyperbel durch A, B, C den gegebe Kegelschnitt K in vier Punkten, wofür die auf K errichteten Norma durch einen Punkt gehen".

Dieser dem Apollonius von Perga (247 v. Chr.) zugeschrieb Satz wird leicht geometrisch bewiesen. Ist nämlich PQ (Fig. irgend eine Gerade durch P und CQ der Durchmesser von K, cher in K dem senkrecht auf PQ stehenden Durchmesser conju ist, so bilden die Strahlen PQ und CQ zwei projectivische Büsc und ist der Ort des Schnittpunktes Q von PQ und CQ also durch P und C gehender Kegelschnitt, der, wie man unmittelbar blickt, auch durch die unendlich fernen Punkte A und B geht. D Curve ist also eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten zu Achsen von K parallel sind. Und die Schnittpunkte dieser C mit K sind offenbar die Fusspunkte der von P an K möglic Tangenten [10]).

Umgekehrt schneidet jede gleichseitige Hyperbel durch A, die gegebene Curve K in vier Punkten, wofür die auf K erricht Normalen durch einen Punkt gehen. Ist nämlich P der Schnittp der Normalen an K in zwei der vier Schnittpunkte von K mit di gleichseitigen Hyperbel, so hat die dem Punkte P zukommende perbel des Apollonius schon fünf Punkte mit der angenomme gleichseitigen Hyperbel gemein, und fallen also die beiden Cu zusammen [11]).

---

10) Eine merkwürdige Ableitung dieser Hyperbel gab Poncelet („T des propriétés projectives des figures", 2me édition, tome I, art. 492).

Jede Hyperbel des Apollonius ist dem uneigentlichen Poldreieck ABC K umgeschrieben und enthält also die Eckpunkte einer einfach unendli Anzahl von Poldreiecken von K (Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite Picquet, a. a. O., tome I, § 209—216). Die Seiten dieser Poldreiecke hüllen eine Parabel, die Polarfigur der Hyperbel von Apollonius in Bezug K („Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte" von A. Milino Sätze und Aufgaben, Nr. 90—95).

11) Die den verschiedenen Punkten P der Ebene zukommenden Hyper des Apollonius bilden ein Netz mit drei Basispunkten, den Punkten A, B Dieses Netz ist bekanntlich zum ebenen Systeme der Punkte P projecti und es ändert sich und seine Verwandtschaft zum ebenen Systeme der Pu

9. „Die Punkte Q einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel H mit dem Mittelpunkte C (Fig. 8.), für deren jeden die Tangente q zu der durch einen gegebenen Punkt P geführten Geraden QP antiparallel ist in Bezug auf irgend einen Durchmesser CR, sind die Schnittpunkte von H mit einem durch C und P gehenden Kreise. Und umgekehrt schneidet jeder durch C gehende Kreis die Curve H in vier Punkten Q, für welche die zu den Tangenten q in Bezug auf CR antiparallel durch Q gelegten Geraden durch einen bestimmten Punkt dieses Kreises gehen".

Sind CX und CY (Fig. 9.) die Asymptoten der gegebenen gleichseitigen Hyperbel H, ist P der gegebene Punkt und CR der gegebene Durchmesser, so suchen wir den Ort des Schnittpunktes Q von jeder durch P gehenden Geraden PQ mit dem Durchmesser CQ von H, welcher dem zu PQ in Bezug auf CR antiparallelen Durchmesser CS von H conjugirt ist. Nun findet man leicht, dass der Winkel PQC constant ist, denn da PQ und CS antiparallel sind in Bezug auf CR, CS und CQ antiparallel sind in Bezug auf CX, so ist nach Artikel 5. immer Wkl. $PQC = 2$ Wkl. RCX. Also ist der Ort der Punkte Q ein durch C und P gehender Kreis [12]). Da nun die Schnittpunkte von H mit diesem Kreise nach der Entstehungsweise von diesen offenbar die in dem Satze angedeuteten Punkte Q sind, und umgekehrt jeder Punkt Q des Satzes dem gefundenen Kreise angehören muss, ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Und die Umkehrung wird ganz so behandelt wie jene des vorhergehenden Satzes [13]).

Zur Abkürzung nennen wir die durch den Punkt Q von H (Fig. 8.) in Bezug auf CR zu der Tangente q von H in Q antiparallele Gerade QP die „Anti-Normale" von H in Q für CR. Und die Curve, welche von dieser Anti-Normale eingehüllt wird, wenn Q die gleichseitige Hyperbel H durchläuft, möge hiermit in Uebereinstimmung die „Anti-Evolute" von H für CR heissen [14]). Diese Anti-

---

P nicht, wenn man die Achsen von K in dem nämlichen Masse vergrössert oder verkleinert. Man vergleiche Steiner's Abhandlung „Ueber algebraische Curven und Flächen", a. a. O., zweiter Band, Seite 627).

12) Wenn man auf das Zeichen der Winkel achtet, so sieht man unmittelbar, dass die an verschiedenen Seiten von CP liegenden Kreissegmente, welche man erhält, wirklich einen Vollkreis bilden.

13) Die den verschiedenen Punkten P der Ebene zukommenden Kreise bilden ebenfalls ein dem ebenen Systeme der Punkte P projectivisches Netz, das sich und seine Verwandtschaft zu diesem ebenen Systeme nicht ändert, wenn man die gleichseitige Hyperbel H vom Centrum C aus in irgend einem Masse vergrössert oder verkleinert.

14) Obgleich diese Anti-Normale und Anti-Evolute einen besonderen Fall

Evoluten können nach Artikel 5. offenbar auch betrachtet werden als die Einhüllenden der Geraden, welche die centralen Radien Vectoren von den Punkten von H in diesen Punkten unter bestimmten und in bestimmten Sinne gezählten Winkeln schneiden.

10. „Die Anti-Evoluten von H in Bezug auf ihre verschieden Durchmesser CR sind concentrische und einander ähnliche Curven.

Ist CR (Fig. 10.) irgend ein Durchmesser und CD eine Ach von H, sind Q und Q' zwei an einander grenzende Punkte dies Curve, QR_1 und $Q'R_1$ die Anti-Normalen von H in Q und Q' f CR, und sind QD_1 und $Q'D_1$ die Anti-Normalen von H in Q und für CD, so liegen einerseits die Punkte C, Q, Q', R_1 auf einem Kreis da Wkl. $R_1QC =$ Wkl. $R_1Q'C (= 2$ Wkl. $RCX)$ ist, und andererseits die Punkte C, Q, Q', D_1, da Wkl. $D_1QC =$ Wkl. $D_1Q'C (= 2$ Wkl. DC recht ist. Beim Grenzübergange des Zusammenfallens der Punk Q und Q' liegen also die dem Punkte Q von H entsprechend Punkte R_1 und D_1 der Anti-Evoluten für CR und CD so auf eine durch C und Q die H in Q berührenden Kreise, dass die Kreisbög CR_1 und CD_1 in Graden fortwährend die nämlichen Werte b behalten, wenn Q sich der H entlang bewegt; denn man findet u mittelbar Bog. $CR_1 = 4$ Wkl. RCX und Bog. $CD_1 = 4$ Wkl. $DCX = 1$ Und hieraus folgt, dass die Anti-Evolute für CR aus jener für C abgeleitet wird, indem man diese letztere um C über einen Wink $= 2$ DCR dreht und zur selben Zeit ihre von C ausgehend Radien Vectoren durch Multiplication mit cos 2 Wkl. DCR verkl nert [15]).

Die Anti-Evolute von H in Bezug auf die Achse CD ist na ihrer Entstehungsweise die erste negative Fusspunktencurve v H in Bezug auf den Centrum C. Also ist die Anti-Evolute von in Bezug auf CR die erste negative Fusspunktencurve von der gleic seitigen Hyperbel, die man durch Drehung von H um C über d Winkel $= 2$ DCR und Verkleinerung der Durchmesser mittel Multiplication mit cos 2 Wkl. DCR erhält ebenfalls in Bezug auf d Centrum C.

---

bilden von der Quasi-Normale und Quasi-Evolute („Analytische Geometr der höheren ebenen Curven" von G. Salmon, deutsch von Dr. W. Fiedl 2te Auflage, Art. 10_b), so achte ich mich der Merkwürdigkeit des besonder Falles wegen doch berechtigt einen neuen Namen einzuführen.

15) Ueber die Anwendung dieser Multiplication vergleiche man Juli Petersen's in fast alle modernen Sprachen übersetztes Werkchen „Method und Theorien".

Der Kürze wegen deuten wir im Folgenden die Curve, welche aus einer gegebenen Mittelpunktscurve Φ durch Drehung um den Mittelpunkt im Sinne der Uhrbewegung über den Winkel α und Multiplication der centralen Radien Vectoren mit m abgeleitet wird, mittelst des Symboles $\Phi(\alpha, m)$ an. Es ist dann die so eben gefundene gleichseitige Hyperbel als $H(2 \text{ Wkl. } DCR, \cos 2 \text{ Wkl. } DCR)$ zu bezeichnen.

Die Anti-Evolute von H in Bezug auf die Achsen ist in Fig. 11. vorgestellt; sie hat in der Richtung von jeder der beiden Asymptoten von H einen parabolischen Ast von besonderer Beschaffenheit; wir kommen im folgenden Abschnitte auf diese merkwürdige Curve zurück [16].

11. „Ersetzt man eine ungerade Anzahl der Schnittpunkte von einem Mittelpunktskegelschnitte K mit irgend einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten zu den Achsen von K parallel sind, durch die ihnen in K diametral gegenüber liegenden Punkte, so erhält man vier Punkte eines Kreises.

Ersetzt man eine ungerade Anzahl der Schnittpunkte von einer gleichseitigen Hyperbel H mit irgend einem Kreise durch die ihnen in H diametral gegenüber liegenden Punkte, so erhält man vier Punkte, die so mit einander zusammenhangen, dass jeder von ihnen der Höhenschnittpunkt ist des von den drei anderen bestimmten Dreiecks".

Ist von den vier Fusspunkten N_1, N_2, N_3, N_4 (Fig. 12.) der aus irgend einem unbekannten Punkte auf K zu fällenden Normalen nur die Verbindungslinie p von zwei aus ihnen gegeben, so findet man, nach den schönen Untersuchungen Joachimsthals [17]), die Verbindungslinie p' der beiden anderen, wenn man zum Pole P von p für K den in Bezug auf das Centrum C symmetrisch liegenden Punkt P_1' bestimmt und die senkrechten Projectionen dieses Punktes auf die Achsen von K mit einander verbindet. Dabei ist dann die supplementäre Sehne $N_1'N_2$ von N_1N_2 parallel zu $P_1'C$, also antiparallel zu N_3N_4

16) Mit Verweisung auf Artikel 27. bemerke ich hier nur noch, dass die in den Richtungen der Asymptoten von H liegenden Berührungspunkte der unendlich fernen Geraden mit der Anti-Evolute Rückkehrpunkte dieser Curve sind, was sich dadurch verrät, dass die beiden einer nämlichen Asymptote von H zukommenden Aeste in entgegengesetzten Richtungen in's Unendliche verschwinden.

17) „Ueber die Normalen der Ellipse und des Ellipsoids" (Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Band XXVI, Seite 172).

in Bezug auf die Achsen von K, und sind deshalb die Punkte N_1', N_2, N_3, N_4 nach Artikel 6. vier Punkte eines Kreises. Und dies bleibt offenbar der Fall, wenn man noch zwei der Punkte N_2, N_3, N_4 durch die ihnen diametral gegenüber liegenden Punkte von K ersetzt.

Dieser bekannte Joachimsthal'sche Satz ist aber einer Erweiterung fähig. Was nach dem Obigen von den vier Schnittpunkten des Mittelpunktskegelschnittes K mit irgend einer seiner Hyperbeln des Apollonius gilt, das kann auch von den vier Schnittpunkten von K mit irgend einer wohl durch die unendlich fernen Endpunkte A und B der Achsen von K, nicht aber durch das Centrum C von K gehenden gleichseitigen Hyperbel behauptet werden. Zum Beweise dieser Verallgemeinerung bemerke ich, dass die gleichseitigen Hyperbeln des von den Punkten A, B, N_3, N_4 als Basispunkte bestimmten Büschels in K eine quadratische Involution von Punkten N_1, N_2 einschneiden, welche auch von den parallelen Strahlen eines Strahlenbüschels mit unendlich fernem Scheitel getragen wird. Indem nämlich jede quadratische Involution auf K von einem Strahlenbüschel erzeugt werden kann, so enthält dieser Büschel in unserem Falle die unendlich ferne Gerade, da diese mit der Geraden N_3N_4 eine Curve des Büschels bildet. Es führt also die Ersetzung der durch N_3 und N_4 bestimmten Hyperbel des Apollonius durch irgend eine Curve des von A, B, N_3, N_4 bestimmten Büschels nur zu einer parallelen Verschiebung der Geraden p und also auch nur zu einer parallelen Verschiebung der Geraden $N_1'N_2$, was nach Artikel 6. die Lage der vier Punkte N auf einem Kreise nicht aufhebt.

Sind weiter N_1, N_2, N_3, N_4 (Fig. 13.) die Schnittpunkte der gegebenen gleichseitigen Hyperbel H mit irgend einem Kreise, so sind die Sehnen N_1N_2 und N_3N_4 nach Artikel 6. antiparallel in Bezug auf die Achsen von H und ist dies mit den supplementären Sehnen N_1N_2 und $N_1'N_2$ nach Artikel 4. in Bezug auf die Asymptoten von H der Fall. Also sind nach Artikel 5. die Sehnen $N_1'N_2$ und N_3N_4 zu einander senkrecht. Und da dies von den Sehnenpaaren $N_1'N_3$ und N_2N_4, $N_1'N_4$ und N_2N_3 ebenso bewiesen werden kann, haben die vier Punkte N_1', N_2, N_3, N_4 die im Satze angegebene merkwürdige Lage.

12. „Wenn eine gleichseitige Hyperbel einem Dreieck umgeschrieben ist, so geht sie auch durch den Schnittpunkt seiner Höhen. Ist das Dreieck rechtwinklig, so berühren also die umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln im Eckpunkte des rechten Winkels alle die von diesem Punkte auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte".

Dieser bekannte Satz [18]) ist eine unmittelbare Folge des zweiten Teiles des vorhergehenden. Es liegt nämlich in Fig. 13.) der dem Punkte N_1 der gleichseitigen Hyperbel H diametral gegenüber liegende Punkt N_1' ebenfalls auf H, und dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks $N_2N_3N_4$.

Beiläufig bemerke ich, dass diese Betrachtungen für den Ort der Mittelpunkte der einem Dreieck umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln den Neunpunktskreis dieses Dreiecks liefern.

13. „Die Polarfigur einer gleichseitigen Hyperbel H in Bezug auf irgend eine andere concentrische gleichseitige Hyperbel H_1 ist wieder eine concentrische gleichseitige Hyperbel H_2. Die reelle Achse von H_2 ist antiparallel zu der reellen Achse von H in Bezug auf die Achsen von H_1, und ihre Grösse a_2 ist an jene a und a_1 der reellen Achsen von H und H_1 gebunden durch die Gleichung $aa_2 = a_1^2$. Ist $H_1 = H(\alpha, m)$, so ist $H_2 = H_1(\alpha, m) = H(2\alpha, m^2)$. Und bei diesem Uebergange von H zu H_2 mittelst Drehung und Multiplication entspricht dem Berührungspunkte irgend einer Tangente von H wirklich der auf H_2 liegende Pol dieser Tangente in Bezug auf H_1.

Nimmt man bei einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel H noch die beiden Curven an, in welche H übergeht, wenn man sie in positivem und negativem Sinne um ihr Centrum C um den Winkel von 60^0 dreht, so erhält man drei Curven, die zu einander in der besonderen Beziehung stehen, dass jede von ihnen in Bezug auf irgend eine der beiden übrigen die Polarfigur der dritten ist [19])".

Ist die Polarfigur eines Kegelschnittes K in Bezug auf einen anderen Kegelschnitt K_1 im Allgemeinen wieder ein Kegelschnitt K_2 [20]), so folgt hier aus radialer Symmetrie in Bezug auf das gemeinschaftliche Centrum C von H und H_1 (Fig. 14.), dass die Polarfigur ein mit H und H_1 concentrischer Kegelschnitt ist. Nun sind aber die Asymptoten CX und CY von H in Bezug auf H_1 die Polaren der unendlich fernen Punkte dieser Polarfigur, d. h. CX und CY sind in Bezug auf H_1 die den Asymptoten der Polarfigur conjugirten Durchmesser. Also sind die Asymptoten der gesuchten Curve

---

18) Man vergleiche Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite 183, Aufgabe 113 und Salmon's „Conics", Artikel 228, Problem 1 und Artikel 315, Problem 9.

19) Einen analytischen Beweis dieses Satzes enthält meine „Notiz über die Lemniskate" (Sitzungsberichte d. k. Akad. der Wissensch. zu Wien, Band LXXXIX, 2te Abteilung, Seite 1254).

20) Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite 82.

in Bezug auf die Asymptoten CX_1 und CY_1 von H_1 antiparallel zu CX und CY und stehen sie deshalb auch senkrecht auf einander d. h. die gesuchte Curve ist ebenfalls eine gleichseitige Hyperbel H_2. Und dann sind auch die Achsen von H_2 antiparallel zu den Achsen von H in Bezug auf die Achsen von H_1.

Ist P ein Scheitel von H, also $CP = a$ und p seine Polare in Bezug auf H_1, so erkennt man, dass (nach Artikel 5.) p senkrecht steht auf der Achse CD_2 von H_2; denn CD, die den Scheitel P enthaltende Achse von H, ist antiparallel zu p in Bezug auf die Asymptoten von H_1 und CD und CD_2 sind es in Bezug auf die Achsen von H_1. Also ist p eine Scheiteltangente von H_2, der Schnittpunkt P_2 von CD_2 und p ein Scheitel von H_2 und $CP_2 = a_2$. Hieraus folgt im Vorübergehen, dass die Achse von H_2, welche antiparallel ist zu der reellen Achse CD von H in Bezug auf die Achsen von H_1, ihre reelle Achse ist. Ist weiter Q einer der beiden Schnittpunkte von CD mit H_1 und P' der Schnittpunkt von CD mit p, so ist $CP.CP' = CQ^2$; denn die in Bezug auf H_1 zu einander conjugirten Punkte P, P' gehören einer auf CD liegenden Involution an, welche C zum Centralpunkte und Q zu einem der Doppelpunkte hat. Aber wenn Q_0 der Schnittpunkt ist von CD_2 mit der zu p parallelen Tangente q von H_1 in Q, so hat man auch $CP_2 : CP' = CQ_0 : CQ$ und diese Proportion giebt mit der angeführten Gleichung unmittelbar die Relation $CP.CP_2 = CQ.CQ_0$. Sind nun endlich Q_x und Q_y die Schnittpunkte von q mit den Asymptoten CX_1 und CY_1 von H_1, so hat man nach einander $CQ.CQ_0 = QQ_x.CQ_0 = \frac{1}{2}CQ_x.CQ_y$ und deshalb, da nach einem bekannten Satze der gleichseitigen Hyperbel [21] $\frac{1}{2}CQ_x.CQ_y = a_1^2$ ist, auch $aa_2 = a_1^2$ [22]).

Ist $H_1 = H(\alpha, m)$, so ist deshalb $\alpha =$ Wkl. DCD_1 und $m = \frac{a_1}{a}$. Aber wir finden Wkl. $D_2CD_1 =$ Wkl. DCD_1 und $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1}{a}$; also ist $H_2 = H_1(\alpha, m) = H(2\alpha, m^2)$. Und hierbei ist es, wie der Satz oben angiebt, bemerkenswert, dass der Uebergang von H zu H_2 durch Drehung und Multiplication ein beliebig auf H gewählter Punkt R von H (Fig. 15.) in den Punkt R_2 von H_2 überführt, dessen Polare in Bezug auf H_1 die Tangente von H in R ist. Ist nämlich r die Tangente von H in R und R_2 der Pol von r in Bezug auf H_1, so ist die Tangente r antiparallel zu CR in Bezug auf CY und zu CR_2

21) Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite 94.

22) Aus diesen metrischen Relationen beweist man ohne Mühe, dass die gleichseitige Hyperbel, wie Herr Brocard mir brieflich mitteilte, ihre eigene Polarfigur ist in Bezug auf den sie doppelt berührenden concentrischen Kreis.

in Bezug auf CY_1; also ist nach Artikel 5. der Winkel $RCR_2 =$ 2 Wkl. $YCY_1 = 2\alpha$, u. s. w. [23]).

Der zweite Teil des Satzes ist eine unmittelbare Folge des ersten.

14. „Wenn man von den zwei Curven C_1^n und C_2^n, welche man mittelst Drehung einer gegebenen Curve C^n um irgend einen Punkt M in positivem und negativem Sinne um den Winkel von 60^0 erhält, jene Elemente einander entsprechen lässt, welche sich aus einem nämlichen Elemente von C^n entwickelt haben, so ist die Enveloppe der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte von C_1^n und C_2^n die von M aus halbirte erste negative Fusspunktencurve von C^n für M und der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Tangenten von C_1^n und C_2^n die von M aus verdoppelte erste positive Fusspunktencurve von C^n für M."

Ist in Fig. (16.) der Punkt M der Drehpunkt, und sind P, P_1, P_2 entsprechende Punkte der drei Curven C^n, C_1^n, C_2^n, so steht die Verbindungslinie P_1P_2 in der Mitte von MP auf MP senkrecht, was den ersten Teil des Satzes beweiset. Sind weiter p, p_1, p_2 die entsprechenden Tangenten der Curven in diesen Punkten, und bezeichnet man den Schnittpunkt von p mit MP_1 als Q, von p_1 mit MP_2 als Q_1 und von p_2 mit MP als Q_2, so ist Wkl. $MP_1Q_1 =$ Wkl. MP_2Q_2. Deshalb liegt der Schnittpunkt P' von p_1 und p_2, dessen Ort wir in dem zweiten Teil des Satzes angegeben haben, auf dem durch M, P_1 und P_2 gehenden Kreise, ist der Winkel $P_1P'P_2$ als das Supplement vom Winkel $P_2MP_1 = 60^0$ und wird von der durch die Mitte M des Kreisbogens P_2MP_1 gehenden Gerade $P'M$ halbirt. Aber da P offenbar der Mittelpunkt des durch M, P_1, P_2 und P' gehenden Kreises ist, und p mit p_1 und p_2 ein gleichseitiges Dreieck bildet, so steht p in der Mitte Q' von MP' auf MP' senkrecht, und ist hiermit der zweite Teil des Satzes bewiesen.

Ist C^n die gleichseitige Hyperbel von Artikel 13. und sind also C_1^n und C_2^n die dort auftretenden Curven H_1 und H_2, so ist die

23) Wenn H durch den Scheitel P_1 von H_1 geht, so geht H_1 aus Aehnlichkeitsgründen durch den Scheitel P_2 von H_2 und berührt nach der letzten Bemerkung des Textes die Scheiteltangente von H, welche dem Punkte P zukommt, ebenfalls die H_1 in P_2. Also ist der Ort der Scheitel P von den gleichseitigen Hyperbeln H mit einem gemeinschaftlichen Durchmesser P_1P_1' als die erste positive Fusspunktencurve der gleichseitigen Hyperbel H_1 für ihren Mittelpunkt C eine Lemniskate (Steiner, a, a. O., zweiter Band, Seite 414).

Enveloppe der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte von H_1 und H_2 als die von M aus halbirte erste negative Fusspunktencurve von H für M die von C aus halbirte Curve von Fig. 11., also di Anti-Evolute von der von C aus halbirten gleichseitigen Hyperb H in Bezug auf die Achsen. Und der Ort des Schnittpunktes de entsprechenden Tangenten von H_1 und H_2 ist als die von M aus ve doppelte erste positive Fusspunktencurve von H für M, d. h. als di erste positive Fusspunktencurve der von M aus verdoppelten gleich seitigen Hyperbel H für M eine Lemniskate von leicht angeblich Lage.

Ersetzt man den Winkel von 60^0 durch irgend einen Winkel so wird die Enveloppe die aus M mit $\cos\alpha$ multiplicirte erste neg tive und der Ort die aus M mit $\sec\alpha$ multiplicirte erste positi Fusspunktencurve von C^n für M. Indem dieses Resultat für d Enveloppe unmittelbar einleuchtet, findet man in Bezug auf den O dass $MP_2P'P_1$ wie oben ein Kreisviereck ist und der Winkel P_1P' von $180^0-2\alpha$ durch MP' gehälftet wird. Deutet man dann wei Wkl. $MPQ =$ Wkl. $MP_1Q_1 =$ Wkl. MP_2Q_2 durch β an, so hat m Wkl. $MQP = 180^0-(\alpha+\beta)$ und Wkl. $Q'MP = (\alpha+\beta)-90^0$, u steht also QQ' senkrecht auf MP'. Und endlich folgt aus den R lationen $MQ' = MQ\sin(\alpha+\beta)$ und $MP'\cos\alpha = MQ\sin(\alpha+\beta)$ u $MQ'\sec\alpha = MP'$[24]).

---

24) Für die Anwendung des zweiten Teiles dieses allgemeineren Sa auf den Fall einer gleichseitigen Hyperbel vergleiche man meine „Notiz die Lemniskate" (a. a. O., Seite 1265).

VI.

Erweiterung des Aoust'schen Problems der Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

Die in Rede stehende, zuerst von Aoust untersuchte und in T. LXVI. S. 386. von mir aufs neue behandelte und gelöste Aufgabe ist: Eine Curve derart zu finden, dass die Einhüllende der Krümmungsaxe der Einhüllenden ihrer Krümmungsaxe der Urcurve congruent sei.

Die Einhüllende der Krümmungsaxe ist nur eine unter den abgeleiteten Curven, die zum System der Tangente, Haupt- und Binormale einer Urcurve in definirter Beziehung stehen. Man würde also auch Curven von andrer Beziehung, z. B. die Evolvente, in die Aufgabe einführen können. Doch verspricht es wol bessern Erfolg, wenn wir die Beziehung sogleich allgemein auffassen. Die Bedingung bleibe dieselbe: die zweite Ableitung soll der Urcurve congruent sein; dagegen behalten wir uns die Entscheidung vor, ob sie durch die Urcurve, wie vorhin, oder durch die Beziehung erfüllt werden soll, was auf den Anfang der Untersuchung keinen Einfluss hat.

Die Bezeichnungen seien dieselben wie in der citirten Abhandlung: es bedeuten fgh, $f'g'h'$, lmn die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale, $\partial\tau$ und $\partial\vartheta$ die Contingenzwinkel der consecutiven Tangenten und Krümmungsaxen, s den Bogen der Curve, der Accent bezeichne die Differentiation nach τ, die Indices an obigen Buchstaben unterscheiden die Zugehörigkeit zu verschiedenen Curven.

Ist nun der die Curve s_1 erzeugende Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ relativ zum begleitenden Axensystem (Tangente, Hauptnormale, Binormale) der

Curve s bestimmt, so sind die Relationen der Coordinaten in der Form gegeben:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + pf + qf' + rl \\ y_1 &= y + pg + qg' + rm \\ z_1 &= z + ph + qh' + rn \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Hieraus gehen die Relationen der Richtungscosinus der begleitenden Axen hervor:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= af + bf' + cl; \; g_1 = ag + \dots \\ f_1' &= a_1 f + b_1 f' + c_1 l; \; g_1' = a_1 g + \dots \\ l_1 &= a_2 f + b_2 f' + c_2 l; \; m_1' = a_2 g + \dots \end{aligned}\right\} \text{etc. mit gleichen Coefficienten.} \qquad (2)$$

und zugleich das Bogenelement ∂s_1 und die Contingenzwinkel $\partial\tau_1, \partial\vartheta_1$.

Ueber das Bogenelement ∂s_1 kann man, wie ich in meiner Curventheorie gezeigt habe, noch beliebig verfügen und die Coordinaten $x_1 y_1 z_1$ dadurch berechnen, nachdem alle Grössen, die keine Linearausdehnung enthalten, der Aufgabe gemäss bestimmt sind. Daher würde jeder andre Weg unnötige Complicationen schaffen als der, welcher von der Gl. (2) ausgeht und erst nach deren Erledigung die Lineargrössen zuzieht.

In den Gl. (1)(2) sind alle Grössen als Functionen einer Variabeln anzusehen (ohne constante Werte auszuschliessen).

Wir nennen nun die Darstellung einer Curve s_1, die gemäss der Gl. (1) oder (2) in Beziehung zur Curve s steht, eine **Ableitung** von derselben nach einem durch die Coefficienten ausgedrückten **Princip**.

Diese Erklärung lässt indes noch zweierlei Auffassung zu. Sind alle Grössen Functionen eines Parameters φ, so kann man φ entweder zum Princip oder zur Curve rechnen. Der Unterschied zeigt sich, wenn man von verschiedenen Curven nach demselben Princip ableiten will. Im ersten Fall bleiben a, b, c immer dieselben Functionen von φ, während τ, ϑ in andre Functionen von φ übergehen. Im letzten Falle muss nicht nur φ mit Veränderung der Curve mit verändert werden, sondern es müssen auch a, b, c derart definirt sein, dass die veränderte Abhängigkeit vom veränderten Parameter substituirt werden kann. Sei z. B. τ selbst Parameter,

$$\vartheta = \vartheta(\tau); \; a = a(\tau, \vartheta(\tau)); \text{ etc.}$$

dann wird bei Anwendung desselben Princips auf eine neue Curve im ersten Falle

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(\tau_1);\ \tau_1 = \tau_1(\tau);\ a = a(\tau,\ \vartheta(\tau));\ \text{etc.}$$

ı letztern

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(\tau_1);\ \tau_1 = \tau_1(\tau);\ a = a(\tau_1,\ \vartheta_1(\tau_1));\ \text{etc.}$$

Dementsprechend hat insbesondere die Widerholung einer Ab-
eitung verschiedenen Sinn, und die zu untersuchende Aufgabe ist im
weiten Falle eine andre als im ersten.

Das Folgende behandelt nur die Aufgabe im erstern Sinne, d. i.
lie leichtere. Es werden bei Ableitung erst von s, dann von s_1 aus
lie a, b, c als dieselben Functionen vom ursprünglichen τ betrachtet.

§. 2. Bestimmung der Richtungen.

Nehmen wir an, dass die zweite Ableitung von s nicht nur con-
gruent, sondern auch von gleicher Stellung mit s sei, so sind in den
ntsprechenden Punkten die begleitenden Axen beider Curven gleich-
erichtet, und man hat:

$$\left.\begin{aligned} f &= af_1 + bf_1' + cl_1 \\ f' &= a_1f_1 + b_1f_1' + c_1l_1 \\ l &= a_2f_1 + b_2f_1' + c_2l_1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dies verglichen mit dem System (2) gibt als ausreichende Be-
ngungen:

$$b_2 = c_1;\quad c = a_2;\quad a_1 = b \tag{4}$$

Die erste gibt:

$$c_1 = \begin{vmatrix} c\,c_1 \\ a\,a_1 \end{vmatrix}$$

s ist

$$ca_1 = (1+a)\,c_1 \tag{5}$$

Das Product der zwei letzten gibt:

$$ca_1 = \begin{vmatrix} b\,b_1 \\ c\,c_1 \end{vmatrix} b = b^2c_1 - bcb_1$$
$$= (1-a^2-c^2)\,c_1 + c(aa_1+cc_1)$$
$$= (1-a^2)\,c_1 + aca_1$$

s ist

$$(1-a)\,[ca_1 - (1+a)\,c_1] = 0$$

ne Gleichung, die schon durch (5) erfüllt ist. Ferner gibt die
uadratsumme der 2 letzten Gl. (4):

$$b^2 + c^2 = a_1^2 + a_2^2$$

Beide Seiten sind bedingungslos $= 1 - a^2$, folglich sind alle 3
Bedingungen erfüllt, wenn es die erste ist.

Sei nun

$$a = \cos 2\alpha;\quad b = \sin 2\alpha \cos\beta;\quad c = \sin 2\alpha \sin\beta \qquad (6)$$

also

$$f_1 = f\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\,(f'\cos\beta + l\sin\beta) \qquad (7)$$

Dies differentiirt gibt nach Vergleichung der 2 Ausdrücke von f_1'

$$\left.\begin{aligned} a_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau} &= -\sin 2\alpha\,(2\alpha' + \cos\beta) \\ b_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau} &= \cos 2\alpha\cos\beta\,(2\alpha' + \cos\beta) - \sin\beta\,[(\beta' + \vartheta')\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \sin\beta] \\ c_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau} &= \cos 2\alpha\sin\beta\,(2\alpha' + \cos\beta) + \cos\beta\,[(\beta' + \vartheta')\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\sin\beta] \end{aligned}\right\} (8)$$

Nach Einsetzung dieser Werte wird Gl. (5):

$$\begin{aligned} 0 &= 2\cos^2\alpha\,\{\sin\beta\,(2\alpha' + \cos\beta) + \cos\beta\,[(\beta' + \vartheta')\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\sin\beta]\} \\ &= 4\cos^2\alpha\,\{\alpha'\sin\beta + \sin\alpha\,[(\beta' + \vartheta')\cos\alpha + \sin\alpha\sin\beta]\cos\beta\} \end{aligned}$$

Die eine Lösung ist $\cos\alpha = 0$. Hier ist

$$f_1 = -f;\quad f_1' = \mp f';\quad l_1 = \pm l;\quad \tau_1 = \pm\tau$$

die andre erfordert die Integration der Gleichung:

$$\partial\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\,[\partial(\beta + \vartheta)\cos\alpha + \partial\tau\sin\alpha\sin\beta] = 0 \qquad (9)$$

Wird nun für gegebenes Ableitungsprincip die Curve gesucht so hat man:

$$\partial\vartheta = -\partial\beta - \partial\tau\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\beta - \frac{\partial\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\alpha\cos\alpha} \qquad (10)$$

wo α und β in τ gegeben sind. Durch ϑ als Function von τ ist die Curvenclasse bestimmt, doch hängt ihre Darstellung von der Integration einer linearen Gleichung 2. Ordnung ab, ist daher im allgemeinen nicht ausführbar.

Ferner gibt es einzelne Werte von α, β, welche die Gleichung unabhängig von ϑ erfüllen, so dass die Curve willkürlich bleibt. Hiervon später.

Sucht man hingegen das Ableitungsprincip für beliebig gegebene Curve, also für gegebene Relation zwischen τ und ϑ, so ist Gl. (9) linear in $\cot\alpha$, und man findet:

$$\cot\alpha = -\frac{1}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial\vartheta}\right)^2}}\int\frac{\partial k}{\vartheta'};\qquad \cot\beta = -\frac{\partial k}{k\partial\vartheta} \qquad (11)$$

wo k willkürliche Function von τ oder ϑ ist.

Eliminirt man jetzt $\beta'+\vartheta'$ mittelst der Gl. (10), so werden die Gl. (8), deren Quadratsumme den Wert von $\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau}$ ergibt:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sin 2\alpha\cos\beta \\ b_1 &= 2\sin^2\alpha\cos^2\beta - 1 \\ c_1 &= 2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$-\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau} = \frac{2\alpha'}{\cos\beta} + 1 \qquad (13)$$

woraus in Verbindung mit den Gl. (6):

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \sin 2\alpha\sin\beta \\ b_2 &= 2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta \\ c_2 &= 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - 1 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Differentiirt man die dritte Gl. (2), so erhält man, analog (8):

$$-a_1\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\tau} = a_2' - b_2$$

$$= 2\alpha'\cos 2\alpha\sin\beta + \beta'\sin 2\alpha\cos\beta - 2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta$$

woraus:

$$\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\tau} = -2\alpha'\cot 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta - \beta' + \mathrm{tg}\,\alpha\sin\beta \qquad (15)$$

das ist nach Gl. (10)

$$\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\tau} = \vartheta' + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,(\alpha' + \cos\beta) \qquad (16)$$

§. 3. Bestimmung der Lineargrössen.

Damit die neue Ableitung von s_1 nach dem Princip (1) der Urcurve s congruent und von gleicher Stellung mit ihr sei, muss sein

$$x + \text{const} = x_1 + pf_1 + qf_1' + rl_1;\ \text{etc.} \qquad (17)$$

Differentiirt man die Gl. (1) und (17) und vergleicht die Coefficienten bzhw. von f, f', l und f_1, f_1', l_1, so ergeben sich die 6 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a\partial s_1 &= \partial s + \partial p - q\partial\tau \\ b\partial s_1 &= \partial q + p\partial\tau - r\partial\vartheta \\ c\partial s_1 &= \partial r. \quad + q\partial\vartheta \\ \partial s_1 &= a\partial s - \partial p + a\partial\tau_1 \\ 0 &= b\partial s - \\ 0 &= c\partial s \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

woraus durch Elimination von ∂p, ∂q, ∂r:

$$\left.\begin{aligned}(1+a)(\partial s_1-\partial s) &= q(\partial\tau_1-\partial\tau)\\ b(\partial s_1-\partial s) &= -p(\partial\tau_1-\partial\tau)+r(\partial\vartheta_1-\partial\vartheta)\\ c(\partial s_1-\partial s) &= -q(\partial\vartheta_1-\partial\vartheta)\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Eliminirt man q, so kommt:

$$\frac{\partial\vartheta_1-\partial\vartheta}{\partial\tau_1-\partial\tau}=-\frac{c}{1+a} \tag{20}$$

wie auch Gl. (13) und (16) ergeben. Eliminirt man die Differentiale, so erhält man:

$$(1+a)p+bq+cr=0 \tag{21}$$

Die Gl. (18) lassen sich jetzt vertreten durch die 3 letzten derselben und die Gl. (19); letztere wieder durch

$$\partial s_1=\partial s+q\frac{\partial\tau_1-\partial\tau}{1+a} \tag{22}$$

und durch die Gl. (20) (21). Eliminirt man noch ∂s_1, so hat man im ganzen die 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}-(1-a)\partial s &= \partial p-q\frac{a\partial\tau_1+\partial\tau}{1+a}\\ b\,\partial s &= \partial q+p\,\partial\tau_1-r\partial\vartheta_1\\ c\,\partial s &= \partial r+q\partial\vartheta_1\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

woraus, nach Multiplication mit $1+a$, b, c und Addition:

$$0=(1+a)\partial p+b\partial q+c\partial r+bp\partial\tau_1-q(a\partial\tau_1+\partial\tau-c\partial\vartheta_1)-br\partial\vartheta_1$$

das ist nach Gl. (21)

$$p\partial a+q\partial b+r\partial c=bp\partial\tau_1-q(a\partial\tau_1+\partial\tau-c\partial\vartheta_1)-br\partial\vartheta_1$$

Diese Gleichung zeigt sich nach Einführung der Werte (6) (13) (15) für a, b, c, $\partial\tau_1$, $\partial\vartheta_1$ identisch mit (21), folglich ist jede der Gl. (23) eine Folge der beiden andern. Durch Verbindung der 2 letzten erhält man:

$$\begin{aligned}(1-a^2)\partial s &= \partial(bq+cr)+bp\partial\tau_1+(cq-br)\partial\vartheta_1-q\partial b-r\partial c\\ 0 &= \partial(cq-br)+cp\partial\tau_1-(bq+cr)\partial\vartheta_1-q\partial c+r\partial b\end{aligned}$$

Führt man die Werte (6) ein und setzt

$$q=u\cos\beta-v\sin\beta;\qquad r=u\sin\beta+v\cos\beta \tag{24}$$

so werden die beiden Gleichungen:

$$\partial s \sin 2\alpha = \partial u - u\partial\tau_1 \operatorname{tg}\alpha\cos\beta - v(\partial\vartheta_1 + \partial\beta)$$

$$0 = \partial v \,.\, \sin 2\alpha + u[2\partial\tau_1 \sin^2\alpha \sin\beta + (\partial\vartheta_1 + \partial\beta)\sin 2\alpha]$$

und nach Substitution der Werte (13) (15) von $\partial\tau_1$ und $\partial\vartheta_1$:

$$\partial s \sin 2\alpha = \partial u + u \operatorname{tg}\alpha(2\partial\alpha + \partial\tau\cos\beta) + v\left(\frac{2\partial\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg} 2\alpha} - \partial\tau \operatorname{tg}\alpha\sin\beta\right) \quad (25)$$

$$0 = \partial v \,.\, \sin 2\alpha - 2u\partial\alpha \operatorname{tg}\beta \quad (26)$$

Ist nun ∂s gegeben, so findet man zuerst v durch Integration der linearen Gleichung 2. Ordnung, welche aus der Elimination von u hervorgeht, und dann u, hieraus q und r nach (24), dann p vermittelst der Gl. (21), d. i.

$$p\cos\alpha + (q\cos\beta + r\sin\beta)\sin\alpha \quad (27)$$

mithin das Ableitungsprincip aus gegebener Urcurve.

Da sich jedoch die verlangte Integration nicht allgemein ausführen lässt, so bleibt uns allein folgende Aufgabe als allgemein lösbar übrig.

Es sind die Richtungsgrössen einer Curve f, g, h gegeben, man soll deren Bogen und das Ableitungsprincip finden, nach dessen zweimaliger Anwendung eine der Urcurve congruente Curve entsteht.

Die Lösung enthält 2 willkürliche Functionen k und v. Aus f, g, h findet man zuerst τ und ϑ. Als Parameter, d. h. unabhängige Variabeln, mit dessen Variation die Urcurve s erzeugt wird, sei τ angenommen. Nach den Gl. (11) ergeben sich α und β. Aus α, β, v ergibt sich nach (26)

$$u = \frac{\partial v}{\partial\alpha}\,\frac{\sin 2\alpha}{2\operatorname{tg}\beta}$$

Die Gl. (24) (21) ergeben p, q, r, und ∂s findet man in Gl. (25), dann ∂s_1 in Gl. (19) dargestellt. Ausserdem sind f_1, g_1, h_1 durch Gl. (2) bekannt, woraus die Werte

$$x_1 = \int f_1 \partial s_1\,, \quad y_1 = \int g_1 \partial s_1\,, \quad z_1 = \int h_1 \partial s_1$$

hervorgehen.

§. 4. Beispiele.

Gl. (9) wird unabhängig von ϑ erfüllt, wenn α constant, und $\cos\beta = 0$ ist, ferner für $\sin\alpha = 0$. Hier haben die Gl. (13) (16) keine Gültigkeit.

Im Falle $\sin\alpha = 0$ wird $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, und die Richtungsgrössen von s und s_1 einander gleich. Da alsdann auch $\partial\tau_1 = \partial\tau$

wird, so muss nach der ersten Gl. (9) $\partial s_1 = \partial s$ sein, mithin beide Curven identisch werden. Eine Ableitung ist nicht möglich.

Für den Fall $\cos\alpha = 0$, wo β willkürlich ist, braucht man nur $\cos\beta = 0$ zu setzen; dann ist er auch in dem erst genannten Falle enthalten. Man findet dann:

$$f_1 = -f;\quad f_1' = -f';\quad l_1 = l$$
$$\partial\tau_1 = \partial\tau;\qquad \partial\vartheta_1 = -\partial\vartheta$$

und nach Einsetzung der Werte $a = -1$, $b = c = 0$ in die Gl. (19):

$$q = 0;\qquad r = 0$$

dann nach der zweiten Gl. (18) auch $p = 0$. Auch hier sind die Curven s und s_1 congruent.

Sei α constant, $\beta = R$, also

$$\begin{aligned}
f_1 &= f\cos 2\alpha + l\sin 2\alpha\\
f_1' &= -f'\\
l_1 &= f\sin 2\alpha - l\cos 2\alpha\\
\tau_1 &= -\tau\cos 2\alpha + \vartheta\sin 2\alpha\\
\vartheta_1 &= \tau\sin 2\alpha + \vartheta\cos 2\alpha
\end{aligned}$$

Hier zeigt sich die Abweichung von den Gl. (13) (16).

Die Gl. (19), deren erste und dritte übereinstimmen, geben:

$$\left.\begin{aligned}
\partial s_1 - \partial s &= q(\partial\vartheta\,\mathrm{tg}\,\alpha - \partial\tau)\\
0 &= (p\cos\alpha + r\sin\alpha)(\partial\vartheta\,\mathrm{tg}\,\alpha - \partial\tau)
\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

Entweder ist also

$$\vartheta' = \cot\alpha;\qquad \partial s_1 = \partial s$$

oder

$$p\cos\alpha + r\sin\alpha = 0\tag{29}$$

Nimmt man hierzu die 3 letzten Gl. (18), und eliminirt p und ∂s_1, so werden die 4. und 6te identisch, und es bleibt:

$$\partial s\sin 2\alpha = \partial r + q(\partial\tau\sin 2\alpha + \partial\vartheta\cos 2\alpha)\tag{30}$$

$$\partial q = r(\partial\tau\,\mathrm{tg}\,\alpha + \partial\vartheta)\tag{31}$$

Setzt man

$$\eta = \tau\sin\alpha + \vartheta\cos\alpha$$

so wird

$$r = \frac{\partial q}{\partial\eta}\cos\alpha\tag{32}$$

$$\frac{\partial s}{\partial\eta}\sin 2\alpha = \frac{\partial^2 q}{\partial\eta^2}\cos\alpha + q\left(\frac{\partial\tau}{\partial\eta}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\right)\tag{33}$$

Letztere Gleichung ist unter andern integrabel für Urcurven constanter Steigung, wo

$$\frac{\vartheta}{\tau} = \operatorname{tg} \lambda$$

constant ist. Hier wird

$$\tau = \sigma \cos \lambda; \quad \vartheta = \sigma \sin \lambda; \quad \eta = \sigma \sin(\lambda + \alpha)$$

und die Gleichung (30) lautet:

$$2 \frac{\partial s}{\partial \sigma} \sin \alpha \sin(\lambda + \alpha) = \frac{\partial^2 q}{\partial \sigma^2} + \mu^2 q \tag{34}$$

wo

$$\mu^2 = \frac{\sin(\lambda + \alpha) \sin(\lambda + 2\alpha)}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\lambda + 3\alpha)}{2 \cos \alpha}$$

Ihr Integral ist

$$q = \frac{2}{\mu} \sin \alpha \sin(\lambda + \alpha)(\sin \mu\sigma \int \partial s \cos \mu\sigma - \cos \mu\sigma \int \partial s \sin \mu\sigma)$$

daher erhält man nach Gl. (32) (29):

$$r = 2 \sin \alpha \cos \alpha (\cos \mu\sigma \int \partial s \cos \mu\sigma + \sin \mu\sigma \int \partial s \sin \mu\sigma)$$
$$p = -2 \sin^2 \alpha (\cos \mu\sigma \int \partial s \cos \mu\sigma + \sin \mu\sigma \int \partial s \sin \mu\sigma)$$

Die Gleichungen der Urcurve sind:*)

$$x = s \sin \lambda; \quad y = \cos \lambda \int \partial s \cos \sigma; \quad z = \cos \lambda \int \partial s \sin \sigma$$

Zufolge den Gl. (1) sind dann nach Einsetzung der bekannten Werte die Gleichungen der ersten Ableitung:

$$x_1 = s \sin \lambda + 2M \sin \alpha \cos(\lambda + \alpha)$$

$$y_1 = \cos \lambda \int \partial s \cos \sigma - 2 \sin \alpha \sin(\lambda + \alpha)\left(M \sin \sigma + \frac{N}{\mu} \sin \sigma\right)$$

$$z_1 = \cos \lambda \int \partial s \sin \sigma - 2 \sin \alpha \sin(\lambda + \alpha)\left(M \sin \sigma - \frac{N}{\mu} \cos \sigma\right)$$

wo

$$M = \cos \mu\sigma \int \partial s \cos \mu\sigma + \sin \mu\sigma \int \partial s \sin \mu\sigma$$
$$N = \sin \mu\sigma \int \partial s \cos \mu\sigma - \cos \mu\sigma \int \partial s \sin \mu\sigma$$

Statt die Urcurve zu specialisiren, kann man die Gl. (30) (31) auch dadurch lösen, dass man q als willkürlich betrachtet und ∂s resultiren lässt. Es sind dann nur f, g, h beliebig gegeben, und man findet unendlich' viele, sämtlich derselben Classe angehörige, nur durch die Dimensionen verschiedene Urcurven nebst entsprechenden Ableitungsprincipen.

*) T. LVI. S. 63. Hoppe, Curventheorie S. 72.

VII.

Transformationen der elliptischen Integrale und Functionen in Verbindung mit der Theorie der Kettenlinie.

Von

Emil Oekinghaus.

Erster und zweiter Teil.

Die von Abel und Jacobi in die Mathematik eingeführten elliptischen Functionen und deren Reihenentwickelungen scheinen in analytischer Hinsicht zwar zu einem gewissen Abschluss gelangt zu sein, so dass es schwer sein dürfte, auf diesem so viel durchforschten Gebiete noch etwas Nennenswertes zu Tage zu fördern; dagegen ist wohl bisher unbemerkt geblieben, dass auch nach geometrischer Richtung hin diesen Functionen und Reihen eine nicht geringe Bedeutung zukommt, welche die Theorie derselben in neuem Lichte erscheinen lässt.

Es ist eine zunächst durch den Kreis vermittelte zum Zweck einer geometrischen Darstellung dieser Functionen eingeführte Transformation, welche in allen auf Reihenentwickelungen bezüglichen Untersuchungen sich als eine überaus reiche Quelle neuer wertvoller Relationen zeigt und aus dem Grunde zu fast unerschöpflichen Neubildungen Veranlassung gibt, weil jede transformirte Reihe einer mehrfachen Transformation unterworfen werden kann. Bei der Ableitung einer grossen Zahl elliptischer Functionen treten einzelne Reihen von so rascher Convergenz auf, dass mehrere derselben einfachen geschlossenen Ausdrücken gleich gesetzt werden können, und ferner führt die Specialisirung verschiedener dieser Formen zu neuen Sätzen der höheren Arithmetik, worunter einer eine Verallgemeinerung

eines von Jacobi unter ähnlichen Verhältnissen gefundenen Satzes zu enthalten scheint.

Die eigentliche Bedeutung der Transformation besteht aber darin, dass dieselbe mit der Kettenlinie in einigen Zusammenhang tritt, indem nicht blos sämmtliche Eigenschaften letzterer formell in Reihenform sich darstellen lassen, sondern auch die Curve selbst wieder zum Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen benutzt werden kann. Durch diese Verbindung der Analysis mit der Geometrie zugleich unter Anwendung der Differentiation und Integration werden neue analytische Verhältnisse geometrischer Natur gewonnen und auch teilweise vermittelst einer dynamischen Betrachtung und Einkleidung in mechanischem Sinne gedeutet. Auch haben wir zur Berechnung der unvollständigen elliptischen Integrale der 1. und 2. Art neue Reihenentwickelungen abgeleitet, deren Convergenz wohl nichts zu wünschen übrig lässt. Die Methode des Imaginairen konnte ebenfalls mit Erfolg verwertet werden, wodurch die bekannteren elliptischen Functionen zu neuen Darstellungen gelangten.

Ebenso wichtig wie merkwürdig ist die Art, wie der irreductible Fall der kubischen Gleichungen in Verbindung mit der Kettenlinie und der Theorie der elliptischen Functionen auftritt und damit eine bestimmte Verwandtschaft dieser Curve mit der von uns früher in anderm Sinne behandelten Lemniskate und gleichseitigen Hyperbel documentirt. Indem wir nun nach dieser Richtung hin die Eigenschaften der Lemniskate weiter untersuchten, resultirte eine ganze Classe neuer eigenartiger Gleichungen, von denen die genannten Fälle der Gleichungen 3. Grades die untere Grenze bilden, während die allgemeine Lösung der diesen verwandten höheren Gleichungen vermittelst der Curve in einer der Cardanischen entsprechenden Formel auf das einfachste und eleganteste vermittelt wird.

Zum Schluss haben wir noch eine geometrische Darstellung von Wurzelausdrücken aus den Eigenschaften der Kettenlinie abgeleitet, die sich durch Leichtigkeit und Einfachheit empfiehlt.

Erster Teil.

I.

Wir geben zunächst die geometrischen Relationen für diejenigen Verhältnisse, welche aus den verschiedenen Lagen einer um einen festen Punkt drehbaren Geraden zu einem Kreise hervorgehen. Die Entfernung dieses Punktes vom Centrum sei R, der Radius a. Die Gerade schneide den Kreis in 2 Punkten, welche mit dem Centrum

O verbunden die Centriwinkel $2\varphi_1$ und $2\varphi_2$ bestimmen. Den 2. Schnittpunkt der Centrale RO (Fig. 1.) verbinden wir mit den genannten Punkten P_1 und P_2 durch Sehnen, welche verlängert mit der Secante RP_2P_1 die Winkel φ_2 und φ_1 bez. einschliessen, endlich bezeichnen wir noch den Steigungswinkel der Geraden zur Centrale mit $\tau = 90^0 - \alpha$. Demnach hat man, wenn die Strecken RP_1 und RP_2 bezüglich x_1 und x_2 genannt werden $x_1 + x_2 = R\cos\tau$ und $x_1x_2 = R^2 - a^2$ aber auch die quadratische Gleichung

$$1)\qquad x^2 - 2R\cos\tau . x + R^2 - a^2 = 0$$

Die Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi$, welche leicht abzuleiten ist, wird dargestellt durch

$$2)\qquad \operatorname{tg}\varphi^2 - \frac{2a}{R-a}\cot\tau . \operatorname{tg}\varphi + \frac{R+a}{R-a} = 0$$

Da wir noch die Formen $\sin\varphi_1 \sin\varphi_2$ und $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2$ nötig haben, so bemerken wir, dass dieselben aus der Gleichung

$$2)_* \qquad \operatorname{tg}\varphi^2 - A\operatorname{tg}\varphi + B = 0$$

leicht berechnet werden können, man findet

$$3)\quad \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + (1-b)^2}}, \quad \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (1-b)^2}}$$

Wir setzen nun für die nachfolgenden Untersuchungen fest, dass die Winkel $\varphi_1 \varphi_2$ die Amplituden zweier elliptischen Integrale der ersten Art seien, deren Argumente einer Bedingungsgleichung genügen, die wir wie folgt ableiten.

Das Additionstheorem der elliptischen Integrale 1. Art basirt auf der Bedingungsgleichung

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \triangle(\varphi) = \cos\varphi$$

die wir nach Potenzen von φ als Amplitude eines analogen Integrals entwickeln und für welche demnach die Beziehungen 3) aus der Gleichung 2) zu berechnen sind.

Man findet nach einigen Entwickelungen schliesslich

$$4)\quad \cos\varphi^2\left(\frac{a^2}{\sin\tau^2} - z^2\frac{(R+a)^2}{4}\right) - a\frac{(R-a)}{\sin\tau}\cos\varphi + z^2\frac{(R+a)^2}{4} - Ra = 0$$

deren Wurzeln zwei Amplituden und also auch 2 Integrale bestimmen. Man bemerke aber, was für das folgende von Bedeutung ist, dass das gleich Null gesetzte Absolutglied der Gleichung kein τ enthält und den Modulus $z^2 = \dfrac{4Ra}{(R+a)^2}$ bestimmt. Indem wir also die-

sen Modulus hier einführen, wird die eine Amplitude $\varphi = 90^0$ und die 2te geht aus

5) $$\cos\varphi = \frac{(R-a)\sin\tau}{a - R\sin\tau^2}$$

hervor.

Unter diesen Voraussetzungen haben wir also folgendes: Es ist

6) $$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi_1^2}} + \int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi_2^2}} = K,$$
$$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi_1^2}} - \int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi_2^2}} = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}},$$

oder

7) $$\begin{matrix} u_1 + u_2 = K \\ u_1 - u_2 = u \end{matrix}, \qquad z^2 = \frac{4Ra}{(R+a)^2}.$$

Um nun geometrisch alles beisammen zu haben, was später analytisch verwertet werden soll, geben wir hier die nachstehenden Entwickelungen:

Aus 7) folgt

$$z' = \frac{R-a}{R+a},$$

daher wird 5) zu

8) $$\cos\varphi = \frac{2z'\sin\tau}{1-z'-(1+z')\sin\tau^2},$$

und allgemein

9) $$x = (R+a)\sqrt{1-\frac{4Ra}{(R+a)^2}\sin\varphi^2},$$

ferner ist

10) $$\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \frac{\cos\alpha}{1-z'}, \qquad \cos\varphi_1\cos\varphi_2 = \frac{z'}{1-z'}\cos\alpha,$$

11) $$\cos(\varphi_1-\varphi_2) = \frac{R}{a}\cos\alpha = \frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha.$$

Aus 9) folgt durch Addition

12) $$\frac{x_1+x_2}{R+a} = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2.$$

d. i.

13) $$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = (1+z')\sin\alpha.$$

Die Subtraction dagegen gibt

14) $$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = (1-z')\sin(\varphi_1-\varphi_2) = \sqrt{(1-z')^2-(1+z')\cos\alpha^2},$$

womit wir noch

$$15)\quad \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\Delta\varphi_1} = \frac{\sin 2\varphi_1}{2x_1}(R+a) = \frac{R+a}{2a}\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{1-z'},$$

wie sich aus dem Siuussatz für das Dreieck ROP_1 ergibt.

Wir stellen ferner die Formeln für $\sin\varphi_1^2$ und $\sin\varphi_2^2$ auf, sie

$$16)\quad \begin{aligned} 2\sin\varphi_1^2 &= 1+\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha^2+\sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2}, \\ 2\sin\varphi_2^2 &= 1+\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha^2-\sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2}, \end{aligned}$$

woraus

$$17)\quad \begin{aligned} \sin\varphi_1^2+\sin\varphi_2^2 &= 1+\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha^2, \\ \sin\varphi_1^2-\sin\varphi_2^2 &= \sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2}. \end{aligned}$$

Um $\varphi_1+\varphi_2$ zu bilden, benutzen wir für 2_*) die Formel

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{A}{1-B}$$

Die Anwendung derselben auf 2) liefert die Relation

$$18)\quad \varphi_1+\varphi_2 = 90^0+\tau = 180^0-\alpha.$$

Ebenso bemerke man noch

$$19)\quad \begin{aligned} \sin\varphi_1 \pm \sin\varphi_2 &= \sqrt{\frac{1-z'+(1+z')\cos\alpha^2 \pm 2\cos\alpha}{1-z'}}, \\ \operatorname{tg}\varphi_1 \text{ und } \operatorname{tg}\varphi_2 &= \frac{\sin\alpha \pm \sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2}}{2z'\cos\alpha}(1-z \end{aligned}$$

Wir stellen noch die Werte von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ durch φ d

$$20)\quad \begin{aligned} \sin\alpha^2 &= \frac{2z'}{1+z'}\,\frac{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+1}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+z'}, \\ \cos\alpha^2 &= \frac{1-z'}{1+z'}\,\frac{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}-z'}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+z'} \end{aligned}$$

Die letzte kann auch in

$$21)\quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}-z'}{(1+z^2)\cos\varphi}$$

transformirt werden. Bezüglich der Formel 5) führen wir einen Hülfswinkel ein, indem wir zunächst dieselbe in

$$22)\quad \frac{z}{z'}\cos\varphi = \frac{2\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\cos\alpha}{1-\left(\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\cos\alpha\right)^2}$$

umwandeln. Wir setzen demnach

$$23)\quad \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\cos\alpha = \operatorname{tg}\psi,$$

und man hat

$$24)\quad \frac{z}{z'}\cos\varphi = \operatorname{tg}2\psi,$$

welchen Relationen wir noch die folgende beifügen:

$$25)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-z'\cot\frac{1}{2}\alpha^2}{1-z'\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2}}.$$

In den Anwendungen werden wir häufig der Kürze wegen einfach φ anstatt $\operatorname{am} u$ schreiben.

Diese Formeln reichen hin, um diejenigen Transformationen der elliptischen Functionen durchzuführen, welche in ihren verschiedenen Formen eine geometrische Erklärung der analytischen Relationen ermöglichen. Die oben eingeführte Transformation ist übrigens nicht die einzige, aber, da alle anderen zu denselben Zielen führen, haben wir die hier angewandte wegen ihrer Einfachheit und Leichtigkeit besonders ausgewählt.

Der in der Theorie der elliptischen Functiznen angewendeten Transformationen werden wir uns ebenfalls gelegentlich bedienen und bemerken demnach an dieser Stelle, dass, wenn z durch $\frac{1-z'}{1+z'}$, ferner u durch $(1+z')u$ ersetzt wird: K sich in $\frac{1}{2}(1+z')K$ und q in q^2 verwandelt. Ebenso werden wir die bekannten Relationen

$$\varDelta\operatorname{am}(K-u) = \frac{z'}{\varDelta\operatorname{am}u},$$

$$26)\quad \sin\operatorname{am}(K-u) = \frac{\cos\operatorname{am}u}{\varDelta\operatorname{am}u},$$

$$\cos\operatorname{am}(K-u) = \frac{z'\sin\operatorname{am}u}{\varDelta\operatorname{am}u}$$

häufig benutzen.

Das durch die Amplitude φ definirte Integral

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin\varphi^2}}$$

hat übrigens eine leicht anzugebende dynamische Bedeutung, wie a[u]s unserer Abhandlung über die elliptischen Integralfunctionen bezü[g]lich der Anwendung letzterer auf den Kreis gefolgert werden kan[n]. Mit Hinzunahme einer Constanten bedeutet es die Zeit, welche e[in] schwerer Punkt zur Zurücklegung des Bogens P_1P_2 gebraucht, vo[r]ausgesetzt, dass die entsprechende Sehne stets durch einen feste[n] harmonischen Punkt des Kreises geht.

II.

Wir benutzen jetzt die entwickelten Formeln, um dieselben a[uf] die Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen anzuwend[en] und letztere zu transformiren. Die daraus hervorgehenden Reih[en] haben den Vorzug, dass sie eine stärkere Convergenz besitzen u[nd] eine geometrische Deutung zulassen, die für die weitere Untersuchu[ng] von Wert ist. Bei den folgenden Darstellungen haben wir nun z[u] beachten, dass stets $u_1 + u_2 = K$, wo K das vollständige elliptisc[he] Integral der 1. Art bezeichnet und $u_1 - u_2 = u$ ist, worin das Arg[u]ment u sich auf die Amplitude $\varphi = \mathrm{am}\, u$ bezieht, während die a[n]dern $u_1 u_2$ durch die Amplituden $\varphi_1 \varphi_2$, wie sie in der Kreisgleichu[ng] 2) erscheinen, definirt werden.

Wir wählen zuerst die folgende Reihe

$$27)\quad \varphi = \mathrm{am}\, u = \frac{\pi u}{2K} + \frac{2q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\frac{2q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{1}{3}\frac{2q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} \ldots,$$

und bringen mit dieser die aus 18) hervorgehende Relation

$$28)\quad \mathrm{am}\, u_1 + \mathrm{am}\, u_2 = \frac{\pi}{2} + \tau$$

in Beziehung. In der Reihe setzen wir zuerst $u = u_1$ und dann $=$ und addiren, indem wir beachten, dass

$$\sin mu_1 + \sin mu_2 = 2\sin\frac{m}{2}(u_1+u_2)\cos\frac{m}{2}(u_1-u_2)$$

ist. Die Glieder mit geraden Potenzen fallen aus, und man hat

$$29)\quad \frac{1}{4}\tau = \frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \ldots$$

Vermöge des Wertes von τ aus 20) haben wir demnach

30) $$\frac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{\Delta-z'}{\Delta+z'}\,\frac{1-z'}{1+z'}} = \frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\,\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \dots$$

Ersetzt man u durch $K-u$ und Δ durch $\frac{z'}{\Delta}$, so resultirt

31) $$\frac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}\,\frac{1-z'}{1+z'}} = \frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\,\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K} + \dots$$

Wird $u = K$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gesetzt, so kommt

32) $$\frac{1}{4}\arcsin\frac{1-z'}{1+z'} = \frac{q}{1+q^2} - \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6} + \frac{1}{5}\,\frac{q^5}{1+q^{10}} - \dots$$

Ersetzen wir hierin z durch $\frac{1-z'}{1+z'}$ und q durch q^2, so verwandelt die letztere Gleichung sich in

33) $$\frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\right)^2 = \frac{q^2}{1+q^4} - \frac{1}{3}\,\frac{q^6}{1+q^{12}} + \frac{1}{5}\,\frac{q^{10}}{1+q^{20}} - \dots$$

Die geometrische Bedeutung dieser Reihen werden wir später an der Kettenlinie nachweisen.

Erinnern wir uns nun der Formel

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha,$$

worin $\varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{am} u_1 - \operatorname{am} u_2$ zu einer neuen Transformation Anlass gibt, so verschwinden in der entsprechenden Reihe die ungeraden Stellenglieder, und man hat zunächst

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{2}\,\frac{4q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{4}\,\frac{4q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} - \dots$$

also

34) $$\frac{1}{4}\arccos\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}\,\frac{\Delta-z'}{\Delta+z'}} = \frac{\pi u}{8K} - \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{4}\,\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} - \dots$$

woraus wie oben folgt

$$35)\quad \frac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}\,\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{\pi u}{8K} + \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{4}\,\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots$$

Bezüglich der Reihe 30) kann man den unter 23) bestimmten Hülfswinkel ψ benutzen und man hat

$$36)\quad \operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\sin 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

$$\cos\varphi = \frac{z'}{z}\operatorname{tg}2\psi.$$

Für ein gegebenes $u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}}$ lässt sich hiernach ψ und damit die Amplitude φ berechnen.

Man kann die gefundenen Reihen noch leicht vermehren. So ist gemäss 29)

$$37)\quad \sqrt{\frac{\Delta+1}{\Delta+z'}\,\frac{2z'}{1+z'}} = \cos 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

Wir setzen hierin zuerst u gleich u_1 und darauf $= u_2$, dasselbe gelte für Δ. Beide Ausdrücke multipliciren wir und ersetzen $2\cos A\cos B$ durch $\cos(A+B)+\cos(A-B)$, das Product $\frac{\Delta_1+1}{\Delta_1+z'}\cdot\frac{\Delta_2+1}{\Delta_2+z'}$ wird gleich $\frac{1}{z'}$, und das schliessliche Resultat ist

$$38)\quad \frac{4\sqrt{z'}}{1+z'} = \cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{4K} + \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{4K} - \frac{1}{5}\,\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{4K} - \frac{1}{7}\,\frac{q^7}{1+q^{14}}\cos\frac{7\pi u}{4K}\dots\right)$$
$$+\cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{4K} - \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{4K} - \frac{1}{5}\,\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{4K} + \frac{1}{7}\,\frac{q^7}{1+q^{14}}\sin\frac{7\pi u}{4K}\dots\right)$$

In ähnlicher Art folgt aus der Reihe

$$39)\quad \sqrt{\frac{\Delta-z'}{\Delta+z'}\,\frac{1-z'}{1+z'}} = \sin 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\dots\right)$$

die nachstehende, die analog der vorhergehenden auch in ein Product zweier Sinus transformirt werden kann:

40) $-2\frac{1-z'}{1+z'}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=$

$$\cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{4K}+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{4K}-\frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{4K}-\dots\right)$$

$$-\cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{4K}-\frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{4K}-\frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{4K}+\dots\right).$$

III.

Die elliptischen Functionen leiten ferner die folgende Reihe ab

41)

$$\varDelta \operatorname{am} u=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{q^2}{1+q^4}+\frac{2\pi u}{K}+\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{K}+\dots\right).$$

Um dieselbe zu transformiren, benutzen wir die Formel

$$\varDelta \operatorname{am} u_1+\varDelta \operatorname{am} u_2=(1+z')\sin\alpha.$$

Führen wir hierin den Wert von $\sin\alpha$ aus 20) ein, so ergibt sich wie früher

42) $$\frac{1}{4}\sqrt{2z'(1+z')\frac{\varDelta+1}{\varDelta+z'}}=\frac{\pi}{K}\left(\frac{1}{4}-\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{q^4}{1+q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}-\dots\right),$$

43) $$\frac{1}{4}\sqrt{2(1+z')\frac{z'+\varDelta}{1+\varDelta}}=\frac{\pi}{K}\left(\frac{1}{4}+\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{q^4}{1+q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}+\dots\right).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen lassen sich mehrere Specialformen ableiten, deren eine wir wegen ihrer Wichtigkeit besonders hervorheben.

Wir setzen wieder $\varphi=90^0$ und $K=u$, es folgt

44) $$1+z'=\frac{\pi}{K}\left(1+\frac{4q^2}{1+q^4}+\frac{4q^4}{1+q^8}+\dots\right).$$

Ferner wird für $\varphi=0$

45) $$2\sqrt{z'}=\frac{\pi}{K}\left(1-\frac{4q^2}{1+q^4}+\frac{4q^4}{1+q^8}-\frac{4q^6}{1+q^{12}}+\dots\right).$$

Ziehen wir diese Gleichung von der obern ab, so erhält man

46) $$(1-\sqrt{z'})^2=\frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^4}+\frac{q^6}{1+q^{12}}+\frac{q^{10}}{1+q^{20}}+\dots\right).$$

Entwickeln wir nun die Ausdrücke in der Klammer nach Potenzen von q, so resultirt zunächst folgendes.

47) $(1-\sqrt{z'})^2 = \frac{8\pi}{K}(q^2+2q^{10}+q^{18}+2q^{26}+2q^{34}+3q^{50}\ldots).$

Eine genauere Betrachtung der Reihe zeigt, dass dieselbe das Qu drat einer zweiten ist, so dass man hat

48) $$\frac{K}{\pi} = \frac{8}{(1-\sqrt{z'})^2}(q+q^9+q^{25}+q^{49}\ldots)^2.$$

Die Berechnung von K nach dieser Formel ist wegen der ausse ordentlich starken Convergenz der Reihe, die vielleicht von kei zweiten mehr erreicht wird, sehr leicht, da schon das erste Gl hinreicht um eine Genauigkeit bis q^{10} herbeizuführen. Man hat a mit grosser Genauigkeit

49) $$K = \frac{8\pi q^2}{(1-\sqrt{z'})^2}.$$

Andere Reihen sind nach dem Vorstehenden leicht zu gewinn so ist

50) $$(1+\sqrt{z'})^2 = \frac{8\pi}{K}\left(\frac{1}{4}+\frac{q^4}{1+q^8}+\frac{q^8}{1+q^{16}}\cdots\right).$$

Setzen wir in 42)

$$u = \frac{K}{2},$$

also

$$\varDelta \operatorname{am}\frac{K}{2} = \sqrt{z'},$$

so kommt

51) $$\sqrt{2(1+z')\sqrt{z'}} = \frac{\pi}{K}\left(1-\frac{4q^4}{1+q^8}+\frac{4q^8}{1+q^{16}}-\frac{4q^{12}}{1+q^{24}}\cdots\right).$$

Führen wir auch hier die Reihenentwickelungen durch, so result

52) $$\sqrt{2(1+z')\sqrt{z'}} = \frac{\pi}{K}(1-4q^4+4q^8+4q^{16}-8q^{20}+4q^{32}-4q^{36}\ldots)$$

oder

53) $$\sqrt{2(1+z')\sqrt{z'}} = \frac{\pi}{K}(1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+2q^{64}\ldots)^2.$$

Während also die Exponenten der Reihe 48) durch die 2. I tenzen der ungeraden Zahlen bestimmt werden, gilt dies bei vorstehenden für die Geraden Zahlen der Zahlenreihe.

Eine weitere Transformation der letzten Formel ergibt noch

54) $$K = \frac{\pi}{2\sqrt{z'}}(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}\ldots)^2.$$

Vergleichen wir diese mit der bekannten der elliptischen Functionen

$$K=\frac{\pi}{2}(1+2q+2q^4+2q^9+\dots)^2,$$

so erhalten wir

55) $$\sqrt{z'}=\frac{(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\dots)^2}{(1+2q+2q^4+2q^9+\dots)^2},$$

und da bekanntlich

55$_*$) $$\sqrt{z'}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9}{1+2q+2q^4+2q^9},$$

so folgt aus den beiden letzten die für die Zahlentheorie wichtige neue Relation

56) $$(1-2q+2q^4-2q^9\dots)(1+2q+2q^4+2q^9\dots)=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}\dots)^2$$

Das Product zweier Reihen von vorstehender Bildungsform ist demnach das Quadrat einer dritten von analoger Art. Wir geben nachher eine Anwendung davon.

Wir bemerken noch, dass eine Transformation der Formel 48) die folgende bestimmt

57) $$K=\frac{4\pi q}{1-z'}(1+q^4+q^{12}+q^{24}\dots)^2.$$

Unter Benutzung der Formel 14) bilden wir eine neue Reihe für $\Delta\varphi_1-\Delta\varphi_2$ und es wird

58) $$(1-z')\sin(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\dots\right),$$

d. i.

59) $$\sqrt{(1-z')^2-(1+z')^2\cos\alpha^2}$$
$$=\frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\dots\right).$$

Man kann hieraus die obige Reihe für K direct in anderer Form ableiten, wenn $\alpha=90^0$ und $u=K$ gesetzt wird, es folgt

60) $$1-z'=\frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}+\frac{q^3}{1+q^6}+\frac{q^5}{1+q^{10}}+\dots\right).$$

Führt man [illegible] $\cos\alpha^2$ den Wert aus 20) ein, so entsteht

$$61)\quad \sqrt{2z'(1-z')\frac{1-\varDelta}{z'+\varDelta}} =$$
$$\frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\dots\right),$$

oder transformirt

$$62)\quad \sqrt{2(1-z')\frac{\varDelta-z'}{\varDelta+1}} =$$
$$\frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\dots\right),$$

welche den Reihen in 42), 43) entsprechen.

Dieselben können wiederum vermittelst einer Addition oder Subtraction transformirt werden, wenn wir beachten, dass unter der Voraussetzung $u_1+u_2=K$ die Relation $\varDelta\varphi_1\varDelta\varphi_2=z'$ besteht. Es kommt also diese Umwandlung darauf hinaus, den algebraischen Ausdruck

$$\sqrt{\frac{\varDelta_1+1}{\varDelta_1+z'}} \pm \sqrt{\frac{\varDelta_2+1}{\varDelta_2+z'}}$$

auf die geeignete Form zu bringen, die durch die obige Relation wesentlich vereinfacht wird. Man findet unter Benutzung von $\varDelta_1+\varDelta_2=(1+z')\sin\alpha$

63)

$$(1-\sqrt{z'})\sqrt{2\frac{(1+z')\sin\alpha-2\sqrt{z'}}{1+\sin\alpha}} =$$
$$\frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^6}{1+q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

$$(1+\sqrt{z'})\sqrt{2\frac{(1+z')\sin\alpha+2\sqrt{z'}}{1+\sin\alpha}} =$$
$$\frac{2\pi}{K} - \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^4}{1+q^8}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{q^8}{1+q^{16}}\cos\frac{2\pi u}{K}\dots\right).$$

Vermittelst Differentiation lassen sich aus den gegebenen Reihen mehrere neue ableiten. Dasselbe ist der Fall, wenn wir die mit $\frac{d\varphi}{\varDelta}=u$ multiplicirten Glieder integriren. Wählen wir zu diesem Zwecke die Reihe 42), so muss demnach das Integral der Reihe

$$\int\sqrt{2z'(1+z')\frac{1+\varDelta}{z'+\varDelta}}\,\frac{d\varphi}{\varDelta} = \frac{\pi u}{K} - \frac{4\pi}{K}\int\left(\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K}\dots\right)du$$

gesucht werden.

$$\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}=\frac{q+q^9+q^{25}+\dots}{1+2q^4+2q^{16}+\dots},$$

so resultirt aus den beiden letzten noch

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2q+2q^9+2q^{25}-\dots}{1+2q^4+2q^{16}+\dots}=\frac{2q}{1+q^2}-\frac{1}{3}\frac{2q^3}{1+q^6}+\frac{1}{5}\frac{2q^5}{1+q^{10}}-\dots$$

Eine weitere Entwickelung der allgemeinen Reihen kann vermittelst der Relation

$$\operatorname{arc\,tg}x\pm\operatorname{arc\,tg}y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x\pm y}{1\mp xy}$$

geschehen. Demnach erhält man 2 neue Reihen und zwar zunächst

$$\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-\sqrt{z'}}\sqrt{2\frac{(1+z')\sin\alpha+2\sqrt{z'}}{1-\sin\alpha}}=$$
$$\frac{\pi}{8}-\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{1}{3}\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots,$$

welche in arc sin transformirt zur folgenden wird:

$$67)\quad \frac{1}{4}\arcsin\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=$$
$$\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots,$$

und ferner

$$68)\quad \frac{1}{4}\arccos\frac{1+\sqrt{z'}}{1-\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=$$
$$\frac{\pi u}{8K}-\frac{1}{2}\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{1}{4}\frac{q^8}{1+q^{16}}\sin\frac{2\pi u}{K}-\dots$$

Man bemerke, dass in den letzten Reihen der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau$$

ist, aus den Formeln

$$\operatorname{tg}\psi=\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\sin\tau$$

und

$$\cos\varphi=\frac{z'}{z}\operatorname{tg}2\psi$$

erhält man also bei gegebenem Argument

$$u=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+z^2\sin\varphi^2}}$$

mit Hülfe der genannten stark convergirenden Reihen die gesuchte Amplitude φ.

Die beiden Reihen 61) und 62) geben Veranlassung zu der Darstellung von $\operatorname{tg}\operatorname{am} u$. Dividiren wir die erste durch die zweite, so erhalten wir als Quotienten

69)
$$\operatorname{tg}\operatorname{am} u = \frac{1}{\varkappa'} \cdot \frac{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{2\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K} - \cdots}{\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} + \cdots}$$

Multipliciren wir dagegen die beiden Reihen 42), 43) und transformiren das Product, so folgt

$$70)\quad 4\varkappa'\frac{K^2}{\pi^2} = \left(1 - \frac{4q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{2K} - \cdots\right) \times \left(1 + \frac{4q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{2K} + \cdots\right).$$

IV.

Die folgenden Untersuchungen über die wichtigeren Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen werden einige neue Sätze zur Zahlentheorie zu Tage fördern, welche denjenigen Relationen entsprechen, die Jacobi unter analogen Verhältnissen zuerst gegeben hat.

Wir fahren in unsern Reihenentwickelungen fort und nehmen zum Ausgangspunkt die Reihe

71)
$$\sin\operatorname{am} u^2 = \frac{K-E}{\varkappa^2 K} - 2\left(\frac{\pi}{\varkappa K}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right)$$

Zur Transformation benutzen wir die in I gegebene Resolution

$$\sin\varphi_1{}^2 + \sin\varphi_2{}^2 = 1 + \frac{1+\varkappa'}{1-\varkappa'}\cos\alpha^2$$

und unter Benutzung des bekannten Wertes von $\cos\alpha^2$ aus 20) haben wir

72)
$$\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\sin\varphi^2}}{\varkappa' + \sqrt{1-\varkappa^2\sin\varphi^2}} = \frac{K-E}{\varkappa^2 K} + 2\left(\frac{\pi}{\varkappa K}\right)^2\left(\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}\cdots\right)$$

Gehen wir ferner von der Formel

$$\sin\varphi_1{}^2 - \sin\varphi_2{}^2 = \sin\alpha\sqrt{1 - \frac{(1+\varkappa')^2}{(1-\varkappa')^2}\cos\alpha^2}$$

aus, so findet sich

73) $$\sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+\varkappa'}{1-\varkappa'}\right)^2\cos\alpha^2} =$$

$$4\left(\frac{\pi}{\varkappa K}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right),$$

woraus nach Einsetzung des Wertes von $\sin\alpha^2$ und $\cos\alpha^2$ sich ergibt

73*) $$\frac{\varkappa'\sin\varphi}{\varkappa'+\Delta} = 2\left(\frac{\pi}{\varkappa K}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

Als specieller Wert für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $u = K$ folgt hieraus

74) $$\frac{1}{4}\left(\frac{\varkappa K}{\pi}\right)^2 = \frac{q}{1-q^2} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \frac{5q^5}{1-q^{10}} + \ldots$$

Führen wir in der vorletzten Reihe für Δ und $\sin\varphi$ die entsprechenden Transformationswerte ein, welche der Bedingung $u = K - u$ genügen, so findet man noch

57) $$\frac{\cos\varphi}{1+\Delta} = 2\left(\frac{\pi}{\varkappa K}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

Die Reihe 72) kann nochmals transformirt werden, indem der Ausdruck $\frac{\Delta_1}{\varkappa'+\Delta_1} \pm \frac{\Delta_2}{\varkappa'+\Delta_2}$ leicht angebbar ist. So findet man die beiden Reihen

$$\frac{(1-\varkappa')^2}{1+\sin\alpha} = 1 + \varkappa'^2 - \frac{2E}{K} + \frac{16\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^4}{1-q^8}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^8}{1-q^{16}}\cos\frac{2\pi u}{K}\ldots\right)$$

76)

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right)^2 - \cos\alpha^2}}{1+\sin\alpha} = 8\left(\frac{\pi}{\varkappa K}\right)^2\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^6}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

Aus der ersten gewinnen wir für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $u = K$ eine rasch convergirende Reihe zur Berechnung von E nämlich

77) $$\frac{E}{K} = \frac{(1+\varkappa')^2}{4} - \frac{8\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^4}{1-q^8} + \frac{2q^8}{1-q^{16}} + \frac{3q^{12}}{1-q^{24}}\ldots\right),$$

und ebenso geht aus der zweiten eine Reihe für

78) $$\left(\frac{K}{4\pi}\right)^2 = \frac{1}{(1-z')^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{3q^6}{1-q^{12}}+\frac{5q^{10}}{1-q^{20}}+\ldots\right)$$

hervor. Vergleichen wir mit dieser die in 57) abgeleitete Reihe, nachdem dieselbe mit 2 potenzirt worden, so dass man hat

$$\left(\frac{K}{4\pi}\right)^2 = \frac{q^2}{(1-z')^2}(1+q^4+q^{12}+q^{24}\ldots)^4.$$

so folgt die Relation

79) $$\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{3q^6}{1-q^{12}}+\frac{5q^{10}}{1-q^{20}}+\ldots = q^2(1+q^4+q^{12}+q^{24}\ldots)^4.$$

Diese interessante Relation können wir mit der Zahlentheorie in Verbindung bringen, wenn wir eine kleine Umgestaltung mit derselben vornehmen. Wir dividiren beiderseits durch q^2 und setzen darauf $q^4 = x$. Es entsteht dann folgende sehr bemerkenswerte Formel

80) $$\frac{1}{1-x}+\frac{3x}{1-x^3}+\frac{5x^2}{1-x^5}+\frac{7x^3}{1-x^7}+\frac{9x^4}{1-x^9}\cdots = (1+x^1+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}\ldots)^4,$$

deren Bildungsgesetz leicht ersichtlich ist. Die Exponenten der letzten Reihe sind die Trigonalzahlen. Bezüglich der zahlentheoretischen Bedeutung dieser Doppelreihe erinnern wir an die Darstellung einer ähnlichen Reihe in der „Theorie der elliptischen Functionen" von Durège, wo in § 66. der Satz Jacobi's abgeleitet wird, dass jede ganze Zahl die Summe von 4 Quadraten ist. So ist z. B.

$$105 = 1^2+2^2+6^2+8^2 = 2^2+4^2+6^2+7^2.$$

Wie aus der 2. Reihe hervorgeht, sind die Exponenten nichts anders als die figurirten Zahlen 1, 3, 6, 10 etc. Demnach ergeben sich auch hier Beziehungen zwischen denjenigen ganzen Zahlen, welche die Exponenten der einen Reihe und denjenigen ganzen Zahlen, die die Exponenten der anderen Reihe bilden.

Bei Ansicht der 2. Reihe bemerkt man sofort, dass die 4. Potenz derselben aus lauter Gliedern besteht, bei denen jeder Exponent die Summe von 4 figurirten Zahlen ist und die 1. Reihe ergibt ohne weitere Untersuchung, dass sie sämmtliche Potenzen von x enthalten wird. Hieraus folgt der neue Satz, dass jede ganze Zahl die Summe von vier figurirten Zahlen der 1. Ordnung ist.

Für jede ganze Zahl h besteht also die Relation

$$h = f_1+f_2+f_3+f_4,$$

wobei wir bemerken, dass h auf mehrfache Art aus jenen bestimmten Zahlen gebildet werden kann. So ist z. B.

$$141 = 1+21+28+91 = 3+15+45+78,$$

während die Quadrate für

$$141 = 1^2+2^2+6^2+10^2 = 2^2+3^2+8^2+8^2$$

sind. Ebenso können die f_1, f_2, f_3, f_4 irgend vier gleiche oder verschiedene ganze Zahlen oder auch Null bedeuten.

Der soeben entwickelte Satz über die Trigonalzahlen ist demnach ein Analogon zu dem von Jacobi gegebenen Satz über die Quadratzahlen.

Indem wir wieder auf die allgemeinen Reihenentwickelungen zurückgehen, benutzen wir ferner die Formel

81)

$$\frac{1}{\sin\varphi^2} = \frac{K-E}{K} + \frac{\pi^2}{4K^2}\frac{1}{\sin\frac{\pi u^2}{2K}} - \frac{2\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^4}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}\cdots\right)$$

Die Transformation derselben lässt folgende neue Relationen entstehen: Durch Addition folgt

82)

$$\frac{z^2\Delta}{\Delta-z'} = \frac{K-E}{K} + \frac{\pi^2}{2K^2}\frac{1}{\cos\frac{\pi u^2}{2K}} + \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^4}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^8}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}\cdots\right)$$

Durch Subtraction

83)

$$\frac{2z'z^2\sin\varphi}{\Delta-z'} = \frac{\pi^2}{K^2}\frac{\sin\frac{\pi u}{2K}}{\cos\frac{\pi u^2}{2K}} - 4\frac{\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^6}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}\cdots\right).$$

Wir setzen in der ersten $u = \frac{K}{2}$, also $\Delta = \sqrt{z'}$, es resultirt

84) $$\frac{z^2}{1-\sqrt{z'}} = \frac{K-E}{K} + \frac{\pi^2}{K^2} + \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{2q^8}{1-q^8} - \frac{4q^{16}}{1-q^{16}} + \cdots\right),$$

welche sich ebenfalls zur Berechnung von E benutzen lässt. Demnach ist

85) $$\frac{E}{K} = 1 - \frac{z^2}{1-\sqrt{z'}} + \frac{\pi^2}{K^2}\left(1 + \frac{8q^8}{1-q^8} - \frac{16q^{16}}{1-q^{16}} + \cdots\right),$$

welche Reihe sich durch starke Convergenz auszeichnet.

In der Theorie der elliptischen Integrale werden Reihen zur Berechnung von $F\varphi$ und $E\varphi$ entwickelt, welche nach den Sinus von φ, 2φ, etc. fortschreiten und demnach zu einer Transformation nach der bisher angewandten Art wohl geeignet erscheinen.

Da dieselbe keine Schwierigkeiten bietet, so überlassen wir die Umwandlung beider Reihen dem geneigten Leser.

V.

Auch die Reihenentwickelung

86)
$$\frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{4\pi}{z^2 K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K} + \cdots\right)$$

lässt sich mit Hülfe der Formeln in I) leicht transformiren.

Man findet

$$\frac{\cos\alpha}{1-z'} = \frac{4\pi}{z^2 K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right),$$

oder

87)
$$\sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}} = \frac{4\pi}{zK}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right) \text{ und}$$

$$\sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{4\pi}{zK}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right),$$

welche mit früher abgeleiteten in Verbindung gebracht werden können.

Setzt man in der ersten $u = 0$, $\Delta = 1$, und ersetzt darauf z' durch $\frac{2\sqrt{z'}}{1+z'}$, K durch $\frac{1}{2}(1+z')K$, so kommt

$$(1-\sqrt{z'})^2 = \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4} - \frac{q^6}{1-q^{12}} + \frac{q^{10}}{1-q^{20}}\cdots\right)$$

Wie wir nachher zeigen werden, sind die obigen Reihen für eine durch die Kettenlinie vermittelte geometrische Erklärung der links stehenden Ausdrücke von Wert.

Ebenso lässt sich die Reihe

89)
$$\frac{\pi}{2K\cos\frac{\pi u}{2K}} - \frac{z'}{\cos \operatorname{am} u} = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1+q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right)$$

mit Erfolg verwerten, wenn man die zur Transformation d- druckes

$$\frac{1}{\cos \mathrm{am}\, u_1} + \frac{1}{\cos \mathrm{am}\, u} = \frac{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}$$

nötigen Werte mit Hülfe der Formeln in I) berechnet.

Es kommt schliesslich

90) $$\frac{\pi}{K}\frac{\cos\frac{\pi u}{4K}}{\cos\frac{\pi u}{2K}} - \frac{(1-\varkappa')}{\sqrt{2\cos\alpha}}\sqrt{1 + \frac{2\varkappa}{1-\varkappa'}\cos\alpha - \frac{1+\varkappa'}{1-\varkappa'}\cos\alpha^2}$$

$$= \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{4K} + \frac{q^3}{1+q^3}\cos\frac{3\pi u}{4K} - \frac{q^5}{1+q^5}\cos\frac{5\pi u}{4K} - \frac{q^7}{1+q^7}\cos\frac{7\pi u}{4K} + \right.$$

Ist $u = 0$, so folgt wegen $\cos\alpha = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}$.

90$_*$)

$$\sqrt{2\varkappa'(1+\varkappa')} = \frac{\pi}{K}\left(1 - \frac{2q}{1+q} - \frac{2q^3}{1+q^3} + \frac{2q^5}{1+q^5} + \frac{2q^7}{1+q^7} - \right.$$

Wir dividiren die Reihe durch die ähnliche in III 53) u findet

91) $$\sqrt{\varkappa'} = \frac{\left(1 - \frac{2q}{1+q} - \frac{2q^3}{1+q^3} + \frac{2q^5}{1+q^5} + \frac{2q^7}{1+q^7} - \cdots\right)^2}{(1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36}\ldots)^4}.$$

oder wegen 55$_*$)

$$= \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 \ldots}.$$

Schreiben wir diese Gleichung noch einmal und setzen - q, so erhalten wir durch Multiplication beider

92) $$\left(1 - \frac{2q}{1+q} - \frac{2q^3}{1+q^3} + \frac{2q^5}{1+q^5} + \frac{2q^7}{1+q^7} - \cdots\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{2q}{1-q} + \frac{2q^3}{1-q^3} - \frac{2q^5}{1-q^5} - \frac{2q^7}{1-q}\right.$$

$$= (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + 2q^{64}\ldots)^4$$

Man wird bei genauerer Durchsicht dieser Relation be dass dieselbe mit dem früher angeführten Satz von Jacobi ir sem Zusammenhang steht. Führt man nämlich $q^4 = x$ ein, hält die 4. Potenz die Quadrate der natürlichen Zahlen als E

ten, während das transformirte Product alle ganzen Zahlen als Exponenten enthält.

Die letzte Reihe können wir wieder durch eine andere ersetzen, wie überhaupt die Bildung der Reihen eine fast unerschöpfliche zu sein scheint. Denn wie an einigen Beispielen gezeigt ist, kann jede transformirte Reihe der elliptischen Functionen wieder transformirt werden.

Benutzen wir die bekannte Reihe

93)
$$1-\varkappa^2\sin\varphi^2+\varkappa'^2\operatorname{tg}\varphi^2-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\sec\frac{\pi u^2}{2K}$$
$$=\frac{2\pi^2}{K^2}\left(\frac{q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{2q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^3}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{K}\cdots\right)$$

zu unserer Transformation, so hat man zu beachten, dass

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi u_1{}^2}{2K}}+\frac{1}{\cos\frac{\pi u_2{}^2}{2K}}=\frac{4}{\cos\frac{\pi u}{2K}}$$

ist. Daher folgt nach einigen Rechnungen

94) $$\frac{\varkappa'\varDelta}{\cos\varphi^2}\frac{K^2}{\pi^2}=\frac{1}{4\cos\frac{\pi u^2}{2K}}-\frac{2q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{4q^4}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}-\cdots$$

woraus für $u=0$

95) $$\frac{\varkappa' K^2}{\pi^2}=\frac{1}{4}-\frac{2q^2}{1+q^2}-\frac{4q^4}{1+q^4}-\frac{6q^6}{1+q^6}+\cdots$$

Nun haben wir in 54) die Reihe

$$\sqrt{\varkappa'}\frac{K}{\pi}=\frac{1}{2}(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\ldots)^8$$

abgeleitet. Das Quadrat derselben ist aber gleich der Reihe 95), so dass man hat

$$4\left(\frac{1}{4}-\frac{2q^2}{1+q^2}+\frac{4q^4}{1+q^4}-\frac{6q^6}{1+q^6}+\cdots\right)=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\ldots)^4,$$

also auch

96)
$$4\left(\frac{1}{4}-\frac{2x}{1+x}+\frac{4x^2}{1+x^2}-\frac{6x^3}{1+x^3}+\cdots\right)=(1-2x+2x^4-2x^9-\ldots)^4.$$

Setzt man hierin $-x$ statt x, so erhält man die oben erwähnte Reihe.

97)
$$4\left(\frac{1}{4}+\frac{2x}{1-x}+\frac{4x^2}{1+x^2}+\frac{6x^3}{1-x^3}+\cdots\right)=(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots)^4.$$

Diese beiden geben von neuem eine Relation, wenn wir ihr Product bilden und die in 56) abgeleitete Reihe beachten. Gestalten wir die Ausdrücke noch etwas um, so gewinnt man folgende Formel

98)
$$\left(1+\frac{8q}{1-q}+\frac{16q^2}{1+q^2}+\frac{24q^3}{1-q^3}+\frac{32q^4}{1+q^4}+\cdots\right)$$
$$\times\left(1-\frac{8q}{1+q}+\frac{16q^2}{1+q^2}-\frac{24q^3}{1+q^3}+\frac{32q^4}{1+q^4}-\cdots\right)$$
$$=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\ldots)^8.$$

Diese merkwürdige Relation, die augenscheinlich eine Erweiterung des Jacobi'schen Satzes von der Quadratsumme ist, schreiben wir nach der Entwickelung der Brüche in Reihen in folgender Form:

99)
$$(1+8q+24q^2+32q^3+24q^4+48q^5+96q^6+64q^7+24q^8\ldots)$$
$$\times(1-8q+24q^2-32q^3+24q^4-48q^5+96q^6-64q^7+24q^8\ldots)$$
$$=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-2q^{50}+\ldots)^8.$$

Bei der Multiplication der obigen Reihen verschwinden die Glieder mit ungeraden Exponenten und die Function erhält nur noch die Potenzen von q^2. Ersetzen wir also wieder q^2 durch x, so werden in der ersten Reihe wahrscheinlich sämmtliche Potenzen von q vorkommen.

Die transformirte Form wäre also

100)
$$1-16q+112q^2-448q^3+1136q^4-\ldots$$
$$=(1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-2q^{25}+\ldots)^8.$$

Daher hat man den allgemeinen Satz, dass die achte Potenz einer Reihe, deren Exponenten die Quadrate aller Zahlen sind, gleich einer Reihe ist, die alle Zahlen als Exponententen enthält. Da aber jedes Glied der auf die achte Potenz erhobenen zweiten Reihe aus dem Product von acht Gliedern besteht und also die Form

$$q^{a_1^2+a_2^2+a_3^2\ldots a_8^2}$$

hat, so ist für irgend eine ganze Zahl z. B. $h=1000$,

$$h=a_1^2+a_2^2+a_3^2\ldots a_8^2=1^2+2^2+3^2+4^2+7^2+10^2+14^2+25^2,$$

woraus der Satz folgt, dass jede ganze Zahl die Summe von acht Quadraten ist, die irgend acht gleiche oder verschiedene ganze Zahlen oder auch Null bedeuten.

Wir machen hier darauf aufmerksam, dass in Folge der Formel

$$(1-2q+2q^4-2q^9+\ldots)(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)$$
$$=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\ldots)^2$$

die vorhin entwickelten Relationen fortgesetzt werden können, wodurch eine ausserordentliche Allgemeinheit entsteht. Multiplicirt man nämlich die Reihe 100) mit der ihr analogen, nachdem in letzterer $-q$ statt q gesetzt ist, so verschwinden die ungeraden Potenzen und es entsteht eine Reihe, in welcher wir q anstatt q^2 setzen. Daher geht in Folge der Benutzung der letzten Hülfsformel eine neue Relation ähnlich ihren Vorläufern hervor, und diese Reihe wird jedenfalls sämtliche Potenzen von q enthalten. Da aber ihr gleichwertiger Ausdruck durch die 16. Potenz einer Reihe dargestellt wird, deren Glieder die Quadrate der natürlichen Zahlen zu Exponenten hat, so kann jede ganze Zahl in eine Summe von 16 Quadraten zerlegt werden. Beachtet man die Ordnung dieser Potenzen, so hat man allgemein den Satz, dass jede ganze Zahl die Summe von 2^{n+2} Quadraten ist.

Dies einigermassen überraschende Resultat setzt allerdings voraus, dass in den bezüglichen Reihen sämtliche Potenzen von q vorhanden sind. Ob diese Annahme allgemein gültig ist, müssen wir vorläufig dahin gestellt sein lassen, scheint aber doch zweifellos zu sein.

Hinsichtlich der in 80) aufgestellten Reihe möchte ich hier noch einschalten, dass die bekannten Relationen

101)
$$\sqrt{z}=2\,\frac{\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots},$$
$$\sqrt{z'}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}$$

in Folge der Formel $z^2+z'^2=1$ auf die folgende,

102)
$$(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^4-(1-2q+2q^4-2q^9+\ldots)^4$$
$$=16q(1+q^2+q^6+q^{10}+\ldots)^4$$

führen, deren Bedeutung wir oben schon festgesetzt haben. Ob der der darauf bezügliche Satz über die figurirten Zahlen wegen der Leichtigkeit dieser zweiten Ableitung schon früher gefunden ist, ist mir nicht bekannt.

VI.

Für die folgende Untersuchung beschäftigen wir uns mit (Reihe für $E(\mathrm{am}\,u)$, welche bekannt ist unter der Form

$$103)\quad E(\mathrm{am}\,u) = \frac{E}{K}u + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots\right).$$

wobei wir die Relation

$$E\varphi_1 \pm E\varphi_2 = E\varphi \pm \varkappa^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi$$

benutzen werden. Bezüglich des Ausdrucks $\sin\varphi_1 \sin\varphi_2$ erinnern w an die Formel 15).

Die Addition würde auf ein schon bekanntes Resultat hinau kommen, die Subtraction ergibt

$$104)\quad E\varphi = \frac{\varkappa^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\varDelta + \varkappa'} + \frac{E}{K}u - \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots\right)$$

Auch diese Reihe lässt eine nochmalige Umwandlung zu, we wir berücksichtigen, dass

$$\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\varDelta_1+\varkappa'} \pm \frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_2}{\varDelta_2+\varkappa'} = \frac{\varDelta_2\sin 2\varphi_1 \pm \varDelta_1 \sin 2\varphi_2 + \varkappa'(\sin 2\varphi_1 \pm \sin 2\varphi_2)}{2\varkappa'(1+\varkappa')(1+\sin\alpha)}$$

ist. Da aber

$$\frac{x_2}{R+a} = \varDelta_2, \quad \varDelta_2 \sin 2\varphi_1 = \frac{a}{R+a}, \quad \frac{\sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2}{\cos\alpha} = \varDelta_1 \sin 2\varphi_2,$$

so ergibt die Berechnung für das obere Zeichen

$$\varkappa^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{2+(1+\varkappa')\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)}\cos\alpha - \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K} \dots\right.$$

welcher Ausdruck schliesslich in die folgende Reihe

$$105)\quad (1-\varkappa')\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

übergeht. Man sehe über die Anwendung derselben die Formel 68) in III. nach.

Indem wir ferner das untere Zeichen berücksichtigen, folgt nac einigen Umwandlungen

$$106)\quad E\varphi = \operatorname{tg}\varphi\left(\sqrt{\Delta+z'}-\sqrt{\frac{2z'(1+z')}{\Delta+z'}}\right)$$
$$+\frac{E}{K}u-\frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{q^8}{1-q^{16}}\sin\frac{2\pi u}{K}\ldots\right).$$

Eine neue Reihe ergibt auch die Subtraction der Gleichungen 104) und 103)

$$107)\quad \frac{K}{2\pi}\frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+z'}=\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{q^2(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}$$
$$+\frac{q^3(1+q^3)^2}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{K},$$

deren Bildungsgesetz klar ist. Ebenso ist für spätere Untersuchungen der Differentialquotient von 104) von Bedeutung. Man findet nach einigen Rechnungen

$$108)\quad z'\frac{1+z'\Delta}{z'+\Delta}=$$
$$\frac{E}{K}-\frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{K}\ldots\right).$$

Es lässt sich auch die Reihe 104) mit der bekannten

$$\frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K}-z'\operatorname{tg}\operatorname{am}u=\frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\ldots\right)$$

zur Aufstellung einer neuen benutzen. Sie ist

$$109)\quad E\varphi=2z'\operatorname{tg}\varphi+\frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+z'}-\frac{\pi}{K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K}$$
$$-\frac{E}{K}u-\frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^4}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{q^8}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}+\ldots\right).$$

Endlich wollen wir noch diese mit 2 multiplicirte Gleichung von 106) abziehen, man hat

$$110)\quad E\varphi=\frac{E}{K}u-\frac{2\pi}{K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K}+\operatorname{tg}\varphi\left(2z'+2\Delta+\sqrt{\frac{2z'(1+z')}{1+\Delta}}-\sqrt{z'+\Delta}\right)$$
$$-\frac{8\pi}{K}\frac{q^8}{(1-q^8)}\sin\frac{\pi u}{K}\ \text{u. s. w.}$$

Die entwickelten Formeln können zur Berechnung von

$$\int\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}\,d\varphi$$

dienen.

Man kann ferner die bekannte Reihe

$$\frac{2\Delta}{\cos\varphi} - \frac{\pi}{K}\sec\frac{\pi u}{2K} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

mit der aus 87) folgenden transformirten

$$\frac{\Delta - z'}{\cos\varphi} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

vermittelst Subtraction verbinden, das Resultat ist

111) $$\frac{\Delta + z'}{\cos\varphi} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{1}{4}\sec\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^2}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^6}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

und wird die Reihe mit der aus 105) folgenden verknüpft, so ist das Endresultat

112) $$\frac{\Delta + z'}{\cos\varphi} - \frac{1-z'}{2}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$
$$= \frac{4\pi}{K}\left(\frac{1}{4}\sec\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^4}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^{12}}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

woraus

$$(1+\sqrt{z'})^2 = \frac{8\pi}{K}\left(\frac{1}{4} + \frac{q^4}{1-q^4} - \frac{q^{12}}{1-q^{12}} + \frac{q^{20}}{1-q^{20}} - \dots\right).$$

Auch die Reihe

$$\frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi u}{2K} - \cot\varphi = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots\right)$$

gibt transformirt

113) $$\frac{K}{4\pi}(1-z')\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}\sec\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^6}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} - \dots$$

woraus für $u = 0$ und $\cos\alpha = \dfrac{1-z'}{1+z'}$

114) $$\frac{K}{2\pi}\sqrt{z'} = \frac{1}{4} - \frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^6}{1+q^6} - \frac{q^{10}}{1+q^{10}} + \dots,$$

Benutzen wir ferner die bekannte Formel

$$\ln\sin\varphi - \ln\sin\frac{\pi u}{2K} = \ln\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{z}} + 2\left(\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \dots\right)$$

so ergibt sich daraus als transformirte

$$\ln\frac{\cos\alpha}{1-z'}-\ln\frac{1}{2}\cos\frac{\pi u}{2K}=\ln\frac{4\sqrt{q}}{z}-4\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}-\dots\right),$$

d. i.

$$\frac{1}{8}\ln 4q\frac{\varDelta+z'}{\varDelta-z'}\cos\frac{\pi u^2}{2K}=\frac{\frac{1}{2}q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{\frac{1}{4}q^4}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}+\dots),$$

114) $$\frac{1}{8}\ln 2q\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\cos\frac{\pi u}{2K}=\frac{\frac{1}{4}q^4}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{1}{8}\frac{q^8}{1+q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}+\dots,$$

$$\frac{1}{8}\ln 2q\frac{1+\sqrt{z'}}{1-\sqrt{z'}}=\frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^4}-\frac{1}{8}\frac{q^8}{1+q^8}+\frac{1}{12}\frac{q^{12}}{1+q^{12}}-\dots$$

Man sieht, mit welcher Leichtigkeit solche Reihen abgeleitet werden können, und wie ungezwungen sie sich den mannigfachsten Verhältnissen anschmiegen. Eine wertvolle Anwendung gibt auch die bekannte Relation

$$\varDelta\,\mathrm{am}\,(u+iK')=i\cot\mathrm{am}\,u,$$

welche wir auf 108) beziehen wollen. Demnach geht der Ausdruck zur Linken oder $\frac{z'(1+z'\varDelta)}{z'+\varDelta}$ über in $\frac{z'(1-z'\cot\varphi\,.\,i)(z'+\cot\varphi\,.\,i)}{z'^2+\cot\varphi^2}=$ $\frac{z'^2}{\varDelta^2}+z'z^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta^2}i$. Rechter Hand transformirt sich $\cos\frac{\pi u}{K}$ in

$$\cos\left(\frac{\pi u}{K}+\frac{\pi K'}{K}i\right)=\frac{e^{\frac{\pi K'}{K}}+e^{-\frac{\pi K'}{K}}}{2}\cos\frac{\pi u}{K}-i\frac{e^{\pi\frac{K'}{K}}-e^{-\frac{\pi K'}{K}}}{2}\sin\frac{\pi u}{K}$$

oder in $\frac{1+q^2}{2q}\cos\frac{\pi u}{K}-i\frac{1-q^2}{2q}\sin\frac{\pi u}{K}$.

Werden sämtliche Glieder in dieser Art berücksichtigt und nach reellen und imaginairen getrennt, so erhält man die folgenden Reihen

115)
$$\frac{1}{\varDelta\mathrm{am}u^2}=\frac{E}{z^2K}-\frac{2\pi^2}{z^2K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K}-\dots\right),$$

$$\frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta^2}=\frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}-\dots\right).$$

Wird diese Reihe durch die bekannte für $\frac{\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u}{\varDelta\,\mathrm{am}\,u}$ dividirt, so folgt

$$\varDelta\mathrm{am}\,u=2z'\frac{K}{\pi}\frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}+\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K}+\dots}{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}-\dots}$$

$$116)\text{a} \quad \Delta \operatorname{am} u = \frac{\pi}{2K} \frac{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \dots}{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K} + \dots}$$

$$\Delta \operatorname{am} u^2 = z' \frac{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \dots}{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \dots}$$

Aus 115) können auch noch die folgenden Quotienten berechnet werden.

$$\Delta = \frac{\pi}{2K} \frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{9q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \dots}{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \dots}$$

116)b

$$\Delta^2 = \frac{\pi^2}{4K^2} \frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{9q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \dots}{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K} + \dots}$$

Auf die hier benutzte Relation $\operatorname{cotam}(u + iK') = i\Delta \operatorname{am} u$ kommen wir nachher bei der Kettenlinie wieder zurück. Auf 62) angewandt, resultirt noch:

$$\sqrt{(1-z')(\Delta + 1 - (1+z')\sin\varphi^2)}$$
$$= \frac{2\pi}{K}\left(\sqrt{q}\frac{1+q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \sqrt{q^3}\frac{1+q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right.$$

$$\sqrt{(1-z')(\Delta - 1 + (1+z')\sin\varphi^2)}$$
$$= \frac{2\pi}{K}\left(\sqrt{q}\frac{1-q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \sqrt{q^3}\frac{1+q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

VII.

Wir stellen noch einige Betrachtungen an über die durch Partialbrüche und Quotienten ausgedrückten elliptischen Functionen.

Es werden sich vermittelst der Transformation noch einige bemerkenswerte Resultate ergeben. Gehen wir demnach aus von der Reihe

$$\frac{K}{2\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}-\frac{1}{4}=\frac{q\cos 2x-q^2}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{q^3\cos 2x-q^6}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\cdots$$

so kommt es darauf an, den Ausdruck

$$\frac{q\cos 2x_1-q^2}{1-2q\cos 2x_1+q^2}\pm\frac{q\cos 2x_2-q^2}{1-2q\cos 2x_2-q^2}$$

in die geeignete Form umzuwandeln.

Für das untere Zeichen wird man schliesslich finden

$$\frac{q(1-q^2)(\cos 2x_1-\cos 2x_2)}{(1-2q\cos 2x_1+q^2)(1-2q\cos 2x_2+q^2)}=\frac{2q(1-q^2)\sin\frac{\pi u}{2K}}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}$$

Daher bestehen für beide Zeichen die folgenden Ausdrücke:

117)

$$\frac{K}{4\pi}(1-z')\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)\cos\alpha^2}$$
$$=\sin\frac{\pi u}{2K}\left(\frac{q(1-q^2)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}-\frac{q^3(1-q^6)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}+\cdots\right)$$

$$\frac{K}{4\pi}\sqrt{2z'(1-z')\frac{1+\Delta}{z'+\Delta}}$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{q^2\left(\cos\frac{\pi u}{K}+q^2\right)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}+\frac{q^6\left(\cos\frac{\pi u}{K}+q^6\right)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}+\cdots$$

Um die Gleichung

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin x\frac{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)}\cdots$$

zur Transformation geschickt zu machen, nehme man die Logarithmen.

Die zusammengehörigen Argumente x_1 und x_2 sind dann leicht in die geeignete Form zu bringen und da

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Kx_1}{\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2Kx_2}{\pi}=\sin\varphi_1\sin\varphi_2=\frac{\cos\alpha}{1-z'}$$

ist, so ergibt sich

118) $\sqrt{\dfrac{\varDelta - z'}{\varDelta + z'}} =$

$$2\sqrt{q}\cos\frac{\pi u}{2K}\frac{\left(1+2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8\right)\left(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16}\right)\ldots}{\left(1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4\right)\left(1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}\right)\ldots},$$

und diese Gleichung geht für $u = 0$ über in

119) $\sqrt{\dfrac{1-z'}{1+z'}} = 2\sqrt{q}\left[\dfrac{(1+q^4)(1+q^8)\ldots}{(1+q^2)(1+q^6)\ldots}\right]^2.$

Führen wir hierin $\dfrac{1-z'}{1+z'} = z$ und $q^2 = q$ ein, so folgt

120) $\sqrt{z} = 2\sqrt[4]{q}\left[\dfrac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right].$

Mit dieser verbinden wir die in der Theorie der elliptischen Functionen bekannte Relation

$$\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{z'}\sqrt[4]{q}} = \left[\frac{(+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}\right]^2$$

und erhalten die neue Formel

121) $\sqrt[4]{z'} = \dfrac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}.$

Infolge der einfachen Ausführung einer auf 118) bezüglichen 2. Transformation gewinnt man noch

122) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$

$$2q\cos\frac{\pi u}{2K}\frac{\left(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16}\right)\left(1+2q^{16}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{32}\right)\ldots}{\left(1+2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8\right)\left(1+2q^{12}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{24}\right)\ldots},$$

woraus

123) $\dfrac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}} = 2q\left[\dfrac{(1+q^8)(1+q^{16})\ldots}{(1+q^4)(1+q^{12})\ldots}\right]^2.$

Eine nochmalige Transformation würde zur folgenden Formel führen

124) $$\frac{\sqrt{1+\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}-\sqrt{1-\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}}{\sqrt{1+\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}+\sqrt{1-\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}}$$

$$= 2q^2\cos\frac{\pi u}{2K}\,\frac{\left(1+2q^{16}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{32}\right)\ldots}{\left(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16}\right)\ldots}$$

Der Ausdruck links ist geeignet zu einer goniometrischen Umformung. Wegen $\alpha = 90^0 - \tau$ können wir setzen

125) $$\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\tau = \sin 2\gamma,\quad \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\sin\tau = \mathrm{tg}\,\psi,$$

$$\frac{z}{z'}\cos\varphi = \mathrm{tg}\,2\psi,$$

also

126) $$\mathrm{tg}\,\gamma = 2q^2\cos\frac{\pi u}{2K}\,\frac{\left(1+2q^{16}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{32}\right)\ldots}{\left(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16}\right)\ldots}$$

und wegen

127) $$\arcsin\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$$

$$4\left(\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\,\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right),$$

folgt also auch

128) $$\frac{1}{2}\gamma = \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\,\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots$$

Diese Ableitungen können zur Berechnung der zum Argument u gehörenden Amplitude φ benutzt werden.

Wie bekannt ist, lassen sich die Factorenfolgen durch Reihensummen ersetzen.

$$Q(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots$$
$$= 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots$$

$$Q\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots$$
$$= \sqrt[4]{q}\sin x-\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x\ \ldots,$$

darin bedeutet

$$Q = f'$$

Indem man also die vorhin gefundenen Gleichungen für diese Fälle einrichtet, hat man

$$129)\quad \sqrt{\frac{\Delta - \varkappa'}{\Delta + \varkappa'}} = \frac{2q^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi u}{2K} + 2q^{\frac{9}{2}}\cos\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{\frac{25}{2}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\dots}{1 + 2q^2\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^8\cos\frac{2\pi u}{K}\dots},$$

ferner

$$130)\quad \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \frac{2q\cos\frac{\pi u}{2K} + 2q^9\cos\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{25}\cos\frac{5\pi u}{2K} + \dots}{1 + 2q^4\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^{16}\cos\frac{2\pi u}{K} + \dots}$$

u. s. w.

Als Specialfälle findet man aus diesen

$$131)\quad \sqrt{\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}} = 2\sqrt{q}\,\frac{q + q^4 + q^{12} + \dots}{1 + 2q^2 + 2q^8 + \dots},$$

$$\frac{1-\sqrt{\varkappa'}}{1+\sqrt{\varkappa'}} = 2\,\frac{q + q^9 + q^{25} + \dots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots},$$

und deren transformirte

$$\sqrt{\varkappa} = 2\sqrt[4]{q}\,\frac{1 + q^2 + q^6\dots}{1 + 2q + 2q^4\dots}.$$

Führen wir hinsichtlich dieser Reihenquotienten die Thetafunctionen

$$132)\quad \begin{aligned} \vartheta(z) &= 1 - 2e^{-\varrho}\cos 2z + 2e^{-4\varrho}\cos 4z - 2e^{-9\varrho}\cos 6z + \dots, \\ \vartheta_1(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\varrho}}\sin z - 2\sqrt[4]{e^{-9\varrho}}\sin 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\varrho}}\sin 5z + \dots, \\ \vartheta_2(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\varrho}}\cos z + 2\sqrt[4]{e^{-9\varrho}}\cos 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\varrho}}\cos 5z + \dots, \\ \vartheta_3(z) &= 1 + 2e^{-\varrho}\cos 2z + 2e^{-4\varrho}\cos 4z + 2e^{-9\varrho}\cos 6z + \dots \end{aligned}$$

ein, worin

$$\varrho = \frac{\pi K'}{K} \quad \text{und} \quad z = \frac{\pi u}{2K},$$

so ergiebt sich nach dem Vorhergehenden

$$133)\quad \begin{gathered} \sqrt{\frac{\Delta - \varkappa'}{\Delta + \varkappa'}} = \frac{\vartheta_2(2\varrho z)}{\vartheta_3(2\varrho z)}, \quad \sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{\vartheta_1(2\varrho z)}{\vartheta(2\varrho z)}, \\ \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau = \frac{\vartheta_2(4\varrho z)}{\vartheta_3(4\varrho z)}. \end{gathered}$$

Benutzt man noch die bekannte Differentialformel der Thetafunctionen

$$\frac{d\left(\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right)}{dz} = -\frac{u\vartheta(z)\vartheta_1(z)}{\vartheta_3(z)^2},$$

so folgt

134) $$\frac{2Kz'z\sin\varphi}{\pi(\varDelta + z')} = \frac{u\vartheta_2\varrho z\,\vartheta_1 2\varrho z}{(\vartheta_3 2\varrho z)^2}.$$

Zweiter Teil.

VIII.

Die in ihren Folgen wichtigste Transformation bezieht sich auf die jetzt noch zu betrachtende Reihe für $\ln \varDelta\varrho$

$$\ln \varDelta\varphi = \frac{1}{2}\ln z' + 4\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{K} + \ldots\right)$$

Zunächst folgt für die Addition

$$\varDelta\varphi_1\,\varDelta\varphi_2 = z'.$$

Dagegen gibt die Subtraction

1) $$\ln\frac{\varDelta\varphi_1}{\varDelta\varphi_2} = -8\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

Für $\ln\frac{\varDelta\varphi_1}{\varDelta\varphi_2}$ können wir unter Benutzung der obigen bekannten Formel $\ln\frac{\varDelta\varphi_1^2}{z'}$ oder $-\ln\frac{\varDelta\varphi_2^2}{z'}$ schreiben. Da nun aber $\varDelta\varphi_1^2 = 1 - z^2\sin\varphi_1^2$ ist, so führen wir die in I. entwickelten Werte für $\sin\varphi_1^2$ und $\sin\varphi_2^2$ ein, wonach für beide Ausdrücke die Relation

$$2\varDelta\varphi^2 = 2 - z^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2 \pm (1+z')\sin\alpha\sqrt{(1-z')^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2}$$

gilt. Daher haben wir unter Benutzung der Exponentialfunction

2) $$2 - z^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2 \pm (1+z')\sin\alpha\sqrt{(1-z')^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2} = 2z'e^{\pm 8\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)}.$$

Wir bezeichnen nun die periodisch[illegible] dieses Ausdrucks mit x, indem wir damit die Ab[illegible] [illegible]ier noch anzugebenden Curve bezeichnen.

3) $$x = 8\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\cdots\right).$$

Die Gleichung 2) nimmt nun die folgende doppelte Form an

4) $$\frac{1+z'^2-(1+z')^2\cos\alpha^2}{2z'} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$\frac{(1+z')\sin\alpha\sqrt{(1-z')^2-(1+z')^2\cos\alpha^2}}{2z'} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Hierin müssen noch die sin und $\cos\alpha$ mittelst der in der Einleitung gegebenen Werte durch die Amplitude φ ersetzt werden. Man wird haben

5) $$\frac{1+z'\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}}{z'+\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$\frac{z^2\sin\varphi}{z'+\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Bezeichnen wir endlich den variabeln Ausdruck der linken Seite der ersten Gleichung mit y, so ist

6) $$y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

die bekannte Gleichung der Kettenlinie, deren Eigenschaften für die geometrische Durchführung der gegebenen Transformation von hoher Bedeutung sind. Wir haben demnach zu zeigen, dass die elliptischen Functionen und ihre Reihenentwickelungen durch die Geometrie der Kettenlinie eine wertvolle Bereicherung und Ergänzung erfahren können und wollen daher zunächst an die schon bekannten Eigentümlichkeiten dieser Curve erinnern. (Fig. 2.)

Der Differentialquotient

7) $$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{tg}\delta = s$$

hat erstens die bekannte trigonometrische Bedeutung $\operatorname{tg}\delta$ und zweitens bedeutet er die zur Abscisse x gehörenden Curvenbogen s, wenn man wie hier geschehen, den tiefsten Punkt als Anfangspunkt der Bogenlängen nimmt und die Constante $=1$ setzt. Diese Bemerkung nebst der Formel $y^2 = s^2+1$ oder $y = \frac{1}{\cos\delta}$ und der daraus sich ergebenden Eigenschaft, dass die Projection der Ordinate y auf die Tangente eine Strecke gleich dem Bogen s bestimmt, welche von dem zur Ordinate gehörenden Abscissenpunkt die Entfernung gleich 1 hat, genügt für die folgenden Auseinandersetzungen.

Demgemäss haben wir

8) $$y=\frac{1+z'\varDelta}{z'+\varDelta},\quad s=\operatorname{tg}\delta=\frac{z^2\sin\varphi}{z'+\varDelta},$$
$$u=\int\frac{dy}{\sqrt{(1+z'^2-2z'y)(y^2-1)}}.$$

Es kommt nun vor allem darauf an, die Amplitude φ in geometrischen Sinne zu definiren. Die Berechnung derselben aus den obigen Formeln führt auf folgenden einfachen Ausdruck

9) $$\sin\varphi=\frac{s}{y-z'},$$

dessen Construction in Folge der Eigenschaften der Kettenlinie sehr einfach ist. Indem wir also festsetzen, dass durch die Reihe 3) die entsprechende Abscisse der Curve charakterisirt sei, wird auch y und die Gerade s bestimmt. Daher kann man für alle Fälle eine zur x-Achse parallele Gerade vom Abstand z' benutzen, um mit der Differenz $y-z'$ gleich um den entsprechenden Curvenpunkt xy einen Kreisbogen bis zum Durchschnitt mit jener Einheitsverticalen ziehen zu können. Die letztere schliesst mit der Verbindungsgeraden beider genannten Punkte die gesuchte Amplitude φ ein.

Bezüglich der Reihe für x bemerken wir, dass dieselbe auch auf eine andere Form gebracht werden kann.

Aus der bekannten Formel

$$-\tfrac{1}{2}\ln(1-2q\cos x+q^2)=q\cos x+\tfrac{1}{2}q^2\cos 2x+\tfrac{1}{3}q^3\cos 3x\ \ldots$$

lässt sich die folgende ableiten

$$\frac{1}{4}\ln\frac{1+2q\sin x+q^2}{1-2q\sin x+q^2}=q\sin x-\tfrac{1}{3}q^3\sin 3x+\tfrac{1}{5}q^5\sin 5x\ldots$$

Demzufolge entwickeln wir in

$$\frac{x}{8}=\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\ldots$$

die Brüche in Reihen und schreiben

$$\frac{x}{8}=(q+q^3+q^5\ldots)\sin\frac{\pi u}{2K},$$
$$-(q^3+q^9+q^{15}\ldots)\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi u}{2K},$$
$$+(q^5+q^{15}+q^{25})\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi u}{2K},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Werden hierin die Verticalreihen mittelst der genannten Formel summirt, so gelangt man zum Resultate

$$10)\quad x = 2\ln\frac{(1+2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)(1+2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)\ldots}{(1-2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)(1-2q^3\sin)\frac{\pi u}{2K}+q^6)\ldots},$$

oder

$$11)\quad e^x = \frac{1+z'\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+z^2\sin\varphi}{z'+\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}} = y+s$$

$$= \frac{(1+2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1+2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\ldots}{(1-2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1-2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\ldots}$$

woraus noch für $u = K$, $\varphi = 90^0$ ein schon früher entwickelter Ausdruck

$$12)\quad \sqrt{z'} = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^2$$

folgt.

Wir haben den Winkel der Tangente mit der x-Achse durch δ bezeichnet, wir führen noch seinen Complementwinkel $\varepsilon = 90^0 - \delta$ als Winkel der Tangente mit der y-Achse ein, beachten den Ausdruck

$$y+s = y+\sqrt{y^2-1}$$

und substituiren

$$y = \frac{1}{\cos\delta} = \frac{1}{\sin\varepsilon},$$

dann resultirt

$$13)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{(1-2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1-2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\ldots}{(1+2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1+2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\ldots}.$$

Der eingeführte Winkel ε der Tangente mit der y-Achse wird demnach durch ein unendliches Product ausgedrückt.

Die in VI. 108) entwickelte Reihe lässt sich zur Darstellung von y als Ordinate der Curve verwerten, wenn wir beachten, dass $y = \frac{1+z'\Delta}{z'+\Delta}$ ist. Führen wir diese Substitution ein, so resultirt

$$14)\quad y = \frac{E}{z'K} - \frac{4\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{K}\ldots\right),$$

Um für y noch andere Entwickelungen anznbahnen, gehen wir auf die Reihe 87)

$$\sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}} = \frac{4\pi}{zK}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6} - \frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

zurück und berücksichtigen, dass

$$y = \frac{z'\Delta + 1}{\Delta + z'}$$

ist. Führen wir das hieraus berechnete Δ in die obige Reihe ein, so erhalten wir

$$15)\quad \sqrt{1 + z'^2 - 2z'y} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

Man kann übrigens auch noch den folgenden Ausdruck leicht aufstellen, wenn man $2z'y = (1+z')^2\cos\alpha^2$ setzt und die Formel 29) beachtet. Daher ist:

$$16)\quad y = \frac{(1-z')^2}{4z'} + \frac{(1+z')^2}{4z'}\cos 8\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right),$$

woran sich später noch andere anschliessen werden.

Um neue Formeln herzuleiten, differentiiren wir 15) nach y und und u, man hat

$$dy = \frac{8\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right) \times \left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)du,$$

ebenso ergibt die Differentiation von x

$$dx = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)du.$$

Aus beiden Reihen folgt durch Division

$$17)\quad \frac{dy}{dx} = s = \operatorname{tg}\delta = \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{5q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\ldots\right).$$

Damit haben wir die trigonometrische [illegible] den gleichwertigen Ausdruck für den Bogen s d[illegible] [illegible]edrückt.

Eine andere geometrische Beziehung lässt sich wie folgt ableiten:

In VI. haben wir die Reihe

$$\frac{\Delta - z'}{\cos\varphi} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

aufgestellt, welche wir mit der Kettenlinie in Verbindung bringen können.

Berechnet man nämlich s als Function von φ, so ergeben die obigen Werte

$$s = \operatorname{tg}\varphi\,\frac{\sqrt{1 - z_2 \sin\varphi^2} - z'}{\cos\varphi}.$$

Der daraus folgende Ausdruck

$$s\cot\varphi = \frac{\Delta - z'}{\cos\varphi}$$

bedeutet geometrisch die auf der Einheitsnormalen durch CF bezeichnete Gerade l, welche demnach durch die Relation

$$18)\qquad l = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

bestimmt ist.

Man bemerke aber, dass sowohl $s.\cot\varphi = l$ als auch s durch Reihen gegeben sind, der Quotient wird demnach in einer Beziehung zu $\operatorname{tg}\operatorname{am} u$ stehen. Daher folgt das Resultat

$$19)\qquad \operatorname{tg}\operatorname{am} u = \frac{\pi}{2z'K}\,\frac{\dfrac{q}{1-q^2}\sin\dfrac{\pi u}{2K} - \dfrac{3q^3}{1-q^6}\sin\dfrac{3\pi u}{2K} + \ldots}{\dfrac{q}{1-q^2}\cos\dfrac{\pi u}{2K} - \dfrac{3q^3}{1-q^6}\cos\dfrac{3\pi u}{2K} + \ldots}.$$

Diese neue Formel ist unter anderm auch aus dem Grunde bemerkenswert, weil sie zur Aufstellung einer Differentialgleichung Veranlassung gibt. Wie man bemerkt, ist der Zähler das Differential des Nenners. Führen wir demnach ein

$$20)\quad Z = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\ldots,$$

so haben wir nach einigen Zwischenrechnungen

$$21)\qquad -\frac{dZ}{Z} = z'\operatorname{tg}\operatorname{am} u.du$$

Substituiren wir hierin die bekannte Formel

$$z'\operatorname{tg}\operatorname{am}u = \frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right),$$

so ergibt sich ohne Mühe aus

$$-\int\frac{dZ}{Z} = \frac{2\pi}{K}\int\left(\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}\ldots\right)du$$

das allgemeine Integral

$$-\ln Z = -\ln\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{1}\frac{2q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{1}{2}\frac{2q^4}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constanten setzen wir $u = 0$, dann ist

$$-\ln Z_0 = \frac{1}{1}\frac{2q^2}{1+q^2} - \frac{1}{2}\frac{2q^4}{1+q^4} + \frac{1}{3}\frac{2q^6}{1+q^6} - \ldots + \text{Const.}$$

Da aber

$$Z = \frac{K}{4\pi}\sqrt{1+z'^2-2z'y},$$

so ist

$$Z_0 = \frac{K}{4\pi}(1-z'),$$

so dass man schliesslich hat, wenn man noch

$$21)\quad \sqrt{1+z'^2-z'y} = z\sqrt{\frac{\Delta-z'}{\Delta+z'}} \quad\text{und}\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}\cdot\frac{1-\Delta}{1+\Delta}}$$

beachtet

22)

$$\frac{1}{8}\ln\sqrt{\frac{\Delta-z'}{\Delta+z}\,\frac{1+z'}{1-z'}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi u}{2K}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u^2}{2K} - \frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u^2}{2K} +$$

$$\ln\frac{1+z'}{1-z'}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \ln\sin\frac{\pi u}{2K} + 8\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u^2}{2K} - \frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u^2}{2K}\right.$$

$$\left. + \ldots\right)$$

Eine zweite Anwendung der Differentialgleichung 21) geht unter Benutzung der Relation $\operatorname{tg}\operatorname{am}u = \operatorname{tg}\varphi$ in Verbindung mit $du = \frac{d\varphi}{\Delta}$ hervor. Daher ist

$$23)\qquad \frac{dZ}{Z} = -\frac{z'\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}}$$

zu integriren.

Das Integral

$$\ln Z = -z' \int \frac{\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}}$$

kann durch Einführung von $\cos\varphi = x$ auf folgende Art geschrieben werden:

$$\ln Z = z' \int \frac{dx}{x\sqrt{z'^2+z^2x^2}}$$

und ist, wie nach bekannten Methoden ersichtlich ist, ebenfalls logarithmisch. Man findet schliesslich das folgende Resultat:

$$\ln Z = \ln \frac{z\cos\varphi - \Delta + z'}{z\cos\varphi - \Delta - z'} + \text{Const.}$$

Für $\varphi = 0$ wird

$$Z_0 = \frac{1-z'}{4\pi} . K,$$

so dass

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{z-1-z'}{z-1+z'} \frac{z\cos\varphi - \Delta + z'}{z\cos\varphi - \Delta - z'},$$

und endlich

$$24)\quad \frac{Kz}{4\pi} \frac{z\cos\varphi - \Delta + z'}{z\cos\varphi + \Delta + z'} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots$$

Aus der letzten Formel folgt noch

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-z}{1+z'}} \frac{z\cos\varphi - \Delta + z'}{-z\cos\varphi + \Delta + z'}.$$

IX.

Der Differentialquotient von s kann auch benutzt werden, um eine neue Relation für y herzustellen. Aus derselben entwickeln wir dann eine kubische Gleichung, deren Absolutglied eine periodische Function ist. Aus 7) folgt

$$\frac{ds}{du} = \frac{\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{25q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} \dots\right),$$

und wenn man beachtet, dass $\int y\,dx = s$, also $y = \frac{ds}{dx}$ ist, bei Berücksichtigung des Wertes von $\frac{dx}{du}$

$$25) \quad y = \frac{\pi^2}{4z'K^2} \frac{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots}.$$

Den Nenner dieses Quotienten können wir durch den Ausdruck

$$26) \quad \frac{K}{4\pi}\sqrt{1+z'^2-2z'y} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots$$

ersetzen. Erheben wir darauf die Formel auf die 2. Potenz und ordnen nach Potenzen von y so, so erhalten wir die kubische Gleichung

$$27) \quad y^3 - \frac{1+z'^2}{2z'}y^2 + \frac{\pi^6}{2z'^3K^6}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\varphi u}{2K} + \frac{25q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\dots\right)^2 = 0,$$

mit deren Untersuchung wir uns zunächst beschäftigen wollen.

Das zweite Glied ist nur vom Modulus z abhängig. Der Coefficient des folgenden ist = Null, woraus sich auf gewisse Beziehung der Gleichung zu den reducirten kubischen Gleichungen schliessen lässt. Das durch eine periodische Reihe ausgedrückte Absolutglied ist stets positiv, wie auch die hier geometrisch brauchbare Wurzel stets grösser als 1 sein muss.

Machen wir die Gleichung mit der

$$28) \quad y^3 - Ay^2 + C = 0$$

identisch, so folgt aus $A = \frac{1+z'^2}{2z'}$ der Modulus

$$29) \quad z' = A - \sqrt{A^2-1},$$

und ferner ist

$$30) \quad \frac{K^3}{\pi^3}\sqrt{2z'^3C} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots,$$

und vermöge 25)

$$31) \quad y = \frac{K}{4\pi} \frac{\sqrt{2z'C}}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots}.$$

Unter gewissen noch anzugebenden Bedingungen würde demnach die obige reducirte Gleichung vermittelst elliptischer Functionen lös-

bar sein, indem aus den Constanten derselben der Modulus auf eifache Art bestimmt werden kann und in Folge der hierdurch bkannten K und q die Aufgabe von der Lösung der transcendent Reihe abhängt. Sofern q klein ist, und dies ist meistens der Fa ergibt sich durch Versuche der Wert von u, so dass y ebenfalls bkannt ist. Da diese Bestimmung wenigstens theoretisches Intere hat, so wollen wir noch die Bedingungen der Aufgabe in Kürze asuchen. Wird $y = 1$ gesetzt, ist also

$$\frac{K^3}{\pi^3} z'(1-z') = \frac{q}{1-q^2} - \frac{9q^3}{1-q^6} + \frac{25q^5}{1-q^{10}} \cdots,$$

so wird stets in den andern Fällen

$$\frac{K^3}{\pi^3} \sqrt{2z'^3 C} < \frac{q}{1-q^2} - \frac{9q^3}{1-q^6} + \cdots,$$

d. i.

$$\frac{K^3}{\pi^3} \sqrt{2z'^3 C} < \frac{K^3}{\pi^3} z'(1-z')$$

sein müssen. Oder einfacher, es muss

$$C < \frac{1+z'^2}{2z'} - 1,$$

d. i.

$$C < A - 1$$

sein. Da ausserdem auch $A > 1$, wie aus 29) hervorgeht, so set wir für eine allgemeinere Betrachtung die Gleichung

32) $$x'^3 - axx'^2 + c = 0$$

fest, worin a und c vorläufig willkürliche positive Zahlen sein mög und setzen $x' = ny$.

Also wäre

$$y^3 - \frac{a}{n} y^2 + \frac{c}{n^3} = 0$$

mit der Gleichung 28) in Beziehung zu bringen. Gemäss der obig Bedingung hat man

$$\frac{c}{n^3} < \frac{a}{n} - 1 \quad \text{oder} \quad c < an^2 - n^3.$$

Da aber $\frac{a}{n} = \frac{1+z'^2}{2z'}$ d. i. $n = \frac{2z'a}{1+z'^2}$ ist, so muss

$$\frac{c}{4a^3} < \frac{z'^2(1-z')^2}{(1+z'^2)^3}$$

sein. Oder was dasselbe ist

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a^3}} < \frac{z'(1-z')}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die weitere Untersuchng hätte sich nun mit dem Ausdruck rechter Hand zu beschäftigen, der für verschiedene Moduli verschiedene Werte erhält. Daher muss der Grenzfall des grössten Wertes gesucht, d. h.

$$\frac{z'(1-z')}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

differentiirt werden. Der hieraus berechnete dem Maximum des obigen Ausdrucks entsprechende Wert von z' bestimmt die Grenze für

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a^3}},$$

welche nicht überschritten werden darf.

Die Differentiation führt auf

$$z'^3 - 2z'^2 - 2z' + 1 = 0,$$

woraus für den Grenzfall

$$z' = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Eingesetzt in die Ungleichung folgt

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a^3}} < \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad c < \frac{4a^3}{27}.$$

Man wird schon in dieser Bestimmung das für reducirte kubische Gleichungen von der Form

33) $$x^3 - px + q = 0$$

wesentliche Unterscheidungsmerkmal für reelle und imaginaire Wurzeln erkannt haben. Indem wir die letztere Gleichung anstatt der früheren hier benutzen, also $x = \frac{1}{x'}$, $a = \frac{p}{q}$, $c = \frac{1}{q}$ einführen, geht die Ungleichung in die folgende

$$27q^2 < 4p^3$$

(dessen q mit dem q der periodischen Reihen nicht verwechselt werden darf) über, welche die Bedingung von 3 reellen Wurzeln ausdrückt.

Die Gleichungen, welche wir vorhin gefunden, bezie[...] len auf den casus irreductibilis, worin eine Wurzel d[...] drückt.

Aus der Transformation der obigen Gleichungen resultirt demnach

$$34)\quad \frac{1}{2}(1+z'^2)\frac{q}{p}\frac{K^3}{\pi^3}\sqrt{\frac{1+z'^2}{p}} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots$$

Wenn man mit Umgehung des Grenzfalles, für den es einer Unterscheidung nicht mehr bedarf, ein bestimmtes z wählt, so muss

$$35)\qquad \frac{q^2}{4p^3} < \frac{z'^2(1-z')^2}{(1+z'^2)^3} \quad \text{sein.}$$

Die Constanten q und K sind dadurch gegeben, so ist z. B. für $z^2 = \frac{3}{4}$ und $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{125}$, $q = 0{,}085\,7957$, $K = 2{,}156515$. Bei kleinen Werten von q ist die Berechnung von u nicht besonders umständlich.

Die durch eine periodische Reihe darstellbare Wurzel der Gleichung ist dann

$$36)\quad x = \frac{4\pi}{K}\sqrt{\frac{p}{1+z'^2}}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \dots\right).$$

Wir geben nachher auch noch die Auflösung der übrigen durch die Cardani'sche Formel lösbaren Fälle der kubischen Gleichungen vermittelst der Kettenlinie.

X.

In 19) haben wir $\operatorname{tg}\operatorname{am} u$ in Form eines Quotienten durch zwei periodische Functionen ausgedrückt, so dass die Frage entsteht, ob ebenfalls $\sin\operatorname{am} u$ und $\cos\operatorname{am} u$ auf ähnliche Art bestimmbar seien. Wir erinnern zu dem Ende an die Reihe 104)

$$E\varphi = \frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+z'} + \frac{E}{K}u - \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots\right),$$

welche wir mit

$$E\varphi = \frac{E}{K}u + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots\right)$$

durch Subtraction verbinden. Man findet folgende Relation

$$37)\quad \frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+z'} = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + q^2\frac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + q^3\frac{(1+q^3)^2}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{K}\dots\right).$$

Dieselbe lässt sich mit der Reihe 17) für s weiter verbinden.

Die Division beider ergibt geordnet

$$38)\quad \cos \operatorname{am} u = \frac{z'K}{\pi}\,\frac{q\dfrac{(1+q)^2}{1-q^4}\sin\dfrac{\pi u}{K}+q^2\dfrac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\dfrac{2\pi u}{K}+\dots}{\dfrac{q}{1-q^2}\sin\dfrac{\pi u}{2K}-\dfrac{3q^3}{1-q^6}\sin\dfrac{3\pi u}{2K}+\dots}$$

woraus noch nach Multiplication von $\operatorname{tg}\operatorname{am} u$

$$39)\quad \sin \operatorname{am} u = \frac{1}{2}\,\frac{q\dfrac{(1-q)^2}{1-q^4}\sin\dfrac{\pi u}{K}+q^2\dfrac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\dfrac{2\pi u}{K}+\dots}{\dfrac{q}{1-q^2}\cos\dfrac{\pi u}{2K}-\dfrac{q^3}{1-q^6}\cos\dfrac{3\pi u}{2K}+\dots}$$

folgt.

Beide Reihen besitzen gleichen Zähler.

Da $\sin\varphi = \frac{s}{y-z'}$ ist, so kann man für $\sin \operatorname{am} u$ und ebenso für $\cos \operatorname{am} u$ zwei analoge Ausdrücke leicht herstellen, wenn man die für s und y entwickelten Reihen einsetzt. Die Reihe

$$40)\quad z'y = \frac{E}{K} = \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}+\dots\right)$$

wird für $y = \frac{1+z'^2}{2z'}$ zum Maximum, d. h. es ist

$$\tfrac{1}{2}(1+z'^2) = \frac{E}{K}+\frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{2q^4}{1-q^8}+\frac{3q^6}{1-q^{12}}+\dots\right),$$

und für $y = 1$ zum Minimum

$$z' = \frac{E}{K}-\frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}-\frac{2q^4}{1-q^8}+\frac{3q^6}{1-q^{12}}\dots\right),$$

welche Formeln mit früheren übereinstimmen. Die Differenz beider möge man mit früheren Ableitungen vergleichen.

Man kann nun die obige Reihe für y in folgender Art zur Bildung neuer Beziehungen verwerten. In Folge der Bedeutung von

$$y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

besteht demnach die Reihe

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{E}{Kz'}-\frac{4\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}+\dots\right).$$

Wir Differentiiren sie unter Beachtung des in VIII. gegebenen Wertes von $\frac{dx}{du}$, welcher in

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{dx}{du} = \frac{4\pi}{z'K^3}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots\right)$$

eingesetzt, den neuen Ausdruck für

$$41)\quad s = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\delta = \frac{\pi^2}{z'K^2}\,\frac{\frac{1q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots}$$

hervorgehen lässt.

Bemerkt man aber, dass der Nenner dieses Bruches durch $\frac{K}{4\pi}\sqrt{1+z'^2-2z'y}$ ersetzt werden kann, und dass ferner $s = \sqrt{y^2-1}$, so geht unter diesen Substitutionen das letzte Resultat durch Quadriren und Ordnen nach Potenzen von y in das folgende über

$$42)\quad y^3 - \frac{1+z'^2}{2z'}y^2 - y + \frac{1+z'^2}{2z'} + \frac{8\pi^6}{z'^3K^6}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}\dots\right)^2 = 0,$$

so dass wiederum y durch eine jetzt vollständige kubische Gleichung, deren Coefficienten bestimmten Reducenten genügen müssen, bestimmt ist. Auch hier ist das stets positive Absolutglied durch eine periodische Reihe definirt.

Im Anschluss an die in 134) aufgestellte Beziehung, welche auch in

$$43)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{z'z^2(\sin\varphi\cos\varphi}{(\varDelta+z')^2} = u\,\frac{\vartheta 2\varrho z.\,\vartheta_1 2\varrho z.\,\vartheta_2 2\varrho_2}{(\vartheta_3 2\varrho z)^3}$$

umgewandelt werden kann, und worin wir $\sin\varphi$ durch $\frac{s}{y-z'}$, ferner s durch $\frac{z^2\sin\varphi}{(\varDelta+z')}$ ersetzen, resultirt der der obigen kubischen Gleichung entsprechende transformirte Wert

$$44)\quad y^3 - \frac{1+z'^2}{2z'}y^2 - y + \frac{1+z'^2}{2z'} + \frac{\pi^2 z^4}{8z'^3K^2}u^2\left(\frac{\vartheta 2\varrho z.\,\vartheta_1 2\varrho z.\,\vartheta_2 2\varrho z}{\vartheta_3 2\varrho z}\right)^2 = 0,$$

worauf wir hier aufmerksam machen. Die daraus hervorgehenden Beziehungen und Identitäten wollen wir indessen nicht weiter hier discutiren.

Durch Combination der für $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $s = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ aufgestellten Reihen erhält man die Entwickelung von $e^{\pm x}$.

Aus der Addition von

$$45)\quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{E}{z'K} - \frac{4\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right).$$

und

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

folgt demnach die folgende Reihe mit eigentümlichem Bildungsgesetz

$$46)\quad e^x = \frac{E}{z'K} + \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{4q^4}{1-q^8}\cos\frac{4\pi u}{2K}\ldots\right).$$

und vermittelst Subtraction die ihr analoge

$$47)\quad e^{-x} = \frac{E}{z'K} - \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\cos\frac{4\pi u}{2K}\ldots\right).$$

die sich durch symmetrische Ordnung auszeichnen.

Die in 11) entwickelte Function für $e^{\frac{x}{2}}$ lässt sich mit Anwendung bekannter Formeln leicht durch einen aus zwei einfach periodischen Quotienten wie folgt ausdrücken.

Für

$$x = \ln\left(\frac{1 + z'\Delta + z^2\sin\varphi}{z' + \Delta}\right)$$

folgt

$$48)\quad e^{\frac{x}{2}} = \frac{1 + 2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^4\cos\frac{2\pi u}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{2K} + \ldots}{1 - 2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^4\cos\frac{2\pi u}{2K} + 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{2K} - \ldots}$$

Die Reihenentwickelungen für die Coordinaten der Kettenlinie sind, wie aus Vorstehendem ersichtlich ist, sehr mannichfach und zeigen, wie sehr die Eigenschaften der Curve in analytischer Hin-

sicht durch Anwendung auf die elliptischen Functionen sich letzteren anschmiegen. Um noch andere Beziehungen geometrisch-analytischer Natur aufzustellen, wollen wir zunächst an die bekannte Formel

$$\cos x - p\cos 3x + p^2\cos 5x \ldots = \frac{(1+p)\cos x}{1+2p\cos 2x + x^2}$$

erinnern, um mit Hülfe derselben einen andern Reihenausdruck abzuleiten.

Die häufig auftretende Reihe

$$\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \ldots$$

können wir durch Entwickelung der Brüche in geeigneter Reihenfolge leicht durch Partialquotienten von der Form

$$\frac{q(1+q^2)\cos\frac{\pi u}{2K}}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}$$

transformiren, daher ist vermöge der bekannten Bedeutung der Formel 18) der Ausdruck für l

$$49)\quad l = \frac{4\pi}{K}\cos\frac{\pi u}{2K}\left(\frac{q(1+q^2)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4} + \frac{q^3(1+q^6)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}\cdots\right)$$

und

$$50)\quad \sqrt{1+z'^2-2z'y} = z\sqrt{\frac{\varDelta - z'}{\varDelta + z'}}$$

$$= \frac{4\pi}{K}\cos\frac{\pi u}{2K}\left(\frac{q(1+q^2)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4} + \frac{q^3(1+q^6)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}\cdots\right)$$

Der in 19) für $\operatorname{tgam} u$ abgeleitete Wert kann auch mit Hilfe der bekannten Relation

$$\frac{d}{du}\left(\ln\sqrt{\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}}\right) = \operatorname{cotam} u,\quad \text{Durège § 58.}$$

aus der früher entwickelten Reihe

$$\sqrt{\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}} = \frac{4\pi}{2K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

hergeleitet werden, indem man letztere logarithmisch differentiirt.

Man findet ohne Mühe

51) $$\operatorname{cotam} u = \frac{\pi}{2K}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}$$

woraus vermittelst einer Umwandlung die erwähnte Formel hervorgeht.

Wir wollen ferner die Reihe für $\operatorname{tg}\delta$, also

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

in Beziehung auf δ und u differentiiren, man findet

$$\frac{d\delta}{\cos\delta^2} = \frac{\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right),$$

wird ebenfalls $y = \frac{1}{\cos\delta}$ differentiirt und endlich noch die Reihe 14) für y, so hat man zunächst

$$\frac{dy}{d\delta} = \frac{\sin\delta}{\cos\delta^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d\delta}{\cos\delta^2} = \frac{dy}{\sin\delta}.$$

$$\frac{z'dy}{du} = \frac{4\pi^3}{K^3}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right).$$

Eliminirt man also $\frac{d\delta}{\cos\delta^2}$ aus den beiden ersten Formeln und ersetzt $\frac{dy}{du}$ mittelst der letzten, so erhält man das Resultat

52) $$\sin\delta = 4\,\frac{\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}.$$

Man kann diese Entwickelungen in geometrischer Hinsicht deuten. Die Tangente der Kettenlinie im Punkte P schneide die Abscissenaxe in R. Bezeichnen wir nun die Strecken AR derselben zwischen der Tangente und der Ordinate y mit g, so ist

$$g\sin\delta = 1.$$

Daher ist vermöge des obigen Reihenausdrucks für $\sin\delta$

53) $$g = \frac{1}{4}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}{\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots}.$$

XI.

Wir geben noch im Folgenden diejenigen Reihenentwickelungen, welche als Functionen einer durch die Kettenlinie dargestellten geometrischen Beziehung, sei es eine Gerade, Fläche oder Winkel, von einiger Wichtigkeit sind.

Hinsichtlich der Ableitung dieser und anderer bemerken wir, dass hierfür zuweilen mehrere Wege offen stehen.

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen durch die Katheten s und l gebildeten Dreiecks kann man unter Benutzung der Differentialformel für y in Verbindung mit der aus

$$y = \frac{1+z'\varDelta}{1+\varDelta}$$

hervorgehenden Ableitung

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{z^4 \sin\varphi \cos\varphi}{(z'+\varDelta)^2\varDelta}$$

leicht berechnet werden. Da nämlich

$$\frac{z^4 \sin\varphi\cos\varphi}{(z'+\varDelta)^2} = s^2 \cot\varphi = sl$$

ist, so folgt

$$54) \quad f = \frac{2\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{9q^6}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{K}\ldots\right)$$

Es sei $K'C = m$. Man hat den leicht berechenbaren Ausdruck

Ferner sei der Winkel zwischen $K'C$ und AC mit i und der Winkel zwischen $K'C$ und KP mit σ bezeichnet. Aus

$$\frac{\sin\delta}{\sin i} = \frac{m}{z}$$

folgt, wie leicht zu finden ist, $\operatorname{tg} i = z'\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\sigma = \frac{\sin\varphi}{\varDelta}$, $z'\sin\sigma = \sin i$. Denn es ist

$$\operatorname{tg}\sigma = \operatorname{tg}(\delta+c) = \frac{\operatorname{tg}\delta + z'\sin\varphi}{1 - z'\sin\varphi\operatorname{tg}\delta} \quad \text{u. s. w.}$$

Daher kann man entweder zur Darstellung von $\operatorname{tg}\sigma$ die elliptischen Transcendenten benutzen, wodurch

$$55) \quad \operatorname{tg}\sigma = \frac{1}{\sqrt{zz'}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots}$$

oder man zieht die in der Theorie bekannte Reihe für $\frac{\sin \mathrm{am}\, u}{\Delta \mathrm{am}\, u}$ heran, welche demnach die folgende geometrische Bedeutung

$$56)\quad \operatorname{tg}\sigma = \frac{2\pi}{zz'K}\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

gewinnt.

Auf dieselbe Weise verwerten wir die für $\sin \mathrm{am}\, u$ bekannte Reihe um $\operatorname{tg} i = z'\sin\varphi$ durch dieselbe darzustellen. Demgemäss ist

$$57)\quad \operatorname{tg} i = \frac{2\pi z'}{Kz}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right).$$

Diese Interpretation dieser bekannten Reihen ist jedenfalls bemerkenswert.

Bemerkt man ferner, dass aus der Formel

$$y = \frac{1}{\cos\delta} = \frac{1+z'\Delta}{z'+\Delta}$$

die Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}\cdot\frac{1-\Delta}{1+\Delta}}$$

folgt, so geht auch die in V. abgeleitete Gleichung in die folgende

$$58)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \frac{4\pi}{(1+z')K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\dots\right)$$

über und analog folgt aus II.

$$59)\quad \tfrac{1}{4}\arcsin\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\,\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K} + \dots,$$

die demnach wie die vorhergehenden vermittelst der Kettenlinie geometrisch interpretirt ist.

Auch die früher aufgestellte Reihe

$$\frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+z'} = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2(1-q^2)^2}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \dots\right),$$

welche geometrisch durch eine [illegible] mplitudendreiecks, d. i. durch $l\sin\varphi$ bezeichnet wer[illegible] [illegible]iner Transformation

fähig. Wir multipliciren sie mit $\frac{d\varphi}{\Delta} = du$ und integriren. Das allgemeinere Integral ist

$$\ln\cos\varphi - z'\int\frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi\sqrt{z'^2+z^2\cos\varphi^2}} = 2\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}+\dots\right)+C,$$

oder

$$\ln\cos\varphi - \ln\frac{z\cos\varphi-\Delta+z'}{z\cos\varphi-\Delta-z'} = 2\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}\dots\right)+C.$$

Für $\varphi = 0$ folgt

$$0 = -\ln\frac{z-1+z'}{z-1-z'} = 2\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\dots\right)+C.$$

Daher ist

$$\tfrac{1}{4}\ln\frac{z\cos\varphi-\Delta+z'}{z\cos\varphi-\Delta-z'}\cdot\frac{z-1-z'}{z-1+z'}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u^2}{2K}+\dots,$$

oder mit Einführung der Relation

$$\tfrac{1}{4}\ln\frac{1+z'}{1-z'}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} = \frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u^2}{2K}+\tfrac{1}{2}\frac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi^2}{2K}+\dots,$$

Nun ist aber

$$\frac{1+z'}{1-z'}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} = \frac{1+z'}{\Delta+z'} = \frac{y-z'}{1-z'},$$

Demnach auch

$$60)\quad \frac{y-z'}{1-z'} = e^{4\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u^2}{2K}+\frac{1}{2}\frac{q^2(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u^2}{2K}\dots\right)}.$$

Man sieht, mit welcher Leichtigkeit solche Combinationen gewonnen werden können. Von denjenigen, welche noch zu erwähnen sind, wählen wir zum Zweck einer Differentiation die in 46) abgeleiteten Relationen, die demnach differentiirt

$$e^x\frac{dx}{du} = \frac{\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\dots\right),$$

$$e^{-x}\frac{dx}{du} = \frac{\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\dots\right),$$

und durcheinander dividirt die Formel

$$61)\quad e^{2x} = \frac{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}-\dots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}}$$

geben. Auch aus den beiden ersten ergeben sich nach Einsetzen des für $\frac{dx}{du}$ bekannten Wertes neue Relationen für $e^{\pm x}$.

Bemerkenswerter ist die Transformation der in 48) für $e^{\frac{1}{2}x}$ aufgestellten Formel, welche wir jetzt untersuchen wollen.

Man findet zunächst

$$62)\qquad \frac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{e^{\frac{1}{2}x}+1}=\frac{2q\sin\frac{\pi u}{2K}-2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K}+2q^{25}\sin\frac{5\pi u}{2K}\cdots}{1-2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+2q^{16}\text{ocs}\frac{\pi u}{K}-2q^{36}\cos\frac{3\pi u}{K}\cdots}$$

Die beiden hier erscheinenden Reihen sind, wie man sieht, elliptische Transcendenten. Da der Ausdruck zur Rechten mit dem Quotienten für die Function $\sin\operatorname{am} u$ übereinstimmt, wenn q anstatt q^4 eingeführt wird, so ist eine Reduction auf diese Relation leicht durchführbar. Lösen wir demnach die letzte Gleichung nach $e^{\frac{1}{2}x}$ auf, so ist in dem genannten Sinne unter Benutzung bekannter Formeln

$$63)\qquad \frac{1+\sqrt{z}\sin\varphi}{1-\sqrt{z}\sin\varphi}=e^4\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\cdots\right),$$

welche neue Beziehung wir nachher einer dynamischen Betrachtung zu Grunde legen werden.

Eine neue Transformation von 63) würde noch die folgende liefern

$$64)\qquad \frac{\Delta+z\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta-z\sin\varphi\cos\varphi}=e^4\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{K}+\cdots\right).$$

Aus der ersten kann noch mittelst einer weitern Umgestaltung die folgende abgeleitet werden.

$$65)\qquad \frac{1-\sqrt{z}\sin\varphi}{1+\sqrt{z}\sin\varphi}=$$

$$\frac{(1-2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q})(1-2\sqrt[4]{q^3}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q^3})\cdots}{(1+2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q})(1+2\sqrt[4]{q^3}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q^3})\cdots}$$

Für $\varphi=90$ folgt nach mehrfacher Umwandlung ein schon früher gefundenes Resultat.

Wir bemerken noch, dass wegen der leicht abzuleitenden Gleichung

$$e^{2x} = \frac{1 + \dfrac{z^2 \sin\varphi}{1 + z'\Delta}}{1 - \dfrac{z^2 \sin\varphi}{1 + z'\Delta}}$$

in Folge der Bedeutung von

$$g = \frac{1 + z'\Delta}{z^2 \sin\varphi}$$

die folgende Relation

$$e^{2x} = \frac{g+1}{g-1}$$

besteht.

VIII.

Die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionen.

Von

Paul Richard Domsch.

Erster Teil.

Einleitung.

Wenn wir in Folgendem statt der allgemeinen Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt vorwiegend die Cykliden in Betracht ziehen, wenn wir also für den Doppelkegelschnitt den imaginären Kugelkreis nehmen, so ist dies durchaus keine wesentliche Beschränkung. Von projectivem Standpunkt betrachtet hat jener ja keine ausgezeichnete Lage, wir können jederzeit unsere Cyklide, resp. das Cyklidensystem einer linearen Transformation unterwerfen, welche den Kugelkreis zu einem Kegelschnitt im Endlichen macht, und die zu gewinnenden Sätze werden dann in unveränderter Form sogar bestehen bleiben, wenn wir nach der Collineation den nunmehrigen Doppelkegelschnitt zur Grundlage der Massbestimmung wählen. Nehmen wir in den Transformationsformeln die Coefficienten complex an, so können wir sogar den Doppelkegelschnitt reell machen, wodurch allerdings alle Realitätsverhältnisse sich ändern, und auch unsere Resultate die bezüglichen [illegible] erleiden.

Wir beschäftigen uns demnach allein mit den Cykliden u suchen die Resultate zu verwerten, die von Moutard [1], Darboux Casey [3]) über jene Flächen und Flächensysteme gewonnen wurden.

Zur Erreichung des Zweckes, die Darstellung durch hyperellip sche Functionen zu leisten, bieten sich mehrere Wege dar.

Das Zunächstliegende würde sein, die Untersuchung direct führen und auszugehen von der Darstellung der Cyklide, bezogen a ein orthogonales Fünfkugelsystem in sogenannten pentasphäri schen Coordinaten (unter pentasphärischen Coordinaten ein Punktes versteht man die mit gewissen Constanten multiplicirte Potenzen des Punktes in Bezug auf jene 5 Fundamentalkugeln). In dem man diese Coordinaten als Functionen der beiden Krümmung linienparameter der Cyklide darstellt, zeigt sich sofort die Möglich keit der Durchführung der Aufgabe. (Zuerst ausgesprochen find sich dies bei Darboux, Comptes Rendus Bd. 69, p. 392: Sur u nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques). Die pent sphärischen Coordinaten lassen sich 5 hyperelliptischen ϑFunction vom Geschlecht 2 proportional setzen, welche einem sogenannt Rosenhain'schen Sechsersystem angehören, und nun wird die Kenn niss der ϑFunctionen und deren Relationen zu verwerten gesu für die Gewinnung geometrischer Sätze für die Cykliden.

---

1) Moutard: „Note sur la transformation par rayons vecteurs récip ques", „Note sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre", Nouv. A de Math. 2. S. Bd. 3., 1864, p. 306—9, p. 536—39.

— Sur les lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatri ordre, Comptes Rendus, Bd. 59., p. 243.

2) Darboux: „Sur une classe remarquable de courbes et de surfa algébriques", Paris, Gauthier-Villars, 1873. Man findet darin ausser ei der Pariser Akademie 1869 eingereichten Memoire eine Zusammenstellung a Noten und kleineren Aufsätze, die Herr Darboux über diesen Gegenstand schrieben, am Schluss des Werks auch eine ausführliche Litteraturangabe, Cykliden betreffend.

3) Casey: „On Cyclides and Sphero-Quarties, Phil. Transactions, Bd. 1 p. 585. In jüngster Zeit hat der Gegenstand eine erneute Behandlung fahren durch Herrn Gino Loria (Ricerche intorno alla Geometria della s e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di qu ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all' infinito, Memorie d Reale Academia delle Scienze di Torino, Ser. 2., Bd. 36.), der von der trachtung von Kugelcomplexen und Congruenzen ausgeht, und durch He Segre (Etude des différentes surfaces du 4e ordre à conique double etc., Ma Ann. Bd. 24., p. 313.), der in einer umfangreichen Abhandlung die Fläc vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt betrachtet als Centralprojectionen

Um insbesondere ausgezeichnete Curvensysteme auf der Cyklide zu erhalten, setzt man, in den einfachsten Fällen wenigstens, ϑ Functionen, deren Argumente sich von denen der gegebenen um Constante unterscheiden, gleich Null und erhält hierdurch eine Gleichung zwischen den beiden Parametern der Cyklide, also die Gleichung einer Curve auf der Fläche; die Wahl der Constanten bestimmt die Art der Curven.

Eine zweite Methode ist indirecter Natur und nimmt ihren Ausgangspunkt nicht von der Cyklide, sondern von Flächen, resp. Flächensystemen, die bereits durch hyperelliptische Transcendente dargestellt sind und in Beziehung zur Cyklide, resp. dem confocalen Cyklidensystem gesetzt werden können.

Herr Darboux gab im Jahre 1864 in den Annales de l'École Normale Supérieure eine einzweideutige Transformation an, welche eine Oberfläche 2ter Ordnung in eine Cyklide, eine Flächenschaar 2ten Grades in ein confocales Cyklidensystem verwandelt.

Nun ist die Fläche 2ten Grades, resp. die Flächenschaar 2ten Grades durch hyperelliptische Functionen dargestellt, in neuester Zeit z. B. in eingehender Weise von Herrn Staude[4]), der dazu gelangte, eine grosse Anzahl von Θ Relationen als geometrische Sätze über die Flächen 2ten Grades auszusprechen, und die Darstellung namentlich benutzte, um die bekannten Schliessungssätze zu erhalten, die sich auf Polygone beziehen, die von den gemeinsamen Tangenten der Flächen der Schaar 2ten Grades gebildet werden.

Von diesen Resultaten ausgehend, gelangt man mit Hilfe der Darboux'schen Transformation ohne erhebliche Mühe zu einer Darstellung des Cyklidensystems durch hyperelliptische Functionen, zu einer analogen Deutung der Θ Relationen in der Geometrie der Cykliden und zu entsprechenden Schliessungssätzen.

Schnittes zweier quadratischen Mannigfaltigkeiten von 3 Dimensionen im linearen Raum von 4 Dimensionen auf den gewöhnlichen Raum. Diese Methode führt ihn zu den bekannten und einzelnen neuen Sätzen über die Cykliden, sowie zu einer erschöpfenden Classification, die auch von Herrn Loria gegeben wird für den Fall eines nicht zerfallenden Doppelkegelschnitts. Wir verweisen noch besonders auf die geschichtliche Einleitung, die Herr Segre seiner Abhandlung vorausschickt.

4) Staude: „Geometr. Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen 1. Ordng. im System der confocalen Flächen 2. Grades", Math. Annalen, Bd. 22., p. 1.

— „Ueber geodätische Polygone auf den Flächen 2ten Grades", Math. Ann., Bd. 21., p. 219.

Noch eine andere Flächenart ist durch hyperelliptische Fu tionen dargestellt, die Kummer'sche Fläche.

Nachdem Herr Klein im 5ten Band der Math. Annalen p. 3 fals Erster auf die Möglichkeit der Darstellung hingewiesen ha olgten die Ausführungen durch die Herren Cayley[5]) und Borchard im 83ten Band des Crelle'schen Journals, von H. Weber[7]) im 84t Band desselben Journals und von Herrn Rohn[8]) im 15ten Band d Annalen.

Andererseits hat Herr Lie im 5ten Band der Annalen „Ueb Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe", p. 145. ff. g zeigt, wie durch eine Berührungstransformation, welche die Punkt des einen Raumes in die Minimalgeraden[9]) des andern, di Geraden in die Kugeln, Flächenelemente, die consecutive Punkt einer Geraden gemein haben, in die Flächenelemente der entsprechen den Bildkugel überführt, die Kummer'sche Fläche in eine Cy klide transformirt wird; die Kummer'sche Fläche wird dabei a gesehen als Brennfläche einer Congruenz 2ter Ordnung und Classe, nic als Singularitätenfläche einer Complexschaar 2ten Grades.

Hat man auf diesem Wege die Beziehungen zwischen Kumm scher Fläche und Cyklide vollständig klar gelegt, so ist damit au die Darstellung der Cyklide durch hyperelliptische Functionen g eistet. Die ϑ Relationen bleiben ja bei der Berührungstransfo mation invariant, sie ändern nur ihre Bedeutung, wie es das Ueb tragungsprincip angiebt.

Dabei haben wir noch den Vorteil, dass wir zu gleicher Zeit Arten der Darstellung erhalten, entsprechend den 3 Weisen, dur welche die Kummer'sche Fläche durch ϑ Functionen dargeste wurde:

---

5) Cayley: „On the double Θfunctions in connexion with a 16 nod quartic surface", Crelle's Journal Bd. 83., p. 210.

6) Borchardt: „Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche dur die Göpel'sche biquadratische Relation etc.". Crelle's Journal, Bd. 83., p. 2

7) Weber:. „Ueber die Kummer'sche Fläche 4ter Ordnung mit 16 Kn teupuncten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit 2 Veränderlichen Crelle's Journal, Bd. 84., p. 332.

8) Rohn: „Transformation der hyperelliptischen Functionen $p=$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche", Math. Annalen, Bd. 15., p. 3

9) Anschliessend an Herrn Lie werden wir Minimalgerade die Gerad nennen, welche den Kugelkreis treffen, die „lignes de longueur nulle".

1. die liniengeometrische Darstellung Rohn's;
2. die Borchardt'sche Darstellung;
3. die Cayley-Weber'sche Darstellung [10]).

In Folge dessen erhalten wir auch 3 Serien von Curvensystemen auf Kummer'scher Fläche und Cyklide.

Wenn wir in Folgendem der 2ten, indirecten Methode den Vorzug geben und also einmal von der Flächenschaar 2ten Grades das andere Mal von der Kummer'schen Fläche ausgehend, die Darstellung der Cykliden durch hyperelliptische Transcendente leisten, so geschieht dies zunächst aus dem Grunde grösserer Einfachheit. Wir können ja das reiche, schon vorhandene Material verwerten, und es kommt in der Hauptsache nur auf eine Umdeutung der bereits gewonnenen Formeln und Sätze an. Weiterhin eröffnet sich uns hierdurch aber auch die Perspective, mit Hilfe der Cyklide als Zwischenglied eine Beziehung zwischen Fläche 2ten Grades und Kummer'scher Fläche herzustellen und so z. B. die Schliessungssätze auch für die Geometrie der Kummer'schen Fläche zu verwerten.

Demgemäss wird sich der Gang der Untersuchung in folgender Weise gestalten:

Im **ersten Teile** behandeln wir die Beziehungen zwischen der Flächenschaar 2ten Grades und dem confocalen Cyklidensystem und zwar im 1ten Capitel zunächst die (1, 2) deutige Transformation, welche die Ueberführung leistet. Wir gewinnen dadurch im 2ten Capitel eine Uebersicht über die gestaltlichen Verhältnisse der Cykliden, über den Verlauf der Krümmungslinien und der geodätischen Curven auf denselben.

Das 3te Capitel deutet das Abel'sche Theorem für überall endliche Integrale in der Flächenschaar 2ten Grades und dem Cyklidensystem. Wir finden, dass die Gleichungen desselben Differentialgleichungen der 2 Flächen des Systems je 2fach berührenden Kreise sind, und erhalten hierauf Sätze für die 4 durch ein Punktepaar gehenden Doppelberührungskreise, sowie die Deutung des einfachen Additionsproblems im Cyklidensystem. Im letzten Paragraphen dieses Capitels endlich

---

10) Die dreierlei ϑ hängen dabei so zusammen, dass die der zweiten Darstellung aus denen der 1ten, und die der 3ten aus denen der 3ten durch quadratische Transformation gewonnen werden können, die der 2ten aus denen der 1ten, also durch Zweiteilung der Argumente hervorgehen.

zeigen wir, wie man zu Schliessungssätzen gelangen kann, die innerhalb der Congruenz der gemeinsamen Doppelberührungskreise zweier confocaler Flächen der Cyklidenschaar gelten und führen dies an einem Beispiel durch.

Im zweiten Teile behandeln wir nun die Transformation des Raumes der Kummer'schen Fläche in den Cyklidenraum, welche durch die erwähnte Berührungstransformation vermittelt wird.

Nachdem wir im ersten Capitel zunächst die Fundamentalgebilde in der Geometrie der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung betrachtet haben, setzen wir sodann die einzelne Kummer'sche Fläche in Beziehung zur einzelnen Cyklide, eine Schaar Kummer'scher Flächen, die sich längs einer ausgezeichneten Haupttangentencurve 8ter Ordnung berühren, in Beziehung zum confocalen Cyklidensystem. Der Darstellung der Kummer'schen Fläche durch die Parameter der Haupttangentencurven entspricht die Darstellung der Cyklide durch Krümmungslinienparameter.

Um nun die Abbildung von Curven auf der Kummer'schen Fläche in solche auf der Cyklide in möglichst allgemeiner Weise zu behandeln, betrachten wir hierauf zunächst die Abbildung von Linienflächen, deren Erzeugende einem ausgezeichneten linearen Complex angehören, und alsdann das Entsprechen von Curven auf beiden Flächen mit besonderer Berücksichtigung der Singularitäten.

Das 2te Capitel bringt nun die Anwendung der erhaltenen Resultate; wir betrachten Kummer'sche Fläche und Cyklide unter Berücksichtigung der ϑ Functionen. Den dreierlei ϑ Functionen, den lineargeometrischen, den Borchardt'schen, den Weberschen entsprechen 3 Reihen von Curvensystemen auf der Cyklide, wie auf der Kummer'schen Fläche; diese Curvensysteme werden der Untersuchung unterzogen.

Im Schlusscapitel endlich gehen wir noch etwas ein auf die Beziehungen zwischen der Kummer'schen Flächenschaar und der Flächenschaar 2ten Grades, insbesondere auf die Uebertragung der im 3ten Capitel des ersten Teils behandelten Schliessungssätze.

I. Teil.

Flächenschaar IIten Grades und Cyklidensystem.

I. Capitel.

Transformation der Flächenschaar 2ten Grades in ein confocales Cyklidensystem.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gab Herr Darboux im Jahre 1864 in den Annales de l'École Normale, Bd. 1. eine (1, 2)-deutige Transformation an, welche eine Oberfläche 2 ten Grades in eine Cyklide, eine Flächenschaar 2ten Grades in ein confocales Cyklidensystem verwandelt.

Ist nämlich irgend eine Fundamentalkugel

$$S_0 = 0$$

gegeben, so ordnen wir einem beliebigen Punkte μ die 2 Punktkugeln m und m' zu, welche dem Kugelbüschel angehören, das durch die Fundamentalkugel und die Polarebene des gegebenen Punktes μ in Bezug auf die Kugel bestimmt wird. Neben diese Zuordnung von Punkten und Punktepaaren stellt sich eine solche von Ebenen und Punktepaaren, indem man jeder Ebene das Punktkugelpaar entsprechen lässt, das sich in dem durch Ebene und Fundamentalkugel bestimmten Büschel findet. Reellen Ebenen entsprechen dann nur reelle Punktepaare, wenn erstere die Fundamentalkugel nicht schneiden; m und m' sind also allein reell, wenn μ im Innern der Kugel liegt. Es bildet sich auf diese Weise das Innere der Kugel vermöge der Transformation auf den gesammten Punktraum ab.

Nimmt man den Fundamentalkugelmittelpunkt zum Coordinatenanfang und nennt $x'y'z'$ die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes μ, so ist die Transformation analytisch definirt durch die Formeln:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2R_0^2 x}{x^2+y^2+z^2+R_0^2} \\ y' = \dfrac{2R_0^2 y}{x^2+y^2+z^2+R_0^2} \\ z' = \dfrac{2R_0^2 z}{x^2+y^2+z^2+R_0^2} \end{cases}$$

Hierbei sind x, y, z die Coordinaten des Punktpaares mm', R_1 der Radius der Fundamentalkugel [11]).

Wir sehen ohne weiteres aus den Formeln:

Beschreibt μ eine Ebene, so beschreibt das Punktepaar (mm') eine Kugel, die orthogonal zu der gegebenen ist; geht die Ebene durch den Kugelmittelpunkt, so wird aus ihr wiederum eine Ebene; berührt sie die Fundamentalkugel, so wird sie zu einer Punktkugel, dem Berührungspunkt.

Die Geraden gehen mit Hilfe der Transformation in Kreise über, die senkrecht auf der Fundamentalkugel stehen.

Einer Curve $n$ten Grades entspricht im Allgemeinen eine Curve vom Grade $2n$, die den Kugelkreis in $2n$ Punkten schneidet. Wenn indessen der Mittelpunkt der Fundamentalkugel ein αfacher Punkt der Curve ist, so vermindert sich der Grad um α und um ebensoviel die Zahl der Schnittpunkte mit dem Kugelkreis. Berührt die Curve die Fundamentalkugel in einem Punkte a, so ist dieser Punkt a ein Doppelpunkt der transformirten Curve.

Im Speciellen entspricht also einem Kegelschnitt eine sphärische Curve 4ter Ordnung, die den Kugelkreis in 4 Punkten schneidet; berührt der Kegelschnitt die Fundamentalkugel in 2 Punkten, so zerfällt die Curve 4ter Ordnung in 2 sich in 2 Punkten schneidende Kreise.

Einer Fläche $n$ter Ordnung, welche im Mittelpunkt der Fundamentalkugel einen $p$fachen Punkt besitzt, entspricht eine Fläche von der Ordnung $(2n-p)$. Berührt die ursprüngliche Fläche die Fundamentalkugel in einem Punkte a, so hat die transformirte Fläche in a einen Knotenpunkt.

Den Kugelkreis enthält die Fläche halb soviel mal zählend, als ihre Ordnung n beträgt [12]).

Einer Oberfläche 2ten Grades entspricht im Allgemeinen eine Fläche 4ter Ordnung, die den Kugelkreis als Doppelcurve enthält

---

11) Genau dieselben Transformationsformeln begegnen uns bei Beltrami Ann. di Mat. 2. Ser., Bd. 2., 1868, Teoria fondam. degli spazii di curv. const., später bei Killing, Bd. 86. u. 89. des Crelle'schen Journ. Sie dienen daselbst zur Transformation des gewöhnlichen Raumes in einen solchen nicht-euklidischen, in welchem sich die Geraden in 2 Punkten schneiden.

12) Wenigstens im Allgemeinen; ist der Mittelpunkt $p$facher Punkt, so zählt der Kugelkreis $n-p$fach.

it die Oberfläche 2ten Grades durch den Mittelpunkt der Funda-ntalkugel, so ist die transformirte Fläche nur von der 3ten Ord-ng; es scheidet sich die unendlich ferne Ebene ab, der Kugelkreis einfache Linie auf dem übrig bleibenden Teil.

Flächen vierter Ordnung aber, die den Kugelkreis als Doppel-rve besitzen, nennen wir nach dem Vorgange von Darboux und outard Cykliden. Wir haben somit den Satz erhalten:

„Oberflächen 2ter Ordnung verwandeln sich mit Hilfe der ein-weideutigen Transformation, wie sie durch die Formeln 1) ver-mittelt wird, in Cykliden.“

Wir greifen jetzt eine beliebige Fläche 2ten Grades heraus, und eziehen dieselbe in Gemeinschaft mit der Fundamentalkugel auf s ihnen gemeinsame Polartetraeder, dessen Ebenen bezeichnet seien urch

$$) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Alsdann können wir die Gleichungen von Kugel und Oberfläche ten Grades in der Gestalt schreiben:

$$) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \\ \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0 \end{cases}$$

Beide Flächen bestimmen eine ganze Flächenschaar, die der-lben Developpabelen einbeschrieben ist und dargestellt wird durch le Gleichung

$$) \quad \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} + \frac{x_4^2}{a_4 - \lambda} = 0$$

o

$$a_i = \frac{1}{\alpha_i} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Die Ebenen des gemeinsamen Polartetraeders verwandeln sich ermöge der Transformation 1) in 4 Kugeln, die orthogonal zur undamentalkugel und gegen einander sind; sie bilden mit der Fun-amentalkugel ein **pentasphärisches Fundamentalsystem**; ie 4 Ecken des Polartetraeders sind die 4 Centren der neu hinzu-ommenden Kugeln.

Die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf das Polartetraeder erwandeln sich durch die Transformation, wie sich sofort ergiebt [13]),

---

13) Man vergleiche Darboux, Sur une classe rem. etc. p. 133.

in die Verhältnisse der 4 Potenzen des Punktes in Bezug auf die 4 den Coordinatenebenen entsprechenden Kugeln zu der Potenz in Bezug auf die gegebene Fundamentalkugel, jede Potenz dividirt durch den Radius der zugehörigen Kugel des Fundamentalsystems. Bezeichnet man demnach mit S_i $(i=1, 2, 3, 4)$ die 4 Potenzen eines Punktes in Bezug auf die vier den Tetraederebenen entsprechenden Kugeln, mit S_0 die Potenz in Bezug auf die Fundamentalkugel, mit R_i $(i=1, 2, 3, 4)$ die Radien der ersteren 4 Kugeln, mit R_0 den Radius der Fundamentalkugel und setzt

5) $$\frac{S_i}{R_i} = s_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

so erhält man

6) $$x_i = \frac{s_i}{s_0}.$$

Mit Hilfe dieser Transformationsformel nimmt die Gleichung der Cyklidenschaar, welche der Flächenschaar 4) entspricht, die Gestalt an

6) $$\frac{s_1^2}{a_1-\lambda} + \frac{s_2^2}{a_2-\lambda} + \frac{s_3^2}{a_3-\lambda} + \frac{s_4^2}{a_4-\lambda} = 0.$$

Diese Gleichung stellt aber bekanntlich ein 3fach orthogonales Cyklidensystem dar (Darboux, a. a. O. p. 134.). Durch jedes reelle Punktepaar im Raume $(s_1 s_2 s_3 s_4)$ gehen 3 reelle Flächen der Schaar die sich rechtwinklig, also in ihren Krümmungslinien schneiden. Wir fassen dies Resultat in den Satz:

„Die Flächenschaar zweiten Grades, deren Flächen derselben „Developpabelen einbeschrieben sind, verwandelt sich durch die gegebene Transformation in ein confocales Cyklidensystem“.

Wir gelangen zu demselben confocalen Cyklidensystem, wenn wir von 4 anderen Flächen 2ten Grades ausgehen, deren reciproke[14]) Flächen mit der reciproken Fläche der durch 3) dargestellten confocal sind und mit der letzteren gemeinschaftlich von einer Gleichung 5ten Grades abhängen[15]); die ursprünglichen vier Flächen bilden also mit der durch 3) dargestellten ein Flächenbüschel 2ten Grades. Indem wir dergestalt einer jeden derselben eine bestimmte der 4 übrigen Kugeln des Fundamentalsystems zuordnen, erhalten wir 4 neue Flächenschaaren, und diese transformiren sich in dasselbe Cyklidensystem.

14) Reciprok in Bezug auf je 1 der Fundamentalkugeln.

15) Darboux, a. a. O. p. 114.

Statt die Flächenschaaren zu transformiren, können wir natürlich auch die reciproken Flächenbüschel in Betracht ziehen, indem wir den Ebenen des Raumes des Flächenbüschels die Punktepaare entsprechen lassen.

Eine Fläche aus einem der Büschel ist alsdann der Ort der Centren der ∞^2 Kugelschaar, deren Kugeln die entsprechende Cyklide je doppelt berühren und sie dergestalt erzeugen.

Neben diese eine Erzeugung stellen sich 4 andere durch weitere 4 Kugelschaaren, die Centren bilden 4 Flächen aus den 4 übrigen Büscheln, die mit der aus dem ersten Büschel confocal sind [16]).

Die Durchschnittscurve einer Kugel und einer beliebigen Fläche 2ter Ordnung hat entweder keine reellen Punkte, oder besteht aus zwei paaren Zügen oder aus einem paaren Zuge.

Ist eine der Fundamentalkugeln ohne reelle Punkte, aber mit reellem Centrum, d, h. sind die Coefficienten reell, so ist die Durchschnittscurve ohne reelle Punkte, das Polartetraeder hat dann bekanntlich 4 reelle Ecken. Also haben die 4 übrigen Kugeln des Fundamentalsystems reelle Centren. Dann müssen 2 der 5 Kugeln conjugirt sein, d. h. im Centrum übereinstimmen und Radien der Form R resp. $i.R$ besitzen. Es ist also der Mittelpunkt der Ausgangskugel ohne reelle Punkte zugleich der Mittelpunkt einer zweiten Kugel des Orthogonalsystems mit reellen Punkten. Da in diesem Falle 3 der Ebenen des Polartetraeders durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, so fällt die vierte Ebene des Tetraeders mit der unendlich fernen Ebene zusammen, und weiterhin wird das Fünfkugelsystem aus 3 orthogonalen Ebenen und 2 Kugeln gebildet, die ihre Mittelpunkte im Schnittpunkte jener 3 Ebenen haben, deren Radien aber von der Form R, beziehentlich $i.R$ sind.

Da in diesem Falle alle 5 Polartetraeder reelle Ecken besitzen, so bestehen die 5 Durchschnittscurven der 5 Kugeln mit den 5 Deferenten entweder aus je 2 paaren Zügen oder sind Curven ohne reelle Punkte. Diese 5 Curven sind die Focalcurven des Cyklidensystems, 2 von ihnen sind reell und bestehen also aus je 2 paaren Zügen, 3 dagegen haben keine reellen Punkte.

Das orthogonale Fünfkugelsystem kann aber auch so beschaffen sein, dass 3 Kugeln reelle Punkte besitzen, 2 Kugeln dagegen nur imaginäre Punkte und dabei conjugirt imaginäre Centren. (Die

16) Diese Flächen, die den Ort für die Centren der doppelt berührenden Kugeln bilden, nennt Herr Darboux „Deferenten".

Gleichungen der letzteren haben alsdann keine reellen Coefficient sondern letztere haben conjugirt imaginäre Werte.).

Gehen wir in diesem Falle von einer der reellen Kugeln a so erhalten wir ein Polartetraeder mit 2 reellen und 2 conjug imaginären Ecken. Die Durchschnittscurve mit der entsprechend deferenten Fläche besteht demnach bei allen 3 reellen Kugeln jede mal aus e i n e m p a a r e n Z u g mit reellen Punkten, es sind also Focalen des Cyklidensystems reell und bestehen aus einem paar Zug. In diesem Falle hat die Gleichung der Flächenschaar 2te Grades, bezogen auf das kanonische System 2), keine reellen Coe ficienten mehr, in der Gleichung 4) sind jetzt $2a_i$ conjugirt imagin ebenso wie die entsprechenden $2x_i$. Es gehen jetzt nicht mehr dur jeden Punkt des Raumes 3 reelle Flächen der Schaar, sondern n durch die im Innern der Kugel gelegenen Punkte. Nun bildet sic aber das Innere der Kugel auf den gesammten Cyklidenraum ab; gehen also trotzdem im Cyklidenraum durch jeden reellen Punkt i Raume 3 reelle Flächen des confocalen Cyklidensystems hindurc Die Cykliden des confocalen Systems haben in diesem Falle ab eine wesentlich andere Gestalt als in dem, wo nur eine der Kugel ohne reelle Punkte war. Die Cykliden sind in diesem Falle durc weg einteilig, der Schnitt mit einer Symmetrieebene liefert ein Cu vensystem, wie es sich bei Herrn Holzmüller [17]) gezeichnet findet.

II. Capitel.

Gestaltliche Verhältnisse der Cykliden.

§ 1. *Hauptformen.*

Betrachten wir im Raum der Flächenschaar 2ten Grades Fundamentalkugel, oder irgend eine andere Fläche der Schaar Fundamentalfläche der Massbestimmung [18]), so stellt die Fläch schaar in dieser Massbestimmung ein dreifach orthognoales Fläch system dar. Durch jeden reellen Punkt gehen 3 reelle Flächen

---

17) „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften", 64. u. 66. Man vergl. auch Siebeck, Cr. Journ., Bd. 57., p. 359., Bd. p. 173.

18) Cayley war der erste („Sixth Memoir upon Quantics", Phil. Tra actions Bd. 149., 1859) der zu der Auffasssung gelangte, das „Mass" ni dem Gebilde anhaften zu lassen, sondern es darzustellen als Beziehung einem zweiten Gebilde. Man vergleiche auch Klein: „Ueber die sogenan Nicht-Euklidische Geometrie", Math. Annalen Bd. 4., p. 573., Bd. 6., p.

Schaar, und diese schneiden sich jeweils in den Krümmungslinien im erweiterten Sinne des Wortes.

Beschränken wir uns jetzt ausserdem auf den Fall, wo alle Polartetraeder 4 reelle Ecken besitzen, wo also nur eine Kugel ohne reelle Punkte ist, aber reelle Coefficienten hat, und greifen die Flächenschaar heraus, die zu der letzteren Kugel gehört, so besitzt diese Flächenschaar die grösste Aehnlichkeit mit einem gewöhnlichen confocalen System, bei welchem der Kugelkreis zur Flächenschaar gehört; namentlich sind die Realitätsverhältnisse vollkommen übereinstimmend.

Nehmen wir die Ausgangsfläche 2ten Grades zudem so an, dass ihr Mittelpunkt mit dem der in Rede stehenden Kugel übereinstimmt, so besteht das Polartetraeder aus den 3 sich rechtwinklig schneidenden Hauptebenen im Verein mit der unendlich fernen Ebene.

Setzen wir in 4)

8) $$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

so erhalten wir bekanntlich für

I. $a_1 > \lambda > a_2$ Zweischalige Hyperboloide
$\lambda = a_1$ Focalhyperbel in der Ebene $x_2 = 0$.

II. $a_2 > \lambda > a_3$ Einschalige Hyperboloide
$\lambda = a_3$ Focalellipse in der Ebene $x_3 = 0$.

III. $a_3 > \lambda > a_4$ Ellipsoide.

Der Verlauf der Krümmungslinien im projectiven Sinne auf einer Fläche der Schaar ist in diesem Falle vollständig analog wie im Fall eines gewöhnlichen confocalen Systems; auch jetzt giebt es auf jedem Ellipsoid und jedem 2schaligen Hyperboloid die bekannten Singularitäten in den den Nabelpunkten des gewöhnlichen confocalen Systems entsprechenden Punkten, den Durchschnittspunkten mit den Focalcurven.

Diese Analogie hört aber auf, sobald wir eine Flächenschaar betrachten mit einem Polartetraeder, von dem 2 Ecken und 2 Ebenen conjugirt imaginär sind.

Wir wollen zu gleicher Zeit erwähnen, dass, wofern wir allgemeinste Flächenschaaren 2ten Grades betrachten würden, also statt der zu Grunde gelegten Kugel eine beliebige Fläche 2ten Grades nehmen, die besprochene Transformation uns auf ein System von

Flächen 4ter Ordnung mit einer gemeinsamen Doppelcurve 2ten Grades von allgemeinem Charakter führen würde. Die Sätze über Cyklide und Cyklidensystem sind also auch von hier aus einer sofortigen Erweiterung auf Flächen 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt und Systemen von solchen Flächen fähig. (cf. Einleitung p. 193.).

Durch die gegebene Transformation gehen die 3 Coordinatenebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, die den Mittelpunkt gemeinschaftlich enthalten, in sich über; wir wollen sie, als Kugeln mit unendlich grossem Radius betrachtet, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ nennen. Die unendlich ferne Ebene verwandelt sich in eine Kugel mit endlichem reellen Radius $s_4 = 0$, die ihren Mittelpunkt im Schnittpunkt jener 3 Ebenen besitzt.

Jede Fläche der Flächenschaar 2ten Grades mit reellen Punkten geht durch die Transformation in eine Cyklide derselben Eigenschaft über. Wir geben zunächst eine übersichtliche Zusammenstellung der verschiedenen Formen:

I.	$a_1 > \lambda > a_2$	Zweischalige Cykliden (Schalen auseinander) Grenzwerte $\lambda = a_1 \quad \lambda = a_2$ Grenzflächen $s_1 = 0 \quad s_2 = 0$ In $s_2 = 0$ liegt eine reelle Focalcurve.
II.	$a_2 > \lambda > a_3$	Ringförmige Cykliden Grenzwerte $\lambda = a_2 \quad \lambda = a_3$ Grenzflächen $s_2 = 0 \quad s_3 = 0$ In beiden Grenzflächen reelle Focalcurven.
III.	$a_3 > \lambda > a_4$	Zweischalige Cykliden (Schalen ineinander) Grenzwerte $\lambda = a_3 \quad \lambda = a_4$ Grenzflächen $s_3 = 0 \quad s_4 = 0$ In $s_3 = 0$ eine reelle Focalcurve.
IV.	$a_4 > \lambda > a_1$	Cykliden ohne reelle Punkte.

Die Grenzflächen werden von den Focalcurven begrenzt, von denen also 2, auf $s_2 = 0$ und $s_3 = 0$ gelegen, reell sind.

I. Zweiteilige Cykliden mit auseinander ligenden Schalen.

$$a_1 > \lambda > a_2.$$

Diese Cykliden beginnen mit der doppelt überdeckten Ebene $s_1 = 0$ und hören auf mit dem von der in $s_2 = 0$ verlaufenden

skatischen Focalcurve begrenzten inneren Teile von $s_2 = 0$. ischen legen sich die übrigen Flächen, immer eine von der nden umschlossen. (Siehe Fig. 1.).

II. Ringförmige Cykliden.

$$a_2 > \lambda > a_3.$$

Diese Cykliden beginnen mit dem doppelt überdeckten, von der nnten Focalcurve begrenzten äussern Teile von $s_2 = 0$ und gen für $\lambda = a_3$ mit dem doppelt überdeckten, von der Focalcurve lbst begrenzten innern Teile von $s_3 = 0$. (Siehe Fig. 1.). Die alten der zwischen liegenden Cykliden kann man sich, von der zu- genannten Grenzfläche ausgehend vorstellen, indem man letztere immer mehr aufblähen lässt, doch so, dass 2 Einschnürungen $s_2 = 0$ sich einstellen. Hier wächst der verticale Symmetrie- itt langsam bis zur lemniskatischen Focalcurve als oberen Grenze.

I. Zweiteilige Cykliden mit ineinander liegenden Schalen.

$$a_3 > \lambda > a_4.$$

Diese Cykliden beginnen mit dem nicht schraffirten doppelt über- ten Teile von $s_3 = 0$ (siehe Fig. 2.) und gehen alsdann über in hen, deren eine Schale die andere umschliesst. Die Schalen rn sich, je mehr λ abnimmt, immer mehr und mehr und fallen $\lambda = a_4$ zusammen, indem sie alsdann die Kugel $s_4 = 0$ in ihrer n Ausdehnung doppelt überdecken; natürlich muss dann die lcurve auf dieser Grenzfläche ohne reelle Punkte sein.

§ 2. *Krümmungslinien.*

Die Krümmungslinien (im projectiven Sinne) der Flächenschaar Grades verwandeln sich durch unsere Transformation in die mmungslinien der Cykliden des confocalen Systems im gewöhn- n Sinne des Wortes, da ja das Cyklidensystem ein dreifach ortho- les Flächensytem ist. Auf jeder Cyklide der Schaar werden die mmungslinien von Cykliden ausgeschnitten, die den beiden noch gen Hauptarten mit reellen Punkten angehören. Durch jeden kt der herausgegriffenen Cyklide gehen infolgedessen 2 Krüm- gslinien, die auf einander senkrecht stehen. Sie sind im Allge- en von der 8ten Ordnung; nur die 5 Schnitte mit den Kugeln Fundamentalsystems ergeben Curven 4ter Ordnung (vom Ge- cht 1); auf den ringförmigen Cykliden sind 4 dieser Curven , auf den übrigen Cykliden nur 3. 2 Krümmungslinien 8ter

Ordnung schneiden sich in 16 Punkten. — Diese sind sämmtlich reell, wenn die Krümmungslinien von verschiedener Art sind, dagegen sämmtlich imaginär bei Krümmungslinien derselben Art.

Die gestaltlichen Verhältnisse dieser Curven veranschaulichen am besten die Figuren (siehe Fig. 2., 3., 4.; die ringförmige Cyklide, Fig. 3., ist schematisch als Ring gezeichnet.)

§ 3. *Geodätische Linien.*

Bei der eingeführten projectiven Massbestimmung im Raum der Flächenschar 2ten Grades bleiben die Geraden natürlich geodätische Linien; das Linienelement derselben wollen wir mit $d\sigma$ bezeichnen.

Durch die in Rede stehende Transformation nun, welche die Geraden in Orthogonalkreise zur Fundamentalkugel überführt, transformirt sich das Linienelement $d\sigma$ in

$$d\Sigma = \frac{ds}{S}$$

wo ds das Linienelement in gewöhnlicher Massbestimmung und S die Potenz des in Betracht gezogenen Punktes in Bezug auf die Fundamentalkugel bedeutet; dieses $d\Sigma$ ist das Linienelement eines Orthogonalkreises zur Fundamentalkugel [19].

Die projective Massbestimmung des ersten Raumes, die sich bei Collineationen reducirt, wird damit übergeführt in eine Massbestimmung, die sich einer Transformation durch reciproke Radien gegenüber covariant verhält — bei letzterer gehen ja Kugeln wiederum in Kugeln, Kreise in Kreise, Kugelenveloppen in Kugelenveloppen über. In dieser Massbestimmung werden alsdann die geodätischen Linien durch jene Orthogonalkreise vertreten. Diese Massbestimmung wollen wir eine anallagmatische nennen [20].

---

19) cf. Darboux, a. a O. p. 231., p. 217.

20) Die Geometrie in dieser Massbestimmung ist unabhängig von Darboux betrachtet worden von Beltrami: Teoria fondam. degli spazii di curvatura const. Ann. d. Mat. 2. S. 2. B. und im Anschluss daran von Killing: „Ueber 2 Raumformen mit const. pos. Krümmg." Bd. 86. des Cr. J. Wir wollen noch erwähnen, dass in neuester Zeit namentlich Herr Poincaré in seinen Publicationen in den Acta Math. von der gedachten Massbestimmung ausgedehnten Gebrauch macht, wenn auch zumeist im Raum von 2 Dimensionen und mit der Modification, dass bei ihm der Fundamentalkreis die Axe der reellen Zahlen ist.

„Entsprechend dem Fundamentalsatz der projectiven Massbestim„mung ist alsdann die Entfernung 2er Punkte definirt als der Loga„rithmus des Doppelverhältnisses der gegebenen 2 Punkte mit den „Schnittpunkten des hindurchgelegten Orthogonalkreises mit der „Fundamentalkugel."

Fixiren wir in der vorgeführten Weise die Massbestimmungen in unsern beiden Räumen, so können wir den Satz aussprechen:

„Geodätische Linien verwandeln sich durch die Darboux'sche „Transformation wiederum in geodätische Linien."

Sind uns 2 confocale Flächen 2ten Grades gegeben, so wissen wir, dass die gemeinsamen Tangenten an die beiden Flächen geodätische Linien auf den Flächen umhüllen. Den gemeinsamen Tangenten an die confocalen Flächen 2ten Grades (confocal im projectiven Sinne) entsprechen je 2fach berührende Kreise an die entsprechenden 2 confocalen Cykliden; diese umhüllen also in der definirten anallagmatischen Massbestimmung ebenfalls geodätische Linien auf den Cykliden.

III. Capitel.

Das Abel'sche Theorem für überall endliche Integrale und seine Bedeutung für Flächenschaar 2ten Grades und Cyklidensystem.

§ 1. *Die Congruenz der gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen.*

Greift man aus der Schaar der Flächen 2ten Grades ein Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$ und ein einschaliges Hyperboloid $\mu = \mu_0$ heraus, (wir beschränken uns hierbei auf den in Cap. II. § 1. zuerst angeführten Hauptfall, für welchen die Realitätsverhältnisse dieselben sind wie beim gewöhnlichen confocalen System) und beschränkt man die Variabilität der 3 elliptischen Parameter ν, μ, λ eines Raumpunktes dergestalt, dass

1) $$a_1 > \nu > a_2 \quad \mu_0 > \mu > a_3 \quad \lambda_0 > \lambda > a_4$$

ist, d. h. zieht man diejenigen reellen Punkte allein in Betracht, von welchen aus sich 4 reelle Tangenten an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 legen lassen, so zeigt Herr Staude in der bereits genannten Habilitationsschrift p. 22, dass die Congruenz 4ter Ordnung und Classe der gemeinsamen reellen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 dargestellt wird durch das simultane System von Differentialgleichungen:

2) $$\begin{cases} \dfrac{d\lambda}{\Lambda} - \dfrac{d\mu}{M} + \dfrac{d\nu}{N} = 0 \\ \dfrac{\lambda d\lambda}{\Lambda} - \dfrac{\mu d\mu}{M} + \dfrac{\nu d\nu}{N} = 0 \end{cases}$$

wo

$$3) \quad \begin{cases} \Lambda = \sqrt{(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda)(a_3 - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - a_4)(\mu_0 - \lambda)} \\ M = \sqrt{(a_1 - \mu)(a_2 - \mu)(\mu - a_3)(\mu - a_4)(\mu - \lambda_0)(\mu_0 - \mu)} \\ N = \sqrt{(a_1 - \nu)(\nu - a_2)(\nu - a_3)(\nu - a_4)(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)} \end{cases}$$

und $\frac{d\lambda}{\Lambda}$, $\frac{d\mu}{M}$, $\frac{d\nu}{N}$ sämmtlich dasselbe Vorzeichen besitzen.

„Die Gleichungen 2) sind aber nichts anderes als das Abel'sch „Theorem für die überall endlichen Integrale vom Geschlecht $p = 2$."

Die Fortschreitungsrichtung von einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ z einem Nachbarpunkte $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ giebt also die Richtun einer gemeinsamen Tangente T an die Flächen λ_0 und μ_0, wenn di Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ den Gleichungen 2) genügen mit einer de 4 verschiedenen Combinationen in den Vorzeichen der Verhältniss der Quadratwurzeln Λ, M, N.

In diesem Sinne gehört jedem durch seine Endpunkte $\lambda, \mu,$ und $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ charakterisirten Linienelemente eine solchen Tangente T eine bestimmte Combination in den Vorzeiche der Verhältnisse der Quadratwurzeln Λ, M, N zu. Man kann abe darüber hinaus dem Elemente der Tangente eine bestimmte Comb nation der Vorzeichen der Quadratwurzeln Λ, M, N selbst zuordne wenn man über das Vorzeichen einer der letzteren eine bestimmt Festsetzung macht.

Lässt man den Anfangspunkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Elementes län der betreffenden Tangente T stetig fortlaufen, so werden sich d den successiven Elementen zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, stetig ändern und ihre Vorzeichen beibehalten, so lange keines d Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ sein Vorzeichen wechselt. Es liegen al auf jeder Tangente 6 Punkte, in denen ein derartiger Zeichenwech stattfindet, nämlich die beiden Berührungspunkte der Tangente r den Flächen λ_0 und μ_0 und die 4 Schnittpunkte mit den Ebenen Coordinatentetraeders, auf welches die Gleichung der Flächensch bezogen ist. Diese 6 Punkte sind durch die Werte

$$\lambda = a_4,\ \lambda = \lambda_0;\quad \mu = a_3,\ \mu = \mu_0;\quad \nu = a_2,\ \nu = a_1$$

je einer der elliptischen Coordinaten charakterisirt, und es bilden Wertepaare

$$a_4 \lambda_0;\quad a_3 \mu_0;\quad a_2 a_1$$

nach den Ungleichungen 1) zugleich die Grenzen, innerhalb deren elliptischen Coordinaten λ, μ, ν eines Punktes einer reellen Tange der beiden Flächen λ_0 und μ_0 sich bewegen.

„Wenn also der Anfangspunkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Elementes ds „der Tangente T die ganze im Unendlichen geschlossen gedachte Tan„gente durchläuft, so wechselt jede der zugehörigen Wurzelfunctionen „Λ, M, N zweimal das Vorzeichen.“

Nun nimmt auch jede der Variabeln λ, μ, ν längs der Tangente jeden der ihr durch die Ungleichungen 1) zugewiesenen Wert je zweimal an; es unterscheiden sich aber zwei Stellen, in denen die Variabele den nämlichen Wert hat, durch das Vorzeichen der zugehörigen Quadratwurzel resp. Λ, M oder N. Jeder Punkt liegt nun auf 4 solchen Tangenten, die durch ihn hindurch gehen, es gehören ihm also 4 durch ihre Vorzeichen allein verschiedene Systeme Λ, M, N zu; einer der Wurzelfunctionen (Herr Staude wählt N dazu) können wir ein bestimmtes für alle 4 Tangenten gleiches Vorzeichen zuerteilen; dann haben die 4 zu einem Punkt gehörigen Tripel Λ, M, N die Vorzeichen:

$$++\varepsilon;\quad -+\varepsilon;\quad +-\varepsilon;\quad --\varepsilon.$$

Bei Herrn Staude ist $\varepsilon = +$ oder $= -$, je nachdem $x_1 . x_2$ positiv oder negativ ausfällt.

§ 2. *Die Congruenz der Doppelberührungskreise zweier confocaler Cykliden.*

Um die Resultate des vorigen Paragraphen auf den Cyklidenraum zu übertragen, wollen wir zunächst bemerken, dass, wie im Raum der Flächenschaar jeder Punkt durch die Parameter λ, μ, ν der 3 durch ihn hindurchlaufenden reellen Flächen 2ter Ordnung der Schaar bestimmt wird, im Cyklidenraum jedes Punktpaar, das conjugirt ist in Bezug auf $s_0 = 0$ (d. h. nur im Vorzeichen der Coordinate s_0 verschieden ist[21]) bestimmt ist durch die 3 Parameter λ, μ, ν der durch dasselbe hindurchlaufenden 3 Cykliden mit reellen Punkten, und zwar bestimmt auch hier ein Werttripel $\lambda\mu\nu$ 8 solche Punktpaare.

Offenbar stellen die Gleichungen 2) jetzt die Differentialgleichungen der jede von 2 Flächen des Systems doppelt berührenden Kreise dar, und zwar sind diese Flächen eine Cyklide vom Typus 3 (2schalig, Schalen in einander) und eine vom Typus 2 (ringförmig).

Beschränken wir auch jetzt die Variabilität der Parameter durch die Ungleichungen 1), so gehen wieder durch jedes Punktpaar des durch 1) beschränkten Raumes 4 reelle Kreise, die jede der 2 gege-

---

21) Ein solches Punktpaar liegt natürlich harmonisch zu den Schnittpunkten seiner Verbindungslinie mit der Fundamentalkugel $s_0 = 0$.

benen Flächen λ_0 und μ_0 in zwei in Bezug auf $s_0 = 0$ conjugirten Punkten berühren.

Genügen also die Differentiale

$$d\lambda, \quad d\mu, \quad d\nu$$

den Gleichungen 2), so geben uns die Fortschreitungsrichtungen von einem Punktpaare $(PP') = (\lambda, \mu, \nu)$ zu einem Nachbarpunktpaare $(\lambda + d\lambda, \mu + d\mu, \nu + d\nu)$ die Richtungen der gemeinsamen Doppelberührungskreise an die Flächen λ_0 und μ_0 in dem in Betracht gezogenen Punktpaare; die 4 Richtungen, die von je einem Punkte des Paares auslaufen, sind untereinander unterschieden durch die Vorzeichen der Verhältnisse der Wurzelfunctionen Λ, M, N. Jeder der 4 Richtungen, die von dem betrachteten Punktpaare (PP') auslaufen, gehört eine bestimmte Combination der Vorzeichen zu. Giebt man wiederum N ein festes Vorzeichen ε ($\varepsilon = +$ oder $= -$, jenachdem $s_1 . s_2$ positiv oder negativ ist), so sind die 4 Richtungen der durch das Punktpaar (PP') hindurchlaufenden Kreise der betrachteten Congruenz individualisirt durch die Vorzeichencombinationen

$$+ + \varepsilon; \quad - + \varepsilon; \quad + - \varepsilon; \quad - - \varepsilon.$$

Das erste Vorzeichen in jedem Tripel bezieht sich auf Λ, das zweite auf M.

Betrachten wir jetzt einen einzelnen der 4 Kreise, die durch das Punktepaar $(PP') = (\lambda, \mu, \nu)$ gehen.

Wir lassen wiederum das Punktpaar (PP') längs des ganzen Doppelberührungskreises stetig fortlaufen; es werden sich dann die den successiven Elementen zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, N stetig ändern und ihre Vorzeichen nur wechseln mit resp. $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ zusammen. Ein Zeichenwechsel dieser Grössen findet aber auf besagtem Kreise allein in 6 Punktepaaren statt, (jedes Punktepaar ist conjugirt in Bezug auf die Fundamentalkugel $s_0 = 0$).

Diese 6 Punktepaare sind charakterisirt durch die Werte je einer der cyklidischen Coordinaten

$$\lambda = a_4, \lambda = \lambda_0; \quad \mu = a_3, \mu = \mu_0; \quad \nu = a_2, \nu = a_1,$$

wo wiederum die Wertepaare

$$a_4, \lambda_0; \quad a_3, \mu_0; \quad a_2, a_1$$

die Grenzen bilden, innerhalb deren die cyklidischen Coordinaten resp. λ, μ, ν eines Punktepaares eines reellen Doppelberührungskreises der beiden Flächen λ_0 und μ_0 sich bewegen.

Wir haben demnach den Satz:

„Wenn ein Punktpaar $(PP') = (\lambda, \mu, \nu)$, das conjugirt ist in „Bezug auf $s_0 = 0$, einen Doppelberührungskreis dergestalt durchläuft, „dass jeder Punkt des Paares einen Halbkreis[22]) beschreibt, indem „P bis P', P' in derselben Richtung bis P geht, so wechselt jede der „zugehörigen Wurzelfunctionen A, M, N auf jedem Halbkreis zwei-„mal das Vorzeichen."

Wir brauchen darum immer nur den einen Halbkreis in Betracht zu ziehen; auf dem andern haben wir nur eine genaue Wiederholung dessen, was auf dem ersteren geschieht; jeder Punkt des ersten Halbkreises hat seinen Gegenpunkt auf dem 2ten Halbkreis, den 4ten harmonischen zu dem gegebenen und den beiden Schnittpunkten des Kreises mit der Fundamentalkugel. Da nun diese Schnittpunkte in dem vorgeführten Falle (cf. Cap. II. § 1. p. 205) conjugirt imaginär ausfallen, so ist auch die Art und Weise der Aufeinanderfolge der einzelnen Punkte auf beiden Halbkreisen genau dieselbe.

Die 4 Doppelberührungskreise, die durch das Punktepaar (PP') oder $(\lambda\mu\nu)$ hindurchlaufen, lassen sich zu 3mal 2 Paaren gruppiren.

Nun gehen aber durch das Punktepaar λ, μ, ν auch 3 Kreise, die **Normalkreise** K_λ, K_μ, K_ν, welche Doppelberührungskreise an 2 der Flächen λ, μ, ν sind, während sie auf der 3ten noch übrigen senkrecht stehen, K_λ z. B. berührt die Flächen μ und ν je 2fach und steht ausser auf $s_0 = 0$ auch auf der Cyklide λ senkrecht im Punktepaare λ, μ, ν.

Im Anschluss an die Resultate, die Herr Staude p. 7. seiner Habilitationsschrift erhält, finden wir sodann, dass zu jedem der 3 Normalkreise eine Gruppirung der 4 durch das Punktpaar gehenden Doppelberührungskreise zu je 2 Paaren gehört. Jedes Paar bildet mit dem Normalkreis eine Normalkugel, sodass zu jedem Normalkreis 2 Normalkugeln gehören, und wir im Ganzen 6 Normalkugeln bekommen, die sich zu 3 Paaren ordnen. In Bezug hierauf gilt nun der Satz:

„Die 4 Doppelberührungskreise an die Flächen λ_0 und μ_0 durch „das Punktpaar (PP') oder $(\lambda\mu\nu)$ ordnen sich in Bezug auf jeden der „3 Normalkreise des Punktpaars in 2 Paare und zwar dergestalt, „dass bei jeder der 3 Anordnungen der bevorzugte Normalkreis den „Winkel eines jeden Paares auf der zugehörigen Normalkugel halbirt."

---

22) Die Bezeichnung „Halbkreis" bezieht sich auf die eingeführte anallagmatische Massbestimmung.

Zwei in Bezug auf einen der Normalkreise K_λ, K_μ, K_ν con
Doppelberührungskreise unterscheiden sich bezüglich im Vor
von Λ, oder von M, oder von Λ und M zugleich, da wir da
zeichen von N festgesetzt haben.

Bezeichnen wir die zum Punktepaar (PP') gehörigen 4 I
berührungskreise durch die zugehörigen charakteristischen Vorz
combinationen von Λ, M, N, (cf. p. 212.) und nennen die 3 N
kugelpaare $S_{\lambda+} S_{\lambda-}$, $S_{\mu+} S_{\mu-}$, $S_{\nu+} S_{\nu-}$, so erhalten wir die T

conjugirt in Bezug auf K_λ $\left\{\begin{matrix} ++\varepsilon \\ -+\varepsilon \end{matrix}\right\}$ bilden $S_{\lambda+}$ $\left.\begin{matrix} +-\varepsilon \\ --\varepsilon \end{matrix}\right\}$ bilden

conjugirt in Bezug auf K_μ $\left\{\begin{matrix} ++\varepsilon \\ +-\varepsilon \end{matrix}\right\}$ bilden $S_{\mu+}$ $\left.\begin{matrix} -+\varepsilon \\ --\varepsilon \end{matrix}\right\}$ bilden

conjugirt in Bezug auf K_ν $\left\{\begin{matrix} ++\varepsilon \\ --\varepsilon \end{matrix}\right\}$ bilden $S_{\nu+}$ $\left.\begin{matrix} +-\varepsilon \\ -+\varepsilon \end{matrix}\right\}$ bilden

§ 3. *Das Additionstheorem und seine geometrische Bedeutu*

Die Differentialgleichungen der Congruenz der Doppelberü
kreise (cf. p. 209.) sind in der gemeinsamen Form enthalten :

$$4)\qquad \frac{\nu^{k-1}d\nu}{N} - \frac{\mu^{k-1}d\mu}{M} + \frac{\lambda^{k-1}d\lambda}{\Lambda} = 0 \qquad k = 1, 2$$

Diese Differentialgleichungen wollen wir längs eines I
berührungskreises vom Punktpaar (PP') oder $(\lambda\mu\nu)$ bis z
Punktepaar (P_0P_0'), in welchem die Fläche λ_0 berührt wird, int
Das Resultat der Integration

$$5)\qquad 2\int_{\nu N}^{\nu' N'} \frac{\nu^{k-1}d\nu}{N} - 2\int_{\mu M}^{\mu' M'} \frac{\mu^{k-1}d\mu}{M} + 2\int_{\lambda\Lambda}^{\lambda_0, 0} \frac{\lambda^{k-1}d\lambda}{\Lambda} = 0 \quad k = 1,$$

giebt 2 Relationen zwischen den cyklidischen Coordinaten ν, μ
$\nu'\mu'$ der Punktepaare (PP') und (P_0P_0'). Die Integration
alle 3 Integrale in der Weise auszuführen, dass für jedes Pu
des betreffenden Kreises die demselben als einem Punktepaar
Tangentialkreises zugehörigen Wurzelfunctionen $NM\Lambda$ einschl
ihrer Vorzeichen in Rechnung gezogen werden.

Zweien der Anfangselementenpaare der 4 gemeinsamen I
berührungskreise kommt ein positives, zweien ein negatives Vor
von Λ zu. Längs $\widehat{PP_0}$, resp. $\widehat{P'P_0'}$ wechselt das Vorzeichen
nicht; ob die Vorzeichen von N' und N und die von M' und
einander übereinstimmen oder nicht, das hängt davon ab,

Bogen $\widehat{PP_0}$ — und natürlich auch $\widehat{P'P_0'}$ — die Ebenen $\nu = a_2$, $\nu = a_1$ und $\mu = a_3$ durchsetzt, resp. die Fläche $\mu = \mu_0$ berührt.

Löst man die gefundenen Relationen 5) zwischen $\lambda\mu\nu$ und $\mu'\nu'$ in der folgenden Weise auf:

$$6)\quad 2\int\limits_{a_2}^{\nu'N'}\frac{\nu^{k-1}\,d\nu}{N} - 2\int\limits_{a_3}^{\mu'M'}\frac{\mu^{k-1}d\mu}{M} - 2\int\limits_{a_2}^{\nu N}\frac{\nu^{k-1}\,d\nu}{N} + 2\int\limits_{a_3}^{\mu M}\frac{\mu^{k-1}\,d\mu}{M} - 2\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda}\frac{\lambda^{k-1}\,d\lambda}{\Lambda} = 0 \quad k = 1, 2$$

so erhält man das Resultat:

„Zwischen den cyklidischen Coordinaten $\nu'\mu'$ des Berührungs-„punktpaars (P_0P_0') einer der vier vom Punktpaar (PP') an die „beiden Flächen λ_0 und μ_0 laufenden gemeinsamen Doppelberührungs-„kreise mit der Fläche λ_0 einerseits und den cyklidischen Coordinaten „λ, μ, ν des Punktepaares (PP') andererseits bestehen die Relationen:

$$7)\quad \begin{cases} 2\int\limits_{a_2}^{\nu, N}\frac{d\nu}{N} - 2\int\limits_{a_3}^{\mu, M}\frac{d\mu}{M} + 2\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda}\frac{d\lambda}{\Lambda} = 2\int\limits_{a_2}^{\nu', N'}\frac{d\nu}{N} - 2\int\limits_{a_3}^{\mu', M'}\frac{d\mu}{M} \\ 2\int\limits_{a_2}^{\nu, N}\frac{\nu d\nu}{N} - 2\int\limits_{a_3}^{\mu, M}\frac{\mu d\nu}{M} + 2\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda}\frac{\lambda d\lambda}{\Lambda} = 2\int\limits_{a_2}^{\nu', N'}\frac{\nu d\nu}{N} - 2\int\limits_{a_3}^{\mu', M'}\frac{\mu d\nu}{M} \end{cases}$$

„wo N, M, Λ die dem Punktepaare (PP') und $N'M'$ die dem „Punktepaare (P_0P_0') als Punkten des betrachteten Kreises zugehörigen „zusammengesetzten Wurzelfunctionen bedeuten."

Dieser Satz enthält die geometrische Deutung des einfachen Additionsproblems, welches verlangt, bei gegebenen oberen Grenzen ν, μ, λ und gegebenen Vorzeichen von N, M, Λ die oberen Grenzen ν', μ' und die Vorzeichen von N', M' so zu bestimmen, dass von Periodenmultipla abgesehen die beiden Relationen 7) bestehen.

Die geometrische Lösung des Problems ist demnach die folgende:

Man fixirt auf der Fläche λ eines der Punktepaare $\nu\mu$, für welches die zugehörige Wurzelfunction N das gegebene Vorzeichen besitzt, und wählt unter den 4 durch dieses Punktpaar (PP') gehenden

gemeinsamen Tangentialkreisen der Flächen λ_0 und μ_0 denjenigen aus, dem im Punktepaar (PP') die gegebenen Vorzeichen von M und $\varDelta$ zukommen. Die cyklidischen Coordinaten des Berührungspunktpaars $(\nu'\mu')$ mit der Fläche λ_0 sind die gesuchten oberen Grenzen und die dem Punktpaare als einem Punktpaare des in Rede stehenden Kreises zukommenden zusammengesetzten Wurzelfunctionen N' und M' sind die gesuchten Wurzelwerte N' und M'.

§ 4. *Schliessungssätze innerhalb der Congruenz der gemeinsamen Doppelberührungskreise zweier confocaler Flächen.*

Kreispolygone, welche den Flächen λ_0 und μ_0 umschrieben und einer Fläche λ gleichzeitig einbeschrieben sind.

Neben den Flächen λ_0 und μ_0 sei eine dritte Fläche $\lambda < \lambda_0$ gegeben, welche also von λ_0 umschlossen wird. Es sollen Kreispolygone betrachtet werden, welche den beiden Flächen λ_0 und μ_0 umschrieben und der Fläche λ einbeschrieben sind.

Den ersten Eckpunkt $P^{(0)}$ und mit ihm seinen Gegenpunkt $P^{(0)'}$ kann man auf λ beliebig wählen. Von den 4 durch sie hindurchgehenden Doppelberührungskreisen wählt man einen als Anfangsseite $S^{(1)}$ des Polygons; zugleich geht von $P^{(0)'}$ aus, auf demselben Kreise liegend, die Seite $S^{(1)'}$ aus und bildet mit den folgenden Kreisstücken ein 2tes Polygon. $S^{(1)}$ schneidet, nachdem die Fläche λ_0 berührt worden ist, die Fläche zum 2ten Male; der Schnittpunkt ist der zweite Eckpunkt $P^{(1)}$ des Polygons. Ebenso erhalten wir als Endpunkt von $S^{(1)}$ einen 2ten Eckpunkt $P^{(1)'}$ des conjugirten Polygons. Das 2te Seitenpaar $(S^{(2)} S^{(2)'})$ wählen wir unter den 3 gemeinsamen Kreisen, die neben $(S^{(1)} S^{(1)'})$ noch durch $(P^{(1)} P^{(1)'})$ hindurchgehen, so aus, dass $S^{(2)}$ conjugirt zu $S^{(1)}$, $S^{(2)'}$ conjugirt zu $S^{(1)'}$ in Bezug auf λ ist (cf. p. 213.).

Bei dieser Festsetzung, die auch für die folgenden Polygonseiten Geltung behalten soll, ist die Construction des Polygons eindeutig bestimmt, nachdem Anfangspunkt und Anfangsseite gegeben sind. Die beiden entstehenden Polygone — wir erhalten ja ein conjugirtes Polygon, dessen Seiten und Ecken durch Accente markirt sind — sind durch die Kugel $s_4 = 0$ von einander getrennt. Wir verfolgen ja immer die Richtung auf den Kreisen von λ bis λ_0, durchsetzen aber nie die Fläche $\lambda = a_4$. Es kann also keine Vereinigung der beiden Polygone zu einem stattfinden.

Es handelt sich nun gegenwärtig um die Frage, ob die bei der Polygonconstruction gegebenen Elemente, nämlich die Parameter λ_0, μ_0, λ der vorgelegten Flächen, sowie Anfangspunkt und Anfangs-

seite der Polygonconstruction so gewählt werden können, dass die Construction mit l Seiten sich schliesst, d. h. die Seite $S^{(l)}$ wieder in die Anfangsecke $P^{(0)}$ so einläuft, dass $S^{(l)}$ und $S^{(1)}$ conjugirt in Bezug auf λ sind.

Aus den Relationen 7) folgt durch wiederholte Anwendung offenbar die Bedingung:

$$8)\quad \begin{aligned} 2l\int_{\lambda, \Lambda}^{\lambda_0}\frac{d\lambda}{\Lambda} - 4m\int_{a_3}^{\mu_0}\frac{d\mu}{M} + 4n\int_{a_2}^{a_1}\frac{d\nu}{N} &= 0 \\ 2l\int_{\lambda, \Lambda}^{\lambda_0}\frac{\lambda d\lambda}{\Lambda} - 4m\int_{a_3}^{\mu_0}\frac{\mu d\mu}{M} + 4n\int_{a_2}^{a_1}\frac{\nu d\nu}{N} &= 0 \end{aligned}$$

Denn die Variabeln μ und ν bewegen sich längs des Polygonumfangs stetig oscillirend zwischen den beiden Grenzen a_3 und μ_0, resp. a_2 und a_1 hin und her, und die Vorzeichen von M und N wechseln immer nur in diesen Grenzen. Demnach bezeichnet $2n$ die Anzahl der Durchgangspunkte durch jede der Ebenen $\nu = a_2$ und $\nu = a_1$, und $2m$ die Anzahl der Durchgangspunkte durch die Ebene $\mu = a_3$ und der Berührungspunkte des Polygonumfangs mit der Fläche μ_0.

Die Bedingungen 8) ergeben uns den Satz:

„Wenn ein den Flächen λ_0 und μ_0 umschriebenes und der Fläche „λ einbeschriebenes Polygon sich einmal mit l Seiten schliesst, so „schliesst es sich immer mit derselben Seitenzahl, wie auch der Anfangs-„punkt und die Anfangsseite auf der Cyklide λ gewählt werden mag.“

„Neben diesem einen Polygon erhalten wir alsdann stets noch „ein zweites, das die zweite Schale der Fläche λ_0 berührt und von „dem ersten Polygon durch $\lambda = a_4$ getrennt ist. Schliesst sich das „erste Polygon, so schliesst sich notwendig auch das zweite, zu dem „ersten conjugirte.“

Natürlich werden keineswegs alle Polygone, die wir im Raum der Flächenschaar 2ten Grades betrachten, wenn wir sie auf den Cyklidenraum übertragen, 2 getrennte Polygone liefern; im allgemeinen Falle wird vielmehr ein einziges Polygon mit doppelter Seitenzahl entstehen. Gestatten wir nämlich unseren Polygonseiten im Raum der Flächenschaar 2ten Grades auch die 4te Ebene des Coordinatentetraeders $x_4 = 0$ zu durchsetzen (bei Herrn Staude fällt dieselbe mit der unendlich fernen Ebene zusammen), so durchsetzt unser Kreispolygon im Cyklidenraum die Kugel $s_4 = 0$, in der Bedingungs-

gleichung 8) tritt noch die Periode $\int_{a_4}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\Lambda}$ auf, und wir werden im Allgemeinen ein einziges Polygon mit doppelter Seitenzahl erhalten.

Leicht könnten wir nun die Zahl der Schliessungssätze beliebig vermehren, indem wir ähnlich wie Herr Staude in seiner Habilitationsschrift die gestellten Bedingungen variiren oder die von Doppeltangentialkreisen der Congruenz umhüllten geodätischen Linien der Flächen λ_0 und μ_0 in Betracht ziehen und geodätische Polygone uns bilden. Wir lassen uns aber an dem einen Beispiele genügen, da eine weitere Ausführung nichts principiell Neues zu Tage fördern würde.

Wir gehen auch nicht auf die Darstellung der Punkte und Kugeln, sowie der Kreise des Cyklidenraumes durch hyperelliptische, speciell Θ Functionen und die Deutung der hauptsächlichen Θ Relationen selbst ein, sondern verweisen auf die vielfach genannte Schrift des Herrn Staude: Geometrische Deutung der Additionstheoreme etc. (22. B. der Annalen). Die dort gefundenen Resultate übertragen sich eben mit so geringen Modificationen auf den Cyklidenraum, dass es sich kaum verlohnen würde, die Untersuchung nochmals vorzuführen. Es mag also dieser Hinweis genügen, und wir gehen zum 2ten Teil über, die Cyklide in Beziehung zu setzen zur Kummer'schen Fläche

Inhaltsübersicht.

IX.

Miscellen.

1.

Zur Theorie des Winkelspiegels.

Durch das Studium der grösseren Abhandlung über den Winkelspiegel, welche mein Vater L. Mack unlängst in dieser Zeitschrift veröffentlicht hat, bin ich dazu gelangt, eine neue Formel zu finden, die unter allen Umständen dazu dient, schnell die Gesamtzahl S der Bilder zu bestimmen, welche ein in die Oeffnung des Winkelspiegels gebrachter leuchtender Punkt P hervorruft. Sie lautet:

$$S = \left[\frac{180^0 + S_1}{2\alpha}\right] + \left[\frac{180^0 + S_2}{2\alpha}\right]$$

2α ist der Oeffnungswinkel des Winkelspiegels, und S_1 und S_2 bedeuten diejenigen zwei Winkel, welche die aus der Axe des Winkelspiegels durch P gelegte Ebene mit den zwei Einzelspiegeln bildet. Jede der rechts vorkommenden Klammern soll bedeuten, dass für den von ihr eingeschlossenen Quotienten, mag er nun eine ganze Zahl oder ein Bruch sein, statt seines wahren Werts vielmehr die zunächst unter diesem liegende ganze Zahl zu nehmen sei. Von zwei etwa zusammenfallenden Bildern ist in dem Ausdruck für S jedes selbständig gezählt.

Sofern die Leser des Archivs an jene grössere Abhandlung sich erinnern oder nur die vier ersten §§ derselben nachlesen wollen, so ist mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungsweise die Herleitung der neuen Formel kurz anzugeben wie folgt.

Man betrachte zunächst diejenige Bilderreihe, die von dem Bilde P_1' ausgeht, und nur diejenigen weitern P_2'', P_3', P_4'', P_5'.... enthält, deren jedes von dem ihm nächst vorangehenden erzeugt wird. Für diese Bilder ist nun gemäss dem Hauptsatz des § 3. folgende Reihe von Winkelangaben zu machen:

$$\begin{aligned} &\text{Wkl. } AOP_1' = \varphi_1 \\ &\text{Wkl. } BOP_2'' = 2\alpha + \varphi_1 \\ &\text{Wkl. } AOP_3' = 4\alpha + \varphi_1 \\ &\text{Wkl. } BOP_4'' = 6\alpha + \varphi_1 \\ &\quad\vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

Führt man jetzt vielmehr diejenigen Winkel ein, welche die Linien OP_1', OP_2'', OP_3', OP_4''.... mit der Mediane OM bilden, so erhält man statt obiger Reihe die neue:

$$\text{I)} \quad \begin{cases} \text{Wkl. } MOP_1' = \alpha + \varphi_1 \\ \text{Wkl. } MOP_2'' = 3\alpha + \varphi_1 \\ \text{Wkl. } MOP_3' = 5\alpha + \varphi_1 \\ \text{Wkl. } MOP_4'' = 7\alpha + \varphi_1 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \end{cases}$$

Man bemerkt, dass jeder dieser Winkel um 2α grösser ist, als der ihm nächst vorangehende. Werden zugleich die den toten Raum betreffenden Angaben des § 4. berücksichtigt, so ist auch auf diesem Wege leicht zu beweisen, dass die Zahl der unter I) vorkommenden Bilder eine begrenzte ist.

Nun nehme man zu jedem der Bildpunkte P_1', P_3', P_5' P_7'...., welche alle hinter dem ersten Spiegel frei liegen, den bezüglich der Geraden MO mit ihm symmetrischen Punkt. Diese Hilfspunkte der Reihe nach mit Π_1', Π_3', Π_5', Π_7'.... bezeichnet, so hat man vermöge I) auch folgende Reihe:

$$\text{II)} \quad \begin{cases} \text{Wkl. } MO\Pi_1' = \alpha + \varphi_1 \\ \text{Wkl. } MOP_2'' = 3\alpha + \varphi_1 \\ \text{Wkl. } MO\Pi_3' = 5\alpha + \varphi_1 \\ \text{Wkl. } MOP_4'' = 7\alpha + \varphi_1 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \end{cases}$$

Diese Reihe bietet den Vorteil, dass die in ihr aufgeführten Winkel alle nach einerlei Richtung von OM aus gerechnet sind.

Wird jetzt mit s_1 die Zahl der Bilder P_1', P_2'', P_3', P_4''.... bezeichnet, so ist dieselbe identisch mit der Zahl der Punkte P, Π, welche in der Reihe II) vorkommen. Man sieht ferner leicht (vergl. § 4. der grössern Abhandlung), dass kein Winkel dieser Reihe die Grösse des überflachen $MO\mathfrak{B}$ erreichen kann. Hienach ist bezüglich der Zahl s_1 zu schliessen: sie muss die grösste ganze Zahl sein, die der Ungleichung genügt

$$180^0 + \alpha > (2s_1 - 1)\alpha + \varphi_1$$

welche mit Beiziehung von φ_2 für $2\alpha - \varphi_1$ übergeht in

$$s_1 < \frac{180^0 + \varphi_2}{2\alpha}.$$

Sollte der Fall eintreten, dass ein letzter Punkt P_x'' der Reihe II) gerade noch in den Punkt 𝔅 fiele, so dürfte er nach § 4. als Bild nicht mehr gezählt werden und x wäre gegenüber von s_1 um Eins zu gross. Man hätte dann aber für diesen Punkt P_x''

$$180^0 + \alpha = (2x - 1)\alpha + \varphi_1 \text{ und } x = \frac{180^0 + \varphi_2}{2\alpha}.$$

In diesem Fall ergäbe sich der Quotient $(180^0 + \varphi_2) : 2\alpha$ als ganze Zahl, wie man auch durch geometrische Betrachtung leicht findet.

Demgemäss können wir schreiben

$$s_1 = \left[\frac{180^0 + \varphi_2}{2\alpha}\right]$$

in dem Sinne gemeint, dass für den eingeklammerten Quotienten, mag er ein Bruch oder eine ganze Zahl sein, die zunächst **unter** ihm befindliche ganze Zahl genommen werde.

Es ist nun leicht zu übersehen, dass für die bisher aus dem Spiel gelassenen Bilder P_1'', P_2', P_3'', P_4'...., welche alle von P_1'' abstammen, die den obigen Betrachtungen ganz analogen zutreffen, so dass demnach ihre Anzahl s_2 anzugeben ist durch die Gleichung

$$s_2 = \left[\frac{180^0 + \varphi_1}{2\alpha}\right]$$

wobei die Klammer rechts in demselben Sinne zu verstehen ist, wie oben.

Da die Gesamtzahl S der Bilder aus der Summe der von P_1' und der von P_1'' abstammenden besteht, so sind wir hiemit zu derjenigen Formel gelangt, welche am Anfang dieser Mitteilung angegeben ist.

Fallen zwei Bilder zusammen, was nur eintritt, wenn $360 : 2\alpha$ eine ganze gerade Zahl ist (vergl. § 13. der grössern Abh.), so sind dieselben, als die Schlussbilder der zwei von uns betrachteten Reihen, in dem Ausdruck für S nicht als Eines, sondern als zwei Bilder in Rechnung gezogen.

Stuttgart. Dr. **Karl Mack**.

2.

Beweis, dass auf einer algebraischen Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden ausser dieser nicht mehr als 16 Geraden liegen können.

Clebsch hat gezeigt[1]), dass jede algebraische Fläche 4. O. mit einer Doppelgeraden ausser dieser noch 16 Geraden enthält, welche sämtlich die Doppelgerade schneiden und sich zu 8 Paaren ordnen. Dass diese Geraden die einzigen sind, welche die Fläche enthalten kann, ohne zu zerfallen, wurde von ihm a. a. O. ebenfalls dargetan, jedoch nur in abzählender Weise auf Grund einer ebenen Abbildung der Fläche, sodass ein directer Beweis noch wünschenswert erscheint. Ich teile im Folgenden einen solchen mit; es werde ihm kurz der Nachweis der 8 Geradenpaare nach Clebsch vorausgeschickt, damit ich mich bequem darauf beziehen kann.

Die Gleichung einer Fläche der genannten Art hat die Form

$$1)\qquad A^2u + ABv + B^2w = 0,$$

wo $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ die Gleichungen von 3 Flächen 2. O., $A = 0$, $B = 0$ die Gleichungen von zwei Ebenen sind, welche sich in der Doppelgeraden schneiden. Die Fläche wird also erzeugt als Ort der Schnittcurven aller Flächen der Schaar

$$2)\qquad u + \lambda v + \lambda^2 w = 0$$

mit den entsprechenden Ebenen des Büschels

$$3)\qquad B - \lambda A = 0.$$

Unter den Ebenen dieses Büschels befinden sich auch solche, welche die ihnen entsprechenden Flächen der Schaar 2) berühren d. h. in einem Geradenpaare schneiden. Die Zahl dieser Ebenen ist also die Zahl der Geradenpaare auf der Fläche; stellt man aber die betreffende Bedingungsgleichung für den Parameter λ in der bekannten Determinantenform auf, so findet man dieselbe vom Grade 8, wie behauptet.

Gesetzt nun, es gäbe ausser diesen 8 Geradenpaaren noch eine weitere Gerade s auf der Fläche. Dann ist zunächst aus der soeben zur Ermittelung der 8 Geradenpaare angestellten Ueberlegung klar, dass dieselbe die Doppelgerade nicht schneiden kann. Darans ergiebt sich weiterhin, dass s notwendig wenigstens je eine Gerade aus den

---

[1]) Clebsch, Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der 4. und 5. Ordnung. Math. Annalen Bd. 1.

8 Geradenpaaren schneiden muss. Denn sind a und α zwei Geraden eines Paares, l die Doppelgerade, und man legt durch l diejenige Ebene, welche a und α enthält, so hat diese Ebene mit der Fläche ausser l, a und α keine weiteren Elemente mehr gemein; sie schneidet aber s in einem Punkte, welcher nicht auf l liegt, folglich auf a oder α, oder im Schnittpunkt beider liegen muss.

Nun seien a, b, c, d, e 5 Geraden aus den 8 Paaren, welche von von s geschnitten werden. Dann kann man durch a, b, c einerseits und durch c, d, e andererseits je eine Regelfläche 2. O. legen. Dieselben haben dann c, l und s gemein, schneiden sich also nur noch in einer Geraden f, welche l und s schneidet, c aber nicht, oder sie sind identisch. Letzteres würde nach sich ziehen, dass die 5 Geraden a, b, c, d, e von den unendlich vielen Geraden geschnitten werden, welche die andere Regelschaar der durch a, b, c, d, e gehenden Regelfläche bilden. Von diesen schneidet aber jede die Fläche 4. O. in 5 Punkten, gehört derselben also gänzlich an, die Fläche 4. O. würde also in dieser Regelfläche 2. O. und noch eine andere zerfallen.

Es bleibt daher nur der erstere Fall, dass sich die beiden Regelflächen in einer Geraden f schneiden, welche c nicht, wohl aber und s trifft. Nun schneiden diese Regelflächen die Fläche 4. O. schon in 6 Geraden, nämlich in a, b, c, s und der doppelt gezählten l, resp. in c, d, e, s und l doppelt gezählt, haben also mit ihr nur noch je einen Kegelschnitt gemein; es müssten sich also diese beiden Kegelschnitte in denselben 4 Punkten schneiden, in welchen die Gerade die Fläche 4. O. trifft, was nicht möglich ist — oder auch f gehört der Fläche an, ist also eine Gerade aus einem der noch übrigen Geradenpaare, und die beiden Kegelschnitte zerfallen in f und je eine weitere Gerade p oder q, welche beide l und s nicht schneiden, von denen aber etwa p die Geraden a, b, c, f, und q die Geraden d, e, c, f trifft. Es schneidet aber, wie oben bewiesen, jede dieser beiden Geraden p und q ebenso wie s im Ganzen wenigstens 8 Geraden aus den 8 Geradenpaaren, also z. B. p ausser a, b, c, f auch noch $\delta, \varepsilon, g, h$. Die durch l, s und p gelegte Regelfläche 2. O. hat folglich mit der Fläche 4. O. im Ganzen s, p, a, b, c, δ, ε, g, h und die doppelt zählende Gerade l gemein d. h. sie ist ein Teil der Fläche 4. O., und diese zerfällt also auch in diesem nur noch übrigen Fall in 2 Regelflächen 2. O.

Oberehnheim im Els. Januar 1885. Alfred Leman.

X.

Die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionen.

Von

Paul Richard Domsch.

II. Teil.

Kummer'sche Flächen und Cykliden.

I. Capitel.

Die Kummer'sche Fläche und die Lie'sche Berührungstransformation.

§ 1. *Die Fundamentalgebilde in der Geometrie der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung.*

Indem wir die schon citirte Arbeit des Herrn Lie im 5 ten Band der Annalen: „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe" und die darin gegebene Berührungstransformation im wesentlichen als bekannt voraussetzen, bemerken wir zunächst, dass durch letztere 2 Räume in dreierlei Auffassung in Beziehung gesetzt werden.

Entweder man lässt Flächenelementen des einen Raumes Flächenelemente im andern entsprechen, wie es der Begriff der Berührungstransformation mit sich bringt, und zwar den Flächenelementen im ersten Raum r, die 2 consecutive Punkte einer Geraden enthalten, die Elemente der entsprechenden Bildkugel; es ist dies die vollkommenste, aber auch schwierigste Art und Weise, die beiden Räume r und R mit ihren Gebilden in einander zu transformiren, schwierig darum, weil bei derselben die beiden Räume als Aggregate von Flächenelementen aufgefasst werden müssen.

Unsere Lie'sche Berührungstransformation führt aber auch zweitens die dreifach unendlich vielen Punkte des einen Raumes r über in den Complex der Minimalgeraden in R, und drittens die Punkte des Raumes E in die Geraden von r, die einem ausgezeichneten linearen Complexe angehören [1]).

Diese beiden letzten Arten der Uebertragung werden wir der leichteren Behandlung wegen im Folgenden vorzugsweise zur Anwendung bringen, und zwar wechselsweise, indem wir einerseits von den Punkten des Raumes der Kummer'schen Fläche ausgehen, aber auch die Geraden des linearen Complexes in Betracht ziehen und diese in die Punkte des Cyklidenraumes transformiren.

Als Fundamentalgebilde [2]) treten in dem Raume r, welcher in den Cyklidenraum R abgebildet werden soll, zunächst die

6 Fundamentalcomplexe auf

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 0$$

Einen dieser 6 Fundamentalcomplexe, $x_6 = 0$ etwa, werden wir vor den übrigen auszeichnen, indem wir ihn zu demjenigen linearen Complex wählen, dessen Gerade sich in die Punkte, oder präciser ausgedrückt, in die Punktkugeln des andern Raumes abbilden.

Wir markiren demnach als erstes Ergebniss:

„Den Geraden des ausgezeichneten Fundamentalcomplexes ent„sprechen die Punktkugeln des Cyklidenraumes".

Es restiren noch die 5 übrigen Fundamentalcomplexe, welche unter sich und mit dem sechsten in Involution liegen; einem solchen mit dem ausgezeichneten Fundamentalcomplex in Involution liegenden Complex entspricht aber ein Kugelcomplex, ein Kugelgebüsch im Reye'schen Sinne [3]), ∞^3 Kugeln, welche sämmtlich orthognal zu einer durch sie vollständig bestimmten Kugel stehen, deren Centrum ih

---

1) Die Abbildung eines linearen Complexes auf den Punktraum hat vor Herrn Lie schon Herr Nöther gegeben („Zur Theorie der algebraischen Functionen", Göttinger Nachrichten, 1869). Dass jedoch beide Räume einen Complex enthalten, dessen Linien sich als die Punkte des 2ten Raumes abbilden, hat Herr Lie zuerst hervorgehoben.

2) Die Fundamentalgebilde der Kummer'schen Fläche — die 6 Fundamentalcomplexe und deren Combinationen zu je zweien, dreien und vieren — wurden behandelt von Herrn Klein: „Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades", Math, Annalen Bd. 2., p. 198.

3) cf. Reye, „Synthetische Geometrie der Kugeln u. lin. Kugelsysteme" -

Potenzcentrum ist — ein Punkt, welcher in Bezug auf alle Kugeln des Gebüsches dieselbe Potenz besitzt —; das Quadrat des Radius jener Orthogonalkugel ist entgegengesetzt gleich dem Wert der Potenz des Potenzcentrums.

Zwei Gerade eines dieser 5 Complexe, die in Bezug auf $x_6 = 0$ conjugirte Gerade darstellen, transformiren sich in dieselbe Kugel; den Punkten der einen Geraden entspricht die eine imaginäre Erzeugendenschaar der Kugel, den Punkten der conjugirten Geraden die andere imaginäre Erzeugendenschaar. Wir erhalten also den Satz:

„Den Geraden der übrigen 5 Fundamentalcomplexe

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0$$

„entsprechen, zu je zweien als conjugirte Gerade in Bezug auf $x_6 = 0$ „zusammengenommen, die Kugeln von 5 zu einander orthogonalen „Kugelgebüschen. Die Kugeln jedes Gebüsches stehen senkrecht auf „einer durch sie bestimmten Orthogonalkugel. Diese Orthogonal„kugeln stehen infolgedessen selbst auf einander senkrecht und bilden „ein Fundamentalsystem".

Weiterhin treten als Fundamentalgebilde in dem abzubildenden Raume die 15 Congruenzen auf:

1a) $x_1 = 0 \;\; x_6 = 0; \quad x_2 = 0 \;\; x_6 = 0; \quad x_3 = 0 \;\; x_6 = 0;$
$x_4 = 0 \;\; x_6 = 0; \quad x_5 = 0 \;\; x_6 = 0$

1b)
$$\begin{cases} x_1 = 0 \; x_2 = 0; \;\; x_1 = 0 \; x_3 = 0; \;\; x_1 = 0 \; x_4 = 0; \\ \qquad x_1 = 0 \; x_5 = 0 \\ x_2 = 0 \; x_3 = 0; \;\; x_2 = 0 \; x_4 = 0; \;\; x_2 = 0 \; x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \; x_4 = 0; \;\; x_3 = 0 \; x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \; x_5 = 0 \end{cases}$$

Auch diese teilen sich in die Untergruppen 1a) und 1b) von 5 resp. 10 Congruenzen, je nachdem $x_6 = 0$ mit auftritt oder nicht.

Den 5 ersten Congruenzen 1a) entsprechen, da $x_6 = 0$ sich in die Punktkugeln abbildet, 5 Schaaren von ∞^2 Punktkugeln des Cyklidenraumes, die je einem der $x_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots 5)$ entsprechenden Kugelcomplexe angehören. Die Punktkugeln eines Kugelcomplexes liegen aber sämmtlich auf der Orthogonalkugel und bilden dieselbe. Den 5 Congruenzen entsprechen also mit den 5 Punkt-

kugelbündeln 5 zu einander senkrechte Kugeln, welche von den Punktkugeln gebildet werden, also das Fundamentalsystem:

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0.$$

Wir haben demnach den Satz:

„Die 5 Congruenzen, die von dem ausgezeichneten Fundamental-„complexe verbunden mit je einem der übrigen 5 Fundamentalcom-„plexe gebildet werden, entsprechen die 5 Fundamentalkugeln des „Cyklidenraumes, resp. die Punktkugelcongruenzen, welche die 5 „Fundamentalkugeln bilden“.

Den restirenden 10 Congruenzen, die wir unter 1b) aufführten, entsprechen 10 Kugelbündel, die orthogonal sind zu den 10 Kugelbüscheln:

$s_1 = 0\ s_2 = 0,\quad s_1 = 0\ s_3 = 0,\quad s_1 = 0\ s_4 = 0,\quad s_1 = 0\ s_5 = 0;$
$s_2 = 0\ s_3 = 0,\quad s_2 = 0\ s_4 = 0,\quad s_2 = 0\ s_5 = 0;$
$s_3 = 0\ s_4 = 0,\quad s_3 = 0\ s_5 = 0;$
$s_4 = 0\ s_5 = 0.$

Eine jede Kugel eines Bündels muss ja senkrecht stehen auf den Orthogonalkugeln der beiden das Bündel bestimmenden Kugelgebüschen, senkrecht stehen also auch auf den durch die beiden Orthogonalkugeln bestimmten Kugelbüschel. Wir erhalten so den weiteren Satz:

„Den 10 Congruenzen 1b) entsprechen 10 Kugelbündel, deren „Kugeln jeweils senkrecht stehen auf je zweien der 5 Orthogonal„kugeln, also auch orthogonal sind zu den durch dieselben bestimmten „10 Kugelbüscheln“.

Jetzt fassen wir je 3 der 6 Fundamentalcomplexe zusammen und erhalten 20 Tripel von F u n d a m e n t a l c o m p l e x e n. Je ein Tripel liefert eine E r z e u g u n g einer der 10 F u n d a m e n t a l f l ä c h e n 2 t e n G r a d e s. Es gehören also je 2 Tripel zusammen, welche dieselbe Fundamentalfläche liefern:

(123) (456) (124) (356) (125) (346) (134) (256) (135) (246)
(234) (156) (235) (146) (245) (136) (345) (126) (145) (236).

Den 10 jedesmal zu zweit geschriebenen Tripeln, welche $x_6 =$ enthalten, entsprechen notwendigerweise Kugelbüschel, die nur aus Punktkugeln bestehen; sie müssen ausserdem den durch 2 der Fundamentalkugeln definirten 2 Kugelgebüschen angehören. Es sind also die Punktkugeln, welche die 10 Schnittkreise je zweier der 5 Fundamentalkugeln bilden.

Den Tripel

$$x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 0$$

entsprechen z. B. die Punktkugeln, welche den Kreis

$$s_4 = 0 \quad s_5 = 0$$

bilden.

Die andere Erzeugung nun, welche dieselbe Fundamentalfläche 2ter Ordnung liefert und definirt ist durch

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0,$$

diese einfach unendliche Schaar gerader Linien transformirt sich ebenso in eine ∞^1 Schaar von Kugeln, ein Kugelbüschel, gebildet von allen Kugeln, welche zugleich senkrecht stehen auf den Kugeln des Fundamentalsystems

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_3 = 0$$

$s_4 = 0$ und $s_5 = 0$ sind nun 2 Kugeln, die auf den 3 genannten senkrecht stehen; es wird also das durch

$$s_4 = 0 \quad s_5 = 0$$

definirte Kugelbüschel das gesuchte sein. Die 2te Erzeugung unserer herausgegriffenen Fundamentalfläche liefert also in anderer Auffassung allerdings denselben von 2 Fundamentalkugeln gebildeten Kreis wie die erste Erzeugung.

Wir sprechen das erhaltene Resultat folgendermassen aus:

„Den zweifachen Erzeugungsweisen der Fundamentalflächen 2ter „Ordnung entspricht durch die Berührungstransformation eine zwei- „fache Erzeugungsweise der 10 Fundamentalkreise, gebildet durch je „zwei der fünf Fundamentalkugeln. Das einemal werden die Kreise „durch die auf ihnen liegenden Punktkugeln, das anderemal durch „die Kugelbüschel erzeugt, deren Träger sie sind“.

Jetzt bilden wir die 15 möglichen Quadrupel aus den 6 Fundamentalcomplexen, und zwar ordnen wir sie in 2 Gruppen zu 10 und 5, je nachdem sie $x_6 = 0$ enthalten oder nicht:

1a) (1236) (1246) (1256) (1346) (1356)
(1456) (2346) (2356) (2456) (3456)

1b) (1234) (1235) (1245) (1345) (2345).

Je 4 der Fundamentalcomplexe haben 2 Gerade gemein; diese ... die Directricen der Congruenzen, welche jeweils gebildet werden

aus den noch übrigen 2 Fundamentalcomplexen, (1236) liefert also z. B. die Directricen der Congruenz

$$x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad \text{etc.}$$

Die durch die ersten 10 Quadrupel 1a) definirten 20 Geraden gehören nun sämmtlich dem ausgezeichneten Fundamentalcomplex $x_6 = 0$ an; jede der 20 liefert also für sich eine Kugel, und zwar eine Punktkugel, welche jedesmal dreien der durch die Fundamentalkugeln definirten Gebüschen angehört. Als Punktkugel liegt sie demnach auf der jedesmaligen Orthogonalkugel des Gebüsches. Je 2 zusammengehörige Punktkugeln werden also gebildet von den beiden Punkten, welche je dreien der Fundamentalkugeln gemeinsam sind.

Wir bekommen demnach diesen ersten 10 Directricenpaaren entsprechend die 10 Punktkugelpaare:

$$\text{2a)} \quad \begin{array}{lll} s_1=0\ s_2=0\ s_3=0 & s_1=0\ s_2=0\ s_4=0 & s_1=0\ s_2=0\ s_5=0 \\ s_1=0\ s_3=0\ s_4=0 & s_1=0\ s_3=0\ s_5=0 & s_1=0\ s_4=0\ s_5=0 \\ s_2=0\ s_3=0\ s_4=0 & s_2=0\ s_3=0\ s_5=0 & s_2=0\ s_4=0\ s_5=0 \\ & s_3=0\ s_4=0\ s_5=0. & \end{array}$$

Jetzt restiren noch die 5 Directricenpaare 1b).

Jedes dieser Paare bildet 2 in Bezug auf $x_6 = 0$ conjugirte Gerade, ein Directricenpaar bildet sich also auf eine Kugel ab, und wie die 5 Directricenpaare je 4 der Fundamentalcomplexe angehören müssen, so muss die entsprechende Kugel jeweils vieren de entsprechenden Kugelgebüsche angehören.

Vier zu einander orthogonale Kugelgebüsche haben aber nu eine einzige Kugel gemein, es ist dies die eine Kugel, welche ihren 4 Orthogonalkugeln selbst orthogonal ist, also jedesmal d 5 te Orthogonalkugel des Fundamentalsystems.

Den Directricenpaaren 1b) entsprechen so der Reihe nach je Erzeugungsweisen der Fundamentalkugeln:

$$\text{2b)} \quad s_5 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_3 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_1 = 0.$$

Wir kleiden das Resultat in Worte:

„Die 15 vorhandenen Directricenpaare der 15 aus den Fund-
„mentalcomplexen gebildeten Congruenzen teilen sich bei der Trans-
„formation in 2 Gruppen zu 10 und 5. Die der ersten Gruppe a-
„gehörigen, welche Gerade des ausgezeichneten Fundamentalcomplex-

„$x_6 = 0$ sind, bilden sich in die 10 ausgezeichneten Punktkugelpaare „ab, welche je dreien der 5 Fundamentalkugeln gemeinsam sind. Die „5 Directricenpaare der 2ten Gruppe, die jeweils in Bezug auf $x_6 = 0$ „conjugirte Gerade darstellen, bilden sich dagegen in die 5 Funda- „mentalkugeln selbst ab“.

Die 15 Directricenpaare orden sich nun zu den 15 Fundamentaltetraedern zusammen. Die Kanten werden gebildet von 3 Paaren von Directricen, deren Congruenzen stets zusammen sämmtliche 6 Fundamentalcomplexe enthalten. Bezeichnen wir die Directricen durch ihre Congruenzen, so haben wir folgende 15 Fundamentaltetraeder: (Ihnen entsprechen nach dem Vorhergehenden die daneben gesesetzten Zusammenordnungen von Fundamentalkugeln.)

$x_1=0\ x_2=0$	$x_3=0\ x_4=0$	$x_5=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_3=0$	$x_2=0\ x_4=0$	$x_5=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_4=0$	$x_2=0\ x_3=0$	$x_5=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_2=0$	$x_3=0\ x_5=0$	$x_4=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_3=0$	$x_2=0\ x_5=0$	$x_4=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_5=0$	$x_2=0\ x_3=0$	$x_4=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_2=0$	$x_4=0\ x_5=0$	$x_3=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_4=0$	$x_2=0\ x_5=0$	$x_3=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_5=0$	$x_2=0\ x_4=0$	$x_3=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_3=0$	$x_4=0\ x_5=0$	$x_2=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_4=0$	$x_3=0\ x_5=0$	$x_2=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_5=0$	$x_3=0\ x_4=0$	$x_2=0\ x_6=0$
$x_2=0\ x_3=0$	$x_4=0\ x_5=0$	$x_1=0\ x_6=0$
$x_2=0\ x_4=0$	$x_3=0\ x_5=0$	$x_1=0\ x_6=0$
$x_2=0\ x_5=0$	$x_3=0\ x_4=0$	$x_1=0\ x_6=0$

$s_3=0\ s_4=0\ s_5=0$	$s_1=0\ s_2=0\ s_5=0$	$s_5=0$
$s_2=0\ s_4=0\ s_5=0$	$s_1=0\ s_3=0\ s_5=0$	$s_5=0$
$s_2=0\ s_3=0\ s_5=0$	$s_1=0\ s_4=0\ s_5=0$	$s_5=0$
$s_3=0\ s_4=0\ s_5=0$	$s_1=0\ s_2=0\ s_4=0$	$s_4=0$
$s_2=0\ s_4=0\ s_5=0$	$s_1=0\ s_3=0\ s_4=0$	$s_4=0$
$s_2=0\ s_3=0\ s_4=0$	$s_1=0\ s_5=0\ s_4=0$	$s_4=0$

$s_4=0\ s_5=0\ s_3=0$	$s_1=0\ s_2=0\ s_3=0$	$s_3=0$
$s_2=0\ s_5=0\ s_3=0$	$s_1=0\ s_4=0\ s_3=0$	$s_3=0$
$s_2=0\ s_4=0\ s_3=0$	$s_1=0\ s_5=0\ s_3=0$	$s_3=0$
$s_4=0\ s_5=0\ s_2=0$	$s_1=0\ s_3=0\ s_2=0$	$s_2=0$
$s_3=0\ s_5=0\ s_2=0$	$s_1=0\ s_4=0\ s_2=0$	$s_2=0$
$s_3=0\ s_4=0\ s_2=0$	$s_1=0\ s_5=0\ s_2=0$	$s_2=0$
$s_4=0\ s_5=0\ s_1=0$	$s_2=0\ s_3=0\ s_1=0$	$s_1=0$
$s_3=0\ s_5=0\ s_1=0$	$s_2=0\ s_4=0\ s_1=0$	$s_1=0$
$s_3=0\ s_4=0\ s_1=0$	$s_2=0\ s_5=0\ s_1=0$	$s_1=0$

Den Kanten der Fundamentaltetraeder entsprechen so jede 4 Punktkugeln, welche aus einer Fundamentalkugel durch 2 Fundamentalkreise ausgeschnitten werden, zusammen mit der be fenden Fundamentalkugel selbst.

Auf jeder der 5 Fundamentalkugen gibt es 3 Punktkugel entsprechend dem Umstande, dass sich die 4 übrigen Kugeln dr in 2 Paare teilen lassen.

Betrachten wir des Näheren die auf

$$s_5 = 0$$

iegenden Punktkugelpaare

$s_1 = 0\ s_2 = 0\ s_5 = 0;\ s_1 = 0\ s_3 = 0\ s_5 = 0;\ s_1 = 0\ s_4 = 0\ s$
$s_3 = 0\ s_4 = 0\ s_5 = 0;\ s_2 = 0\ s_4 = 0\ s_5 = 0;\ s_2 = 0\ s_3 = 0\ s$

und von diesen wiederum beispielsweise das erste

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_5 = 0$$
$$s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0$$

Jede Punktkugel des Paares $s_1 = 0\ s_2 = 0\ s_5 = 0$ hat mit s zwei Erzeugende gemein, die jeweils in den Tangentialeben diesen Punkten an $s_5 = 0$ verlaufen, den Minimalgeraden $I\ II$ $I'\ II'$. $\left.\begin{matrix} I \text{ u. } I' \\ II \text{ u. } II' \end{matrix}\right\}$ seien Erzeugende derselben Art.

Erzeugende verschiedener Art schneiden sich stets; also m sich, wie I und II, I' und II' auch I und II', II und I' schn in 2 Punkten 3 und 4.

Die beiden Punktkugeln $s_1 = 0\ s_2 = 0\ s_5 = 0$ schneiden aber in dem Kreise $s_3 = 0\ s_4 = 0$, sie sind ja die Punktkugel durch den Kreis bestimmten Kugelbüschels. Also müssen die b

Punkte 3 und 4 auf $s_3 = 0$ $s_4 = 0$ liegen; sie liegen aber auch auf $s_5 = 0$. Es sind demnach die beiden Punkte 3 und 4 die Centren des 2ten zu betrachtenden Punktkugelpaares

$$s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0.$$

Das System

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_5 = 0; \qquad s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0; \qquad s_5 = 0$$

hat also die 4 ein räumliches Vierseit bildenden Minimalgeraden gemein. Dieses räumliche Vierseit ist es infolgedessen, das dem Fundamentaltetraeder entspricht.

Wir gewinnen den Satz:

„Den 15 Fundamentaltetraedern entsprechen durch unsere Ab-„bildung 15 räumliche Vierseite, deren Kanten von Minimalgeraden „gebildet werden, und deren Ecken auf den Fundamentalkugeln „liegen und ausgeschnitten werden von den 10 Fundamentalkreisen. „Auf jeder der 5 Fundamentalkugeln liegen die Ecken von 3 Vier-„seiten entsprechend dem Umstand, dass sich die 4 übrigen Funda-„mentalkugeln auf 3 Weisen in je 2 Paare teilen lassen, wir also „3 Paare von Fundamentalkreisen erhalten. Jedem dieser Paare „entspricht ein Vierseit".

§ 2. *Die Schaar der Kummer'schen Flächen in ihrer Beziehung zum Cyklidensystem.*

Wollten wir in möglichst allgemeiner Weise verfahren, so hätten wir auszugehen von den ∞^2 Liniencomplexen 2ten Grades:

$$1) \qquad \sum_1^5 \frac{x_i^2}{k_i - \mu - \lambda} + \frac{x_6^2}{k_6 - \mu} = 0.$$

Diesen würden dann im Kugelraum ∞^2 Kugelcomplexe 2ten Grades entsprechen, und solche Kugelcomplexe 2ten Grades hätten wir als Verallgemeinerungen der Cykliden zu betrachten, die an sich nur gebildet werden von den Punktkugeln eines solchen Kugelcomplexes 2ten Grades.

Wir beschränken uns aber, indem wir in 1) $\mu = k_6$ setzen, auf die Linien der ∞^1 Congruenzen:

$$2) \qquad \sum_1^5 \frac{x_i^2}{k_i - k_6 - \lambda} = 0 \quad x_6 = 0$$

Dieselben sind die Doppeltangenten ∞^1 Kummer'schen F welche sich längs der 6 ausgezeichneten Haupttangentencurve Ordnung berühren [4]).

Da $x_6 = 0$ unser ausgezeichneter Fundamentalcomplex entsprechen den ∞^1 Liniencongruenzen jeweils die Punktkug ∞^1 Kugelcomplexen 2ten Grades, also die Cyklidenschaar

$$3)\qquad \sum_1^5 \frac{s_i^2}{c_i - \lambda} = 0 \;{}^{5)}$$

wenn $k_i - k_6 = c_i$ gesetzt wird. Die Cyklidenschaar aber bil confocales System, wie schon aus der Form der Gleichung hellt [6]).

Wir haben demnach den Satz:

„Einer ∞^1 Schaar Kummer'scher Flächen, welche Brenn „der ∞^1 Congruenzen

$$\sum_1^5 \frac{x_i^2}{c_i - \lambda} = 0 \quad x_6 = 0$$

„und sich nach einer ausgezeichneten Haupttangentencurve 8t „nung berühren, bilden sich ab als ∞^1 Cykliden

$$\sum_1^5 \frac{s_i^2}{c_i - \lambda} = 0,$$

„die ein confocales System bilden".

Hieran schliessen wir sofort den folgenden Satz (Lie, a p. 193—194.)

„Jene ausgezeichnete Haupttangentencurve transformirt „die „Developpale Focale", welche allen Cykliden des con „Systems sammt dem Kugelkreis umschrieben ist".

2 Congruenzen der Schaar 2), entsprechend 2 bestimmten von λ, haben eine Linienfläche gemein, welche die beiden

---

4) Ein solches System betrachtet H. Lie, a. a. O. p. 255. Die tangentencurven der Kummer'schen Fläche wurden zuerst untersucht Herren Klein und Lie in den Berl. Monatsberichten, 15. December 1 einer Abhandlung, die sich wieder abgedruckt findet in Bd. **23.** de Annalen, p. 579.

5) Siehe p. 20, Darboux, a. a. O., p. 134.

6) Daneben gilt noch $\sum_1^5 s_i^2 = 0$ entsprechend $\sum_1^6 x_i^2 = 0$.

flächen der Congruenzen längs je einer Haupttangentencurve berührt. Diese Linienfläche ist vom 8ten Grade [7]). Dem entsprechend schneiden sich 2 Cykliden des Systems längs einer Curve rechtwinklig (rechtwinklig darum, weil jeder Erzeugende der Linienfläche 2 Paar Berührungspunkte trägt, die zu einander harmonisch liegen), und diese ist Krümmungslinie auf beiden Flächen, im übrigen ebenfalls von der 8ten Ordnung [8]).

Je 3 Congruenzen der Schaar haben 16 $x_6 = 0$ angehörige Gerade gemein, die Doppeltangenten sind für die 3 zugehörigen Brennflächen. Auf jeder der 16 gemeinsamen Doppeltangenten bilden die 6 Berührungspunkte 3 Paare, 2 beliebige dieser 3 Paare sind zu einander harmonisch. Dem entsprechend schneiden sich im Cyklidenraum je 3 confocale Cykliden in 16 Punkten rechtwinklig.

Durch jede Linie des ausgezeichneten linearen Complexes lassen sich 3 Congruenzen der Schaar legen, deren Brennflächen die soeben berührte Eigenschaft besitzen. 5 Congruenzen der Schaar degeneriren in diesen Fällen in die Directricen dieser linearen Congruenzen.

Dem stellen sich für den Cyklidenraum die Sätze zur Seite, dass durch jeden Punkt des Raumes 3 Cykliden der Schaar gehen, und 6 Cykliden, für $\lambda = a_i$, zu Kugeln degeneriren; es sind dies die 5 Fundamentalkugeln.

Zunächst werden wir aber nicht das ganze Flächensystem in's Auge fassen, sondern die einzelne Kummer'sche Fläche in ihrer Beziehung zur einzelnen Cyklide. Wir werden also in 2) resp. 3) dem variabeln Parameter einen festen Wert zu erteilen, etwa $\lambda = \infty$ setzen; dann haben wir die Cyklide

4) $$\sum_1^5 a_i s_i^2 = 0.$$

Jeder Doppeltangente der Kummer'schen Fläche entspricht eine Punktkugel im Cyklidenraum; also entspricht je 2 Punkten der Kummer'schen Fläche, den 2 Berührungspunkten der Doppeltangente nämlich, nur ein Punkt der Cyklide. Ausgenommen allein sind die Punkte der obengedachten ausgezeichneten Haupttangentencurve 8ter Ordnung der Kummer'schen Fläche. Diese ist eine Curve 4punktiger

---

7) Unter dem Grad einer Linienfläche verstehen wir, wie üblich, die Anzahl der Erzeugenden, welche eine beliebig vorgegebene Gerade treffen.

8) Auf das Entsprechen von Linienflächen und Curven gehen wir in § 4., p. 69. ausführlicher ein.

Berührung für die Kummer'sche Fläche, die Doppeltangenten in den Punkten derselben sind vierfache Tangenten, jedem Punkt also der Haupttangentencurve für sich allein entspricht ein Punkt der Cyklide; die Beziehung ist in diesem Falle eine (1, 1) deutige. Die entsprechenden Punkte der Cyklide bilden die singuläre Krümmungslinie, in welcher die Fläche von der benachbarten des Systems geschnitten wird; denn die ausgezeichnete Haupttangentencurve verwandelt sich ja in die developpabele Focale, und diese berührt die Cyklide in jener singulären Krümmungslinie.

Wir geben den erhaltenen Resultaten die Fassung:

„Die Beziehung zwischen Kummer'scher Fläche und Cyklide ist „eine derartige, dass im Allgemeinen je zwei Punkten der ersteren „nur ein Punkt der letzteren entspricht, nämlich den 2 Berührungs- „punkten einer der ∞^2 Doppeltangenten, die $x_6 = 0$ angehören, eine „der ∞^2 Punktkugeln, welche die Cyklide bilden".

„Nur die Punkte der ausgezeichneten Haupttangentencurve 8 ter „Ordnung entsprechen den Punkten der ausgezeichneten singulären „Krümmungslinie ein-eindeutig".

Da den Haupttangenten der Kummer'schen Fläche die Hauptkugeln der Cyklide entsprechen, so finden wir überhaupt den Satz [9]):

„Die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche bilden sich „in die Krümmungslinien der Cyklide ab".

§ 3. *Parameterverteilung auf der Kummer'schen Fläche und deren Uebertragung.*

Jeden Punkt der Kummer'schen Fläche können wir, krummlinige Coordinaten einführend, durch die beiden Haupttangentencurven bestimmen, die durch ihn hindurchlaufen:

$$\lambda_1 = \text{const}; \quad \lambda_2 = \text{const}$$

seien die Gleichungen dieser beiden Haupttangentencurven. Dann ist durch diese Parameterwerte der betreffende Punkt bestimmt, aber nicht eindeutig; die beiden Haupttangentencurven 16ter Ordnung treffen sich ja in 32 Punkten, und diese 32 Punkte hangen sämmtlich von denselben Parameterwerten λ_1 und λ_2 ab. Um die einzelnen Punkte der Gruppe zu individualisiren, nehmen wir als Bestimmungsstücke nicht λ_1 und λ_2, sondern die beiden überall endlichen Normalintegrale vom Geschlecht 2, hingeleitet zu λ_1, resp. λ_2 als obere Grenze

9) cf. p. 63., Lie, a. a. O., p. 177.

und als Irrationalität $\sqrt{\prod_1^6 (a^i - \lambda)}$, wo die a_i die Parameter der 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven 8 ter Ordnung bedeuten.[10])

Betrachten wir eine solche Gruppe von 32 Punkten, so sehen wir, dass aus einem von ihnen 15 weitere hervorgehen durch 15 Collineationen — die 15 involutorischen windschiefen Perspectiven, die sich auf die 15 Directricenpaare, also die 15 Congruenzen $x_i = 0$ $x_k = 0$ stützen.

Die 16 noch übrigen hangen von den 16 schon betrachteten dualistisch ab. Betrachten wir nämlich einen der 16 Punkte, so gehört zu ihm eine Tangentialebene an die Kummer'sche Fläche; in dieser Tangentialebene wird eine Gerade des Tangentenbüschels dem ausgezeichneten Complex $x_6 = 0$ angehören. Diese ist Doppeltangente an die Kummer'sche Fläche und liefert infolgedessen einen 2ten Punkt der Kummer'schen Fläche. So erhalten wir zu den 16 Punkten noch 16 weitere hinzu.

Das Coordinatensystem der Haupttangentencurven transformirt sich nun in das Coordinatensystem der Krümmungslinien. Wie dort ein Punkt durch die hindurchlaufenden Haupttangentencurven definirt war, ist er hier definirt durch die 2 Krümmungscurven

$$\lambda_1 = e_1, \quad \lambda_2 = e_2.$$

Die Haupttangentencurven schneiden sich nun in 32 Punkten, welche auf die oben bezeichnete Weise zusammenhangen; je 2 derselben liefern aber als Berührungspunkte einer Doppeltangente, welche dem Complex $x_6 = 0$ angehört, denselben Punkt der Cyklide.

„Der Gruppe von 32 zusammengehörigen Punkten der Kummer-„schen Fläche entspricht also auf der Cyklide eine Gruppe von nur „16 Punkten, welche auseinander durch Spiegelung an den Fundamental-„kugeln, wie dort durch Spiegelung an den Congruenzen $x_i = 0$ $x_6 = 0$, „$(i = 1, 2 \ldots 5)$ hervorgehen.“

Einem Punkt der Kummer'schen Fläche entspricht eine Minimalgerade, welche die Cyklide in dem Punkt berührt, welcher der Doppeltangente an die Kummer'sche Fläche, $x_6 = 0$ angehörend, entspricht, die im Ausgangspunkt construirt wurde. Der Tangentialebene im Ausgangspunkt an die Kummer'sche Fläche entspricht die 2te in jenem Punkt der Cyklide berührende Minimalgerade; diese letztere Minimalgerade ist aber auch das Bild des 2ten Punkts der Kummer-

---

10) Ausführliches hierüber siehe p. 81.

schen Fläche, der zum Ausgangspunkt dualistisch gehört, ebenso wie die erste Minimalgerade der Tangentialebene in jenem 2ten Punkt der Kummer'schen Fläche entspricht.

Machen wir demnach eine dualistische Umformung im Raum der Kummer'schen Fläche, hinsichtlich des linearen Complexes $x_6 = 0$, durch welche jeder Punkt in die ihm durch den linearen Complex zugeordnete Ebene und jede Ebene in den entsprechenden Punkt verwandelt wird, so vertauschen sich die beiden Untergruppen von je 16 Punkten auf der Kummer'schen Fläche. Eine solche Vertauschung ändert aber das Cyklidensystem in keiner Weise. Die in Rede stehende dualistische Umformung des einen Raumes bringt im anderen keinerlei Aenderung hervor.

§ 4. *Abbildung von Linienflächen, deren Erzeugende dem ausgezeichneten linearen Complex angehören.*

Im Folgenden wird es sich vorzugsweise darum handeln, die Abbildung von Curven der Kummer'schen Fläche auf die Cyklide zu leisten. Wir könnten zu dem Zwecke die Punkte der Curve selbst abbilden — ihnen entsprechen ja im Cyklidenraum Minimalgerade, die die Cyklide in je einem Punkte berühren —; einfacher gestalten sich aber die Verhältnisse, wenn wir in jedem Punkt der Curve auf der Kummer'schen Fläche die zugehörige Doppeltangente construiren die dem ausgezeichneten Complex angehört. Die so entstehend Linienfläche, deren Erzeugende also dem ausgezeichneten linearen Complex angehören, bildet sich sofort auf eine Curve der Cyklid ab; jeder Doppeltangente entspricht ja ein Punkt der Cyklide.

Wir betrachten demnach zunächst allgemein **Linienfläche** deren **Erzeugende** $x_6 = 0$ **angehören**, und deren **Abbildungen**, und stützen uns hierbei auf ein von Herrn Klein gütigst zur Verfügung gestelltes Manuscript: Zur Theorie der linearen Comple dessen Resultate die eigenen vervollständigen halfen.

Ehe wir auf die in Rede stehende Abbildung selbst eingeh wird es zweckmässig sein, gewisser Ausnahmgebilde Erwähnung tun, die bei unserer Abbildung sowohl im linearen Complex als Punktraum auftreten.

Im Allgemeinen ist die Abbildung eine (11) deutige; jeder Ger den des Complexes entspricht ein Punkt des Cyklidenraumes; giebt aber eine **Gerade** des Complexes — die **Fundamenta gerade**[11]) —, der ∞^2 **Punkte** entsprechen, die eine gan

11) cf. Lie, a. a. O. p. 168.

m Cyklidenraum erfüllen, und umgekehrt **Punkte** im **Cy-aum** — sie liegen auf einem **Kegelschnitt** —, denen s **Büschel von Geraden des Complexes** entspricht.

r Kegelschnitt ist im gegebenen Falle der **Kugelkreis**. ukt des Kugelkreises entspricht also ein Büschel von Complex- welchem die Fundamentalgerade angehört; durch dasselbe Punkt der Fundamentalgeraden und eine durch sie hindurch- Ebene dem betreffenden Punkt des Kugelkreises zugeordnet.

die Verhältnisse der Abbildung klar zu übersehen, folgt eine velche entsprechende Gebilde einander gegenüberstellt, soweit ; haben zu den Ausnahmegebilden.

n des Complexes.	Cyklidenraum.
lamentalgerade L:	die ∞ferne Ebene.
nplexlinie:	ein Punkt.
plexlinie, die L schneidet:	ein Punkt des Kugelkreises.
irch bestimmte Büschel:	derselbe Punkt des Kugelkreises.
gruenz, gebildet vom ge- n Complex und den durch idamentalgerade bestimm- ciellen, d. h. eine **lineare ruenz mit L als Dop- nie**:	der Kugelkreis.
. **Congruenz mit Dop- nie, die L enthält**, lie ∞^2 Linien des Com- , welche eine Complex- chneiden, die ihrerseits t:	∞^2 Punkte, eine Ebene bildend, die mit dem Kugelkreis einen Punkt gemein hat, d. h. eine **Tangentialebene** an den **Kugelkreis**.
lgemeine lin. Con- iz, die L enthält und **omplex** angehört:	eine Ebene.
rectricen dieser Con- :	die beiden Kreispunkte der Ebene.
illgemeine lineare ruenz, die L nicht ilt und dem Complex irt:	eine Kugel; die Punkte des Kugel-kreises entsprechen den Geraden der Congruenz, die L schneiden.
nienfläche 2ten **Gra- velche L enthält**:	eine **Gerade**, die den **Kugel-kreis nicht** trifft.

Raum des Complexes.	Cyklidenraum.
Die Erzeugende L:	der Schnitt mit der unendlich fernen Ebene.
Eine Linienfläche 2ten Grades, die L berührt: (L schneidet nur eine Erzeugende.)	ein Kreis, der die unendlich ferne Ebene berührt, d. h. nur einen Kreispunkt hat. Die Ebene des Kreises entspricht der linearen Congruenz, welche die geschnittene Erzeugende zur Doppellinie besitzt.
Eine beliebige Linienfläche 2ten Grades: (L schneidet 2 Erzeugende, bestimmt also 2 Büschel von Complexgeraden.)	Ein Kreis. (Den beiden Büscheln entsprechen die beiden Kreispunkte.

Betrachten wir jetzt eine allgemeine Linienfläche, deren Erzeugende dem linearen Complex angehören. Der Grad derselben, d. h. die Zahl der Erzeugenden, die von einer beliebigen Geraden geschnitten werden, sei n. Der Grad wird im Allgemeinen mit der Ordnung und Classe[12]) der Linienfläche übereinstimmen; nur wenn die Erzeugenden eine Developpabele bilden, ist der Grad gleich der Ordnung der Developpabeln und der Classe der zugehörigen Raumcurve.

Als charakteristisch ist ferner zu betrachten:

Das Geschlecht p (d. h. das Geschlecht der ebenen Schnittcurve);

Die Zahl der Doppelerzeugenden ϱ
und der stationären Erzeugenden σ,

Die Zahl der singulären Linien s,

Die Art der Brenncongruenz[13]). Die Brenncurve und Brenndevelopabele der letzteren giebt
die Doppelcurve Σ
und die Doppeldeveloppabele S } der geg. Linienfläche.

Es möge die Linienfläche die bei der Abbildung des Comple[xes] benützte Fundamentalgerade L nicht enthalten, auch möge keine ih[rer]

12) Ordnung und Classe sind nach einem bekannten Satze von Cayley [in] diesem Falle gleich.

13) Unter der Brenncongruenz versteht man die ∞^2 Geraden, welche [aus] der Gesammtheit der Büschel herrühren, die von sich schneidenden Linien [der] Fläche gebildet werden.

chneten Linien der linearen Congruenz angehören, deren
nie L ist.

n verwandelt sich die Linienfläche $n$ten Grades ver-
nserer Abbildung in eine Curve $n$ten Grades, die den
eis in n getrennten Punkten schneidet — die Funda-
rade trifft ja n Erzeugende der Linienfläche.

Anzahl der Doppelpunkte wird gleich ϱ, die Anzahl der
hrpunkte σ.

ist aber das Geschlecht der Linienfläche, wenn die Ordnung
sse der Doppelcurve $= h$ ist

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h - \varrho - \sigma$$

ir haben ja das Geschlecht der ebenen Schnittcurve zu be-
.)

Brenncurve $h$ter Ordnung entspricht nun eine Minimallinien-
$h$ter Ordnung, die den Kugelkreis $h$fach enthält. Jede Er-
e derselben schneidet die Raumcurve 2mal, entsprechend dem
d, dass die Brenncurve erzeugt wurde durch sich schneidende
der Brenncongruenz. Von jedem Punkt des Kugelkreises lau-
h Erzeugende der Minimallinienfläche aus; die Raumcurve
dnung, die der Linienfläche des Complexraumes entspricht,
nach h scheinbare Doppelpunkte. Es ist also ihr Geschlecht

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h - \varrho - \sigma$$

s überträgt sich also auch das Geschlecht der Linienfläche
Raumcurve im Cyklidenraum."

Rang der Raumcurve erhalten wir

$$r = n(n-1) - 2h - 2\varrho - 3\sigma$$

ist dies auch die Ordnung der durch dieselbe bestimmten
pabelen. Letztere schneidet den Kugelkreis ausser in den n
zählenden Punkten in

$$2(r-n) \text{ Punkten;}$$

liegen also Minimalgerade auf der Developpabelen, soviel mal
anderen Worten die Verbindungslinie 2er benachbarter
e der Raumcurve Minimalgerade. Ein derartiges Vorkomm-
ntspricht aber einer singulären Linie der Linienfläche

des Complexraumes, d. h. dem Falle, wo eine Erzeugende von ihrer benachbarten geschnitten wird. Wir erhalten demnach

$$2(r-n)=s.$$

„Der Anzahl der singulären Linien entspricht also die Zahl der „Punkte, in denen die Developpabele der Raumcurve vom Kugelkreis „getroffen wird ausser den n doppelt zählenden Punkten, in denen „die Raumcurve den Kugelkreis durchsetzt.“

Eine beliebige Erzeugende der Linienfläche wird von $(n-2)$ ihresgleichen getroffen, eine Doppelerzeugende, resp. stationäre Erzeugende von $(n-4)$ andern Erzeugenden. Es liegen also auf jeder der letzteren $(n-4)$ Doppelpunkte, resp. Rückkehrpunkte der Doppelcurve. Die Anzahl der Doppelpunkte resp. Rückkehrpunkte der Doppelcurve ist demnach

$$\varrho(n-4) \text{ resp. } \sigma(n-4).$$

Ebenso hat die Doppeldeveloppabele $\varrho(n-4)$ Doppelebenen und $\sigma(n-4)$ Inflexionsebenen, welche zu $(n-4)$ durch die $(\varrho+\sigma)$ mehrfachen Erzeugenden hindurchgehen und der gleichen Anzahl von Doppel- und Rückkehrpunkten einzeln entsprechen.

Demgemäss erhalten wir im Punktraum auf der Minimallinienfläche, deren Erzeugende Secanten der Raumcurve sind, $\varrho(n-4)$ Doppelerzeugende und $\sigma(n-4)$ stationäre Erzeugende, die jeweils zu $(n-4)$ durch einen Punkt der Raumcurve gehen.

§ 5. *Abbildung von Curven.*

Jetzt gilt es nun noch, die Linienfläche, deren Erzeugende dem ausgezeichneten linearen Complex angehören, in Verbindung zu bringen mit der Ausgangscurve auf der Kummer'schen Fläche, längs welcher beide Flächen einander berühren.

Gehen wir also aus von einer beliebigen Curve auf der Kummer'schen Fläche, deren Ordnung gleich n sei.

Construiren wir dann in jedem Punkte derselben die Doppeltangente, welche dem ausgezeichneten linearen Complex angehört, so wird deren 2ter Berührungspunkt im Allgemeinen kein Punkt der Curve sein, wir werden also neben der gegebenen Curve noch eine 2te auf der Kummer'schen Fläche in Betracht zu ziehen haben, die dieselbe Linienfläche liefert, die also auch dasselbe Bild auf der Cyklide hat.

Die Linienfläche, welche von den Doppeltangenten gebildet wird, wäre als Schnitt eines linearen, eines quadratischen und eines Com-

plexes $n$ten Grades — letzterer ist durch die Curve $n$ter Ordnung bestimmt — von der Ordnung $4n$. Diese Zahl reducirt sich aber auf die Hälfte, da die in Rede stehende Curve auf der Brennfläche der Congruenz (22) verläuft. Demnach ergiebt sich als Ordnung der 2ten „conjugirten" Curve $3n$. Die Singularitäten der ersten Curve finden auf der 2ten ihr dualistisches Gegenstück. Dieser Dualismus ist aber keiner im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Construiren wir nämlich in allen Punkten der ersten Curve die Ebenen, die ihnen vermöge des ausgezeichneten linearen Complexes entsprechen, so berühren dieselben die Kummer'sche Fläche in Punkten, deren Gesammtheit die 2te zur ersten dualistisch gehörende Curve bildet.

Der Ordnung n der Ausgangscurve entspricht die Anzahl von Tangentialebenen, die man von einem beliebigen Punkt so an die Kummer'sche Fläche legen kann, dass sie in einem Punkt der 2ten Curve berühren; dagegen entspricht der Anzahl von Tangentialebenen, die man von einem beliebigen Punkt so an die Kummer'sche Fläche legen kann, dass sie in einem Punkt der Ausgangscurve berühren[14]), die Ordnung der 2ten „conjugirten" Curve.

In speciellen Fällen kann die 2te conjugirte Curve mit der ursprünglichen zusammenfallen. Dies geschieht z. B. bei den Haupttangentencurven; in diesem Falle ist die Curve zu sich selbst dualistisch und zwar bei den Haupttangentencurven im landläufigen Sinne des Wortes, da die Tangentialebenen an die Kummer'sche Fläche in Punkten einer Hauptangentencurve Osculationsebenen an letztere sind; das stimmt mit dem Umstand, dass Ordnung und Classe der Haupttangentencurve gleich sind. Die Linienfläche der Doppeltangenten kann in letzterem Falle als Schnitt eines linearen und 2er quadratischer Complexe angesehen werden, ist also von der 8ten Ordnung für die Haupttangentencurven 16ter Ordnung; für die Haupttangentencurven 8ter Ordnung wird sie von der 4ten Ordnung (als Schnitt 2er linearer und eines quadratischen Complexes).

Ist demnach die Ordnung der auf der Kummer'schen Fläche gegebenen Curve n, so ist im Allgemeinen der Grad der Linienfläche $2n$.

Wir haben also den Satz:

„Einer Curve $n$ter Ordnung auf der Kummer'schen Fläche entspricht im Allgemeinen eine Curve $2n$ter Ordnung auf der Cyklide."

---

14) Diese Anzahl erhält man, indem man die Schnittpunkte der Curve mit der ersten Polare der Fläche in Bezug auf den angenommenen Punkt sucht; in unserm Falle erhält man so $3n$, eine Zahl, die wir schon oben für die Ordnung der 2ten Curve fanden.

Tritt dagegen der Fall ein, wo sämmtliche 2ten Berührungspunkte der Doppeltangenten wiederum Punkte der Curve sind, die conjugirte Curve also mit der ursprünglichen zusammenfällt, so ist die Ordnung, resp. der Grad der Linienfläche nur $\frac{n}{2}$: ebenso ist dann die Ordnung der Curve auf der Cyklide $\frac{n}{2}$ So ist es, wie gesagt, bei den Haupttangentencurven; ihnen entsprechen die Krümmungslinien 8ter resp. 4ter Ordnung der Cyklide.

Die **Doppelpunkte** der gegebenen Curve auf der Kummer'schen Fläche ergeben **Doppelerzeugende** der Linienfläche, die von den Doppeltangenten gebildet wird. Es ergiebt sich demnach der Satz:

„Den Doppelpunkten der Curve auf der Kummer'schen Fläche „entsprechen wiederum Doppelpunkte der Curve auf der Cyklide."

Hat dagegen die Curve auf der Kummer'schen Fläche eine Spitze, so liegen 3 aufeinanderfolgende Erzeugende der Linienfläche in derselben Ebene; es liegen also 3 aufeinanderfolgende Punkte der Curve im Cyklidenraum auf derselben Minimalgeraden; wir erhalten einen Tangenteninflexionspunkt. Hat umgekehrt die Curve auf der Kummer'schen Fläche einen Tangenteninflexionspunkt, dann ist die Tangente in diesem Punkt Haupttangente an die Kummer'sche Fläche. Ihr entspricht eine Hauptkugel, welche die Cyklide in dem entsprechenden Punkte osculirt; eine solche schneidet aber in einer Curve mit Spitze in diesem Punkte; infolgedessen bekommt die Curve im Cyklidenraum eine Spitze. Wir sehen also:

„Den Spitzen und Tangenteninflexionspunkten der Curve auf der „Kummer'schen Fläche entsprechen resp. Tangenteninflexionspunkte „und Spitzen der entsprechenden Curve im Cyklidenraum. Diese „letzteren Tangenteninflexionspunkte sind notwendig imaginär."

Da das Geschlecht der Curve auf der Cyklide überdies noch von der Ordnung der Doppelcurve h der Linienfläche abhängt, und h von den Singularitäten der Curve auf der Kummerschen Fläche, welche deren Geschlecht bestimmen, unabhängig ist, so sehen wir, dass man von dem Geschlecht der Curve auf der Kummer'schen Fläche noch nicht auf das der Curve auf der Cyklide schliessen kann, sondern erst die Linienfläche gebildet von den Doppeltangenten construiren muss. Dann aber erhält man, wie wir sahen, vollständigen Aufschluss über alle in Frage kommenden Singularitäten.

Wir wollen noch ergänzend erwähnen: Gebt die Curve auf d Kummer'schen Fläche durch einen Knotenpunkt hindurch, so kom zu der Linienfläche $n$ten Grades der Doppeltangenten noch ei

inienfläche ersten Grades, ein Geradenbüschel[15]), hinzu; infolgedessen rhalten wir als Bild auf der Cyklide die Curve $2n$ter Ordnung in Verbindung mit einer auf der Cyklide liegenden Minimalgeraden.

II. Capitel.

Kummer'sche Fläche und Cyklide unter Berücksichtigung der Θ.

Auf dreierlei Weisen wurde, wie schon in der Einleitung erwähnt, die Kummer'sche Fläche durch hyperelliptische ϑ Functionen (vom Geschlecht 2) dargestellt. Wir haben sachlich geordnet:

1) Die liniengeometrische Darstellung Rohns.
2) Die Borchardt'sche Darstellung, beruhend auf einer Göpel'schen biquadratischen Relation.
3) Die Weber'sche Darstellung.

In dieser Aufeinanderfolge ist uns zugleich das Einteilungsprincip gegeben, dem wir folgen werden.

§ 1. *Die liniengeometrische Darstellung der Kummer'schen Fläche und die hierauf basirende Uebertragungsweise.*

Wir wissen, dass wir die Punkte der Kummer'schen Fläche bestimmen können durch die hindurchlaufenden Haupttangentencurven, indem wir das System der letzteren zum krummlinigen Coordinatensystem wählen; wir wissen aber auch[16]), dass durch die Parameterwerte 2er Haupttangentencurven

$$\lambda_1 = e_1, \quad \lambda_2 = e_2$$

ein Punkt der Kummer'schen Fläche nicht eindeutig bestimmt ist, sondern dass wir die Wahl unter 32 Punkten haben. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, charakterisiren wir den Punkt der Kummerschen Fläche nicht durch die 2 Parameter λ_1 und λ_2 der beiden durch ihn hindurch gehenden Haupttangentencurven selbst, sondern durch die Normalintegrale erster Gattung vom Geschlecht 2:

1)
$$u_1 \mid u_2 = u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2'' = \int_\alpha^{\lambda_1, \Delta} du_1 + \int_\beta^{\lambda_2, \Delta} du_1 \mid \int_\alpha^{\lambda_1, \Delta} du_2 + \int_\beta^{\lambda_2, \Delta} du_2$$

---

15) In einer der Doppeltangentialebenen, die durch den Knotenpunkt gehen

16) cf. p. 66.

in denen λ_1 und λ_2 als obere Grenzen auftreten, während die Wal der unteren Grenzen α und β noch in unserer Hand steht, und den Wert hat:

$$2)\qquad \Delta = \sqrt{(\lambda-c_1)(\lambda-c_2)(\lambda-c_3)(\lambda-c_4)(\lambda-c_5)(\lambda-c_6)}$$

wo $c_1 c_2 \ldots c_6$ die Parameter der 6 Haupttangentencurven 8ter Ordnung bedeuten.[17])

Bezeichnen wir nun mit Π ein Multiplum von Perioden, so lassen wir von den Ausdrücken

$$3)\qquad \pm u' \pm u'' + \Pi$$

diejenigen denselben Punkt der Kummer'schen Fläche bedeuten, welche sich durch eine gerade Anzahl von Vorzeichen und durch gerade Multipla von Perioden unterscheiden, während sämmtliche Ausdrücke zusammengenommen die 32 zusammengehörigen Punkte liefern.

Unsere Gruppe von 32 Punkten sondert sich, wie wir wissen, in 2 Untergruppen von je 16 Punkten. Diese 16 Punkte einer Untergruppe unterscheiden wir durch die 16 verschiedenen Perioden von einander, die bei Integralen erster Gattung vom Geschlecht 2 möglich sind. Ist der Ausgangspunkt dargestellt durch

$$u_1 \mid u_2 = u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2''$$

so erhält man die 15 zugehörigen Punkte der Untergruppe also durch Zufügen von den 15 von $0 \mid 0$ verschiedenen Perioden:

$a_{11} \mid a_{12}$	$\pi i \mid 0$
$a_{11} + \pi i \mid a_{12}$	$a_{11} + \pi i \mid a_{12} + \pi i$
$\pi i \mid \pi i$	$a_{11} + a_{12} + \pi i \mid a_{12} + a_{22} + \pi i$
$a_{12} + \pi i \mid a_{22} + \pi i$	$a_{11} + a_{12} + \pi i \mid a_{12} + a_{22}$
$a_{12} + \pi i \mid a_{22}$	$a_{11} \mid a_{12} + \pi i$

$$a_{11} + a_{12} \mid a_{12} + a_{22} + \pi i$$
$$a_{11} + a_{12} \mid a_{12} + a_{22}$$
$$a_{12} \mid a_{22}$$
$$a_{11} \mid a_{22} + \pi i$$
$$0 \mid \pi i$$

wenn die Perioden gegeben sind durch das Schema:

17) Es sei für das Folgende bemerkt, dass wir uns hinsichtlich der Th der hyperelliptischen Integrale und Functionen an Herrn Prym „Neue Th der ultraelliptischen Functionen", Denkschriften der Wiener Akademie, B und Herrn Krazer: „Theorie der 2fach unendlichen Θ Reihen", Leipzig anschliessen werden.

	a_1	a_2	b_1	b_2
$\int du_1$	a_{11}	a_{12}	πi	0
$\int du_2$	a_{21}	a_{22}	0	πi

nd die Riemann'sche 2blättrige Fläche für $p = 2$ die charakteristische erschneidung zeigt (s. Fig. 5.)

Die Punkte der andern Untergruppe unterscheiden sich von den entsprechenden Punkten der ersten durch das Vorzeichen von u'', oder u' was dasselbe besagen will bei unserer Festsetzung auf p. 246.

Durch unsern linearen Complex $x_6 = 0$ werden nun solche Punkte einander zugeordnet. Gehen wir von dem Punkt

$$u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2''$$

aus und nehmen diejenige Ebene, welche ihm durch den Complex $x_6 = 0$ entspricht, so ist deren Berührungspunkt mit der Kummer-schen Fläche der dualistisch zum ersten gehörige Punkt, dem die Argumente zukommen

$$u_1' - u_1'' \mid u_2' - u_2''.$$

Beide Punkte liefern nun gemeinsam denselben Punkt der Cyklide, dem also 2 Argumentenwerte mod. doppelter Perioden zukommen. Aus ihm erhalten wir 15 weitere durch Zufügen der 15 von $0 \mid 0$ verschiedenen Periodenmultipla.

Wir erhalten demnach den Satz:

„Je 2 Punkte der Kummer'schen Fläche, deren Argumente sich simultan in die Form setzen lassen

$$u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2'' \quad \text{und} \quad u_1' - u_1'' \mid u_2' - u_2'',$$

liefern denselben Punkt der Cyklide."

„Ebenso lässt eine simultane Umkehr beider Vorzeichen den Punkt der Cyklide ungeändert."

„Vermehren wir diese Argumente um die 15 möglichen von 0 verschiedenen Perioden (mod. 2 genommen), so erhält man auf der Cyklide aus einem vorgegebenen Punkte die 15, welche durch Spiegelung an den Fundamentalkugeln aus ihm hervorgehen, gerade so, wie man auf der Kummer'schen Fläche aus dem entsprechenden Punktepaare 15 weitere erhält, die durch Spiegelung an den Congruenzen $x_i = 0$ $x_k = 0$ aus ihm hervorgehen.

Curvensysteme.

Jetzt nehmen wir unsere Argumente

$$u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2''$$

zu den Argumenten von ϑFunctionen vom Geschlecht 2, und fragen zunächst, was bedeutete das Nullsetzen

a. Der 6 ungeraden ΘFunctionen?

Die 6 ungeraden ϑFunctionen, gleich Null gesetzt, liefern natürlich auf der Kummer'schen Fläche die 6 Haupttangentencurven 8ter Ordnung, da wir die Parameter derselben zu Verzweigungspunkten genommen haben.

Dementsprechend erhalten wir auf der Cyklide 6 ausgezeichnete Krümmungslinien. Wir wissen schon, dass die Haupttangentencurve $\lambda = c_6$ übergeführt wird in die singuläre Krümmungslinie 8ter Ordnung, in welcher die Cyklide von der benachbarten geschnitten wird[18]. Beide Curven sind derartig auf einander bezogen, dass den Tangenten der einen die Punkte der andern, den Punkten der einen die Tangenten der andern entsprechen; sie sind reciproke Curven im Sinne des Herrn Lie[19]) Die Spitzen der einen verwandeln sich, wie wir wissen, in die stationären Tangenten der anderen Curve und umgekehrt. Da nun die 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven 8ter Ordnung auf der Kummer'schen Fläche 40 stationäre Tangenten und keine Spitzen haben, so hat die singuläre Krümmungslinie, längs welcher die developpabele Focale der Cyklide berührt, keine stationären Tangenten, aber 40 Spitzen. (Die 40 Osculationskugeln in diesen Punkten sind Hyperosculationskugeln und schneiden die Cyklide längs 2er Geraden und eines Kreises, der durch den Schnitt der beiden Geraden geht, die 40 Punkte sind die 40 Nabelpunkte der Cyklide[20]).

Die übrigen 5 ausgezeichneten Haupttangentencurven erhalten wir für $\lambda = c_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ihnen entsprechen auf der Cyklide die 5 ausgezeichneten Krümmungslinien 4ter Ordnung, die 5 Focalcurven, die ausgeschnitten werden von den 5 Fundamentalkugeln.

In diesem Falle gehört die Linienfläche, deren Erzeugende längs der betreffenden ausgezeichneten Haupttangentencurve constru-

18) Siehe p. 65.
19) Lie, a. a. O., p. 164.
20) Darboux, a. a. O., p. 309.

ten Doppeltangenten an die Kummer'sche Fläche, dem Complex $x_6 = 0$ zugehörend, sind, einer linearen Congruenz an; infolgedessen liegt die entsprechende Curve im Cyklidenraume in der Tat auf einer Kugel, und zwar einer der 5 Fundamentalkugeln.

Die Linienfläche ist vom 4ten Grade und hat das Geschlecht 1, enthält jede der Directricen der Congruenz doppelt und hat 8 singuläre Linien, 4 davon haben ihren zugehörigen singulären Punkt in einer der Direktrieen, während ihre Ebenen durch die andere gehen; bei den 4 übrigen findet das Umgekehrte statt.

Infolgedessen hat die Curve auf der Cyklide von der 4ten Ordnung ebenfalls das Geschlecht 1, und es tritt achtmal der Fall ein, dass eine Tangente der Curve Minimalgerade ist; diese Tangenten sind Erzeugende der betreffenden Fundamentalkugel, 4 Erzeugende der einen, 4 Erzeugende der andern Art.

b. Die 10 geraden Θ Functionen.

Wir wissen, dass auf der Kummer'schen Fläche den 10 gleich Null gesetzten geraden ϑ Functionen mit den in Rede stehenden Argumenten die Schnittlinien mit den 10 Fundamentalflächen 2ter Ordnung entsprechen, also Curven achter Ordnung[21]).

Dementsprechend erhalten wir auf der Cyklide Curven 16ter Ordnung, welche den Berührungsschnitt bilden mit Minimalflächen 16ter Ordnung, welche den Kugelkreis 8fach enthalten und einen der Fundamentalkreise als Leitlinie (4fach zählend) besitzen. Man gelangt zu einer dieser Minimallinienflächen, wenn man die Punkte der Curve der Kummer'schen Fläche abbildet. Natürlich erhält man dieselbe Curve auf der Cyklide, wenn man die Linienfläche 16ten Grades construirt, welche von den Doppeltangenten gebildet wird, und diese dann der Abbildung unterwirft.

Wir fassen das Resultat in den Satz zusammen:

„Den 10 geraden Θ Functionen, gleich Null gesetzt, entsprechen „10 Curven 16ter Ordnung auf der Cyklide. Dieselben können aufgefasst werden als der Berührungsschnitt mit 10 Minimallinienflächen 16ter Ordnung, die den Kugelkreis achtfach enthalten und je einen „der Fundamentalkreise als Leitlinie (4fach zählend) besitzen."

---

21) Man vergleiche Rohn: Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperell. Funct. $p = 2$, Diss., ferner die genannte Arbeit desselben Verfassers im 15. B. der Math. Ann.

c. Die Curvenschaar $\vartheta(u-e)=0$

($e_1 \mid e_2 \equiv$ einfachen Integralen.)

$\vartheta(u-e)=0$ stellt auf der Kummer'schen Fläche die S der Haupttangentencurven 16ter Ordnung mit 16 Spitzen un stationären Tangenten dar.

Die Haupttangencurven verwandeln sich nach den frühe in die Krümmungslinien 8ter Ordnung auf der Cyklide, die al stationäre Tangenten, die zugleich Minimallinien sind, und 96 Sp haben müssen. Dass damit die Zahl der stationären Tangenten haupt nicht erschöpft ist, geht daraus hervor, dass sich auch stationäre Tangente einstellt, — welche in diesem Falle reell kann, — wenn 3 aufeinanderfolgende Erzeugende der Doppeltange fläche einer Erzeugung einer Fläche 2ten Grades angehören, w die Fundamentalgerade des Complexraumes ebenfalls als Erzeu derselben Art enthält.

„Die Gleichungen $\vartheta(u-e)=0$, wo $e_1 \mid e_2$ einfachen Integ „congruent sind, stellen bei veränderlicher obrer Grenze dieser „fachen Integrale die Schaar der Krümmungslinien auf der Cyklide

d. Die Curvenschaar $\vartheta(u-e)=0$ bei beliebigem $e_1 \mid e_2$

Wenn für einen Punkt der Kummerschen Fläche $\vartheta(u-e)$ ist, so muss für denselben Punkt auch

$$\vartheta(-u-e)=\vartheta(u+e)=0$$

sein; denn ebenso wie der betreffende Punkt durch $u_1'+u_1'' \mid u_2'$ charakterisirt ist, können wir ihn auch bestimmen durch die mente mit entgegengesetzten Vorzeichen

$$-u_1'-u_1'' \mid -u_2'-u_2''.$$

Ist also $\vartheta(u-e)=0$, so muss auch

$$\vartheta(u-e).\vartheta(u+e)=0 \text{ sein.}$$

Nun ist aber nach dem Additionstheorem der ϑ Function

$$(0)^2\,\vartheta(u-e).\vartheta(u+e)$$
$$=\vartheta_0^2(u)\,\vartheta_0^2(e)+\vartheta_1^2(u)\,\vartheta_1^2(e)+\vartheta_2^2(u)\,\vartheta_2^2(e)+\vartheta_3^2(u)$$

wo ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 3 ungerade ϑ Functionen sind, deren Charakteri die Summe 0 ergeben.

---

22) cf. z. B. Krazer, Theorie der 2fach unendlichen ϑ Reihen p. 5

Der letztere Ausdruck, gleich Null gesetzt, stellt aber auf der Kummer'schen Fläche eine Curvenschaar 16ter Ordnung dar, wie sich bei der Ueberlegung ergiebt, was die ϑ Quadrate zu bedeuten haben. (Man vergl. übrigens die Seminarvorträge des Herrn Klein im W./S. 83 „Ueber die Kummer'sche Fläche".)

„Wir erhalten also auch auf der Cyklide eine ∞^2 Schaar von „Curven 16ter Ordnung, die den Kugelkreis in 16 getrennten Punk-„ten treffen."

§ 2. *Die Borchardt'sche Darstellung der Kummer'schen Fläche und die hierauf sich gründende Uebertragungsweise.*

I. Allgemeine Bemerkungen.

Die Borchardt'sche Darstellungsweise ergiebt sich aus der im vorigen Paragraphen erörterten durch Anwendung einer quadratischen Transformation, so dass die transformirten ϑ Functionen — wir wollen sie mit einem Accent bezeichnen, — nur noch die halben Argumente haben und nur 4 für die Transformation charakteristischen Perioden ungeändert geblieben sind. Es gehört infolgedessen zu einer jeden Classe von quadratischen Transformationen — deren wir 15 haben — als charakteristisch eine Gruppe von 4 ϑ Functionen, die ein Vierersystem erster Art, eine Göpel'sche Vier[23]) bilden. Solche 4 ϑ Functionen sind durch eine Göpel'sche biquadratische Relation[24]) mit einander verbunden, deren wir also auch 15 wesentlich verschiedene haben.

Eine solche Göpel'sche Relation stellt nun die Gleichung der Kummer'schen Fläche, bezogen auf eines der 15 Fundamentaltetraeder dar (siehe Teil II., Cap. 1., § 1. p. 227.) Die ϑ Functionen, welche die Relation bilden, geben, ohne Rücksicht auf die Kummer'sche Fläche einzeln gleich Null gesetzt, die Gleichungen der 4 Ebenen, welche das Fundamentaltetraeder bilden. Mit ihren Vorzeichenänderungen und Vertauschungen bedeuten sie die homogenen Punktcoordinaten von 16 zusammengehörigen Punkten der Kummer'schen Fläche bezogen auf eins der 15 Fundamentaltetraeder[25]). Die Gruppe solcher 16 Punkte zerlegt sich wiederum in 4 Untergruppen; die 4 Punkte einer Untergruppe unterscheiden sich in den Coordinaten durch 2 Vorzeichenwechsel, dagegen gelangt man von einer Unter-

23) siehe Krazer, a. a. O. p. 20, p. 61.

24) Göpel: Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis, Cr. Journ., Bd. 35, p. 292, Formel 30.

25) Rohn, Bd. 15 der Annalen p. 344.

gruppe zur andern, indem man die Coordinaten in 2 Paare teilt und die Elemente jedes Paares mit einander vertauscht[26]).

Als Beispiel einer solchen Göpel'schen Relation führen wir die von H. Borchardt[27]) zu Grunde gelegte Gleichung an:

$$\vartheta_5'^4+\vartheta_0'^2+\vartheta_{23}'^4+\vartheta_{14}'^4+2(5)(0)(23)(14)\times$$
$$\frac{\Pi\varepsilon\varepsilon'((5)^2+\varepsilon(0)^2+\varepsilon'(23)^2+\varepsilon\varepsilon'(14)^2)}{\{(5)^2(0)^2-(23)^2(14)^2\}\{(5)^2(23)^2-(0)^2(14)^2\}\{(5)^2(14)^2-(0)^2(23)^2\}}$$
$$\times\,\vartheta_5'\vartheta_0'\vartheta_{23}'\vartheta_{14}'$$
$$-\frac{(5)^4+(0)^4-(23)^4)-(14)^2}{(5)^2(0)^2-(23)^2(14)^2}\{\vartheta_5'^2\vartheta_0'^2-\vartheta_{23}'^2\vartheta_{14}'^2\}$$
$$-\frac{(5)^4+(23)^4-(0)^4-(14)^2}{(5)^2(23)^2-(0)^2(14)^2}\{\vartheta_5'^2\vartheta_{23}'^2-\vartheta_0'^2\vartheta_{14}'^2\}$$
$$-\frac{(5)^4+(14)^4-(0)^4-(23)^4}{(5)^2(14)^2-(0)^2(23)^2}\{\vartheta_5'^2\vartheta_{14}'^2-\vartheta_0'^2\vartheta_{23}'^2\}=0$$ [28]).

(Hierin sind die Vorzeichen noch nicht vollständig bestimmt; bei Herrn Krazer findet man dagegen, a. a. O. p. 55., Formel III, eine Gleichung, die sämmtliche Göpel'sche Relationen mit Angabe aller Vorzeichen umfasst.)

Die Constanten (5), (0), (23), (14) liefern die homogenen Coordinaten der 16 Knotenpunkte der Kummer'schen Fläche.

Im Ganzen haben wir, wie schon gesagt, 15 derartige Darstellungen, entsprechend den 15 Göpel'schen Relationen und den 15 Classen von quadratischen Transformationen. Der Umstand, dass jede Classe noch eine Gruppe von 24 Transformationen enthält, findet darin seine Begründung, dass nach Auswahl des Tetraeders die Ecken desselben noch 24 Permutationen gestatten.

Wie nun eine solche biquadratische Göpel'sche Relation die Kummer'sche Fläche darstellt, so wird dieselbe nach Ausführung der Berührungstransformation auch die Cyklide darstellen und zwar bezogen auf eins der 15 räumlichen Vierseite, welche den 15 Fundamentaltetraedern entsprechen (cf. p. 233.)

Jedes der 4 ϑ', welche die Göpel'sche Relation bilden, für sich gleich Null gesetzt, stellt die betreffende Minimalgerade dar, welche

---

26) Rohn, a. a. O. p. 337.

27) Borchardt, Crelle's Journal Bd. 83, p. 238. Die Bezeichnung der nach Weierstrass.

28) Hierbei sind die Argumente der ϑ' weggelassen und für die N[illegible] werte abkürzend die blossen Charakteristiken gesetzt.

ein Bestandteil des räumlichen Vierseits ist[29]). Die 4 ϑ'Functionen stellen mit den Vorzeichenwechseln und Vertauschungen, wie sie sich auf p. 252. für die Gruppe der 16 Punkte der Kummer'schen Fläche ergaben, die Coordinaten einer Gruppe von 16 die Cyklide in je einem Punkte berührenden Minimalgeraden dar, die sich ebenso wie die Gruppen der 16 Punkte der Kummer'schen Fläche in 4 Untergruppen sondert. Die 4 in der Gleichung auftretenden Constanten bestimmen mit ihren Vorzeichencombinationen die 16 Minimalgeraden, lie auf der Cyklide liegen; denn diese entsprechen den 16 Knoten-unkten, resp. den singulären Ebenen.

Wir erhalten demnach die Sätze:

„Eine der 15 biquadratischen Göpel'schen Relationen, welche zwischen 4 ϑ', die einem Vierersystem Iter Art angehören, be-tehen, liefert die Gleichung der Cyklide in homogenen Minimal-iniencoordinaten bezogen auf eines der räumlichen Vierseite, welche us Minimallinien zusammengesetzt sind, und deren Ecken von den 'unkten gebildet werden, in denen je 3 der Fundamentalkugeln sich reffen".

Die Gruppirung dieser räumlichen Vierseite zeigt uns § 1. des en Capitels des 2ten Teils, p. 233.

„Die Θ' Functionen, welche die Relation bilden, liefern die Coor-inaten von je 16 zusammengehörigen Minimalgeraden, welche die yklide berühren. Sie sondern sich wieder in 4 Untergruppen von 4 Minimalgeraden. Die Minimalgeraden einer Untergruppe unter-cheiden sich in den Coordinaten durch 2 Vorzeichenwechsel; da-egen gelangt man von einer Untergruppe zur andern, indem man ie Coordinaten in 2 Paare teilt und die Elemente jedes Paares it einander vertauscht".

II. Curvensysteme.

a. Die 16 einfachen ϑ' Functionen.

Fragen wir, was auf der Kummer'schen Fläche die 16 einfachen Functionen, wenn wir sie gleich Null setzen, bedeuten, so finden r zunächst eine Teilung derselben in 4 und 12. Die ersten 4, lche das Vierersystem erster Art bilden, aus welchem die die Kum-er'sche Fläche darstellende Göpel'sche Relation besteht, liefern natür-h die Schnitte mit den 4 Ebenen des Fundamentaltetraeders, also ebene Curven 4ter Ordnung von allgemeinem Cha-

29) resp. die durch dieselbe bestimmte Congruenz von Minimalgeraden.

rakter auf der Kummer'schen Fläche. Die 12 übrigen liefe
Herr Rohn[30]) zeigt, die Berührungsschnitte 4ter Or
mit Flächen 2ter Ordnung, welche das betreffende F
mentaltetraeder zum gemeinsamen Polartetraeder h

Was zunächst die 4 Schnittcurven mit den Tetraederebe
betrifft, so entsprechen diesen vermöge unserer Transformation
6ter Ordnung auf der Cyklide, die wie die entsprechenden
auf der Kummer'schen Fläche keine Doppelpunkte haben
aber den Kugelkreis in 8 Punkten schneiden.

Sie kann übrigens auch aufgefasst werden als Berührungs
mit einer Minimallinienfläche 8ter Ordnung, die den Kugelk
fach enthält. Diese Minimallinienfläche hat als Leitlinie ein
mallinie und enthält letztere doppelt zählend, es ist dies die
fende Minimallinie des Coordinatenvierseits.

Die 12 übrigen ϑ' liefern Curven 4ter Ordnung a
Cyklide, die wir ansehen können als Berührungsschnitte mit
pin'schen Cykliden; denn in solche verwandeln sich vermö
Transformation die 12 die Kummer'sche Fläche berührenden F
2ter Ordnung[31]) und zwar sind dieselben auf dasselbe Coord
vierseit bezogen.

Wir fassen die erhaltenen Resultate wiederum in den S
sammen:

„Setzen wir die 16 einfachen Θ' gleich Null, so erhalten
„der Cyklide 4 Curven 8ter und 12 Curven 4ter Ordnung.
„steren entsprechen den 4 ausgezeichneten Θ', die das g
„Vierersystem bilden, und können angesehen werden als die
„rungsschnitte mit Minimallinienflächen 8ter Ordnung, die den
„kreis vierfach, und die entsprechende Minimallinie des Coord
„vierseits als Leitlinie 2fach enthalten. Die 12 übrigen Curv
„Ordnung sind die Berührungsschnitte mit 12 Dupin'schen Cyk

b. Die ∞' Curvenschaar $\vartheta'(u-e)=0$.

$e_1 \mid e_2 \equiv$ einfachen Integralen.

Nach Seite 250 ist mit $\vartheta'(u-e)$ auch $\vartheta'(u+e)=0$
$\vartheta'(u-e).\vartheta'(u+e)$ kann man wiederum in eine Summe von
draten zerlegen, deren Argumente die $u_1 \mid u_2$ allein sind. Di

30) Bd. 15. der Math. Annalen p 346.

31) Lie, Bd. 5. der Annalen, a. a. O. p. 173.

Quadrate wiederum lassen sich sämmtlich durch die Quadrate der ursprünglichen ein Vierersystem erster Art bildenden ϑ' ausdrücken [32]). Eine derartige Gleichung stellt demnach auf der Kummer'schen Fläche den Schnitt mit einer Fläche 2ter Ordnung dar, also Curven 8ter Ordnung. Wir erhalten so auch auf der Cyklide eine ∞' Schaar von Curven 16ter Ordnung.

c. Die ∞^2 Curvenschaar $\vartheta'(u-e)=0$
bei beliebigem $e_1 \mid e_2$.

Wir erhalten ganz dasselbe Resultat, wie unter b., nur jetzt eine ∞^2 Schaar von Curven 16ter Ordnung.

§ 3. *Die Cayley-Weber'sche Darstellung der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung.*

I. Die Gleichungsform.

Während die so eben in Betracht gezogene Darstellung an die Gleichungsform der Kummer'schen Fläche bezogen auf eins der 15 Fundamentaltetraeder anknüpfte, gründet sich die jetzt zu besprechende Methode auf die von H. Kummer [33]) gegebene Gleichungsform, welche voraussetzt, dass die Seiten des Coordinatentetraeders Doppelebenen, und die Eckpunkte Knotenpunkte der Fläche sind. Auf diese Gestalt der Gleichung wird man aber geführt, wenn man die 4 ϑ' jener biquadratischen Relation einer nochmaligen quadratischen Transformation unterwirft, so dass man die daraus hervorgehenden ϑ'' auch als aus den ursprünglichen ϑ (ohne Accente) durch Zweiteilung entstanden ansehen kann. Wenn man alsdann die nunmehrigen ϑ''Quadrate — wir bezeichnen sie durch 2 Accente, — durch die 4 ein Vierersystem 2ter Art bildenden ausdrückt, und letztere ϑ''Quadrate den 4 Coordinaten ξ, η, ζ, ω eines Punktes der Fläche gleichsetzt, so erhält man die gewünschte Gleichungsform [34])

$$\sqrt{e_5^2 e_{01}^2\xi(e_{12}^2\eta+e_{14}^2\zeta-e_{03}^2\omega)}-\sqrt{e_2^2 e_{34}^2\eta(-e_{03}^2\zeta+e_{12}^2\xi+e_{14}^2\omega}$$
$$-\sqrt{e_4^2 e_{23}^2\zeta(e_{14}^2\xi+e_{03}^2\eta-e_{12}^2\omega}=0.$$

---

32) Siehe Krazer, a. a. O. p. 53.

33) Kummer, Monatsberichte der Berl. Akad. 1864, p. 252.

— Abh. der Berl. Akad., 1866: Ueber algebraische Strahlensysteme.

34) Rohn, Bd. 15. der Annalen, p. 347. In rationaler Form findet man die Gleichung bei H. Krazer, a. a. O. p. 44., Gleichung 4.

Hierin sind die ϑNullwerte durch e mit angehängten Index bezeichnet, entsprechend der jedesmaligen Charakteristik; die Bezeichnung ist die von Weierstrass.

Die 16 Doppelebenen der Kummer'schen Fläche verwandeln sich nun durch die Berührungstransformation zusammen mit den 16 Knotenpunkten in die 16 Minimalgeraden, die auf der Cyklide liegen. Dieselbe ΘRelation also, welche die Kummer'sche Fläche bezogen auf ein Doppelebenentetraeder darstellt, stellt auch die Cyklide bezogen auf ein Minimallinienquadrupel dar, die sämmtlich der Cyklide angehören. Wie es nun 80 Vierersysteme 2ter Art[35]) giebt, so erhalten wir auch 80 Doppelebenentetraeder.

Den 4 Ebenen eines Tetraeders entsprechen nun im Cyklidenraum 4 Minimalgerade der Cyklide. Je drei der Tetraederebenen schneiden sich aber in einem Knotenpunkte; es entstehen so 4 Knotenpunkte, und diesen müssen ebenfalls 4 Gerade der Cyklide entsprechen. Es können nun, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, 2 Fälle eintreten: die 4 Knotenpunkte liefern entweder

1) dasselbe Geradenquadrupel wie die 4 singul. Ebenen, oder

2) ein Geradenquadrupel, welches mit dem ersten eine Schläfli'sche Doppelvier bildet, und zwar erhalten wir im Ganzen

40 Quadrupel der ersten Art,
40 Quadrupel der zweiten Art, oder 20 Doppelvieren[36]).

Wir haben demnach den Satz:

„Die Relation 4ten Grades, welche zwischen den Θ''Quadraten
„besteht, die einem Vierersystem 2ter Art angehören, liefert die
„Gleichung der Cyklide bezogen auf eins der 80 Quadrupel, welche
„aus den Geraden der Cyklide, entsprechend den 80 Vierersystemen
„2ter Art, gebildet werden können; 40 von diesen Quadrupeln haben
„die besondere Eigenschaft, 20 Schläfli'sche Doppelcurven zu bil-
„den".

Indem wir nochmals darauf hinweisen, dass unsere jetzigen Argumente nur halb so gross als die ursprünglichen sind, welche d…

35) Krazer, a. a. O., Tabelle II., am Schluss.

36) Damit sind aber die Doppelvieren, welche die Geraden der Cykl… bilden können, erschöpft, vergl. Clebsch: Ueber Flächen 4ter Ord. etc. Cr… Bd. 69., p. 157.

engeometrische Darstellung vermittelten, bemerken wir noch, dass homogenen Coordinaten eines Punktes der Kummer'schen Fläche h jetzt durch die ϑ''Quadrate ausdrücken, infolgedessen zu einem nkte die Argumente

$$\pm u + \Pi$$

hören, wo Π ein beliebiges, auch ungerades Periodenmultiplum beichnen kann.

Ebenso bestimmen jetzt im Cyklidenraum

$$\pm u + \Pi$$

n und dieselbe die Cyklide berührende Minimalgerade, also auch ittelbar einen Punkt der Cyklide, denjenigen, in welchem die inimalgerade berührt.

„Die Werte, welche die 4 ϑ''Quadrate annehmen, die einem ierersystem 2ter Art angehören, liefern die Coordinatenwerte einer er Minimalgeraden, welche die Cyklide berühren; diese Coordinaten leiben ungeändert, wenn wir die Argumente der ϑ''Functionen im orzeichen ändern oder beliebige Periodenmultipla zufügen".

II. Curvensysteme.

a. Die einfachen ϑ''Functionen.

Die 16 einfachen ϑ''Functionen ergeben zunächst, gleich Null etzt, auf der Kummer'schen Fläche die Gleichungen der 16 Kegelnitte, in welchen die 16 Doppelebenen die Kummer'sche Fläche ühren. Ihnen entsprechen auf der Cyklide natürlich die 16 Geen. Insofern jeder Kegelschnitt durch 5 Knotenpunkte geht, die ht zu seiner Ebene gehören, erhalten wir bei der Construction Doppeltangenten ausser der Linienfläche 1ten Grades, welche Ebene des Kegelschnitts ausfüllt, noch 5 Linien ersten Grades. nselben entsprechen die 5 Geraden der Cyklide, welche eine vorebene Gerade derselben schneiden.

Wir erhalten den Satz:

„Die 16 einfachen Θ''Quadrate, gleich Null gesetzt, liefern die 5 Minimalgeraden, die auf der Cyklide existiren".

b) Die Curvenschaaren $\Theta''(u-e) = 0$.

1) $\vartheta_i''(u-e) = 0$[37]), wo $e_1 \mid e_2$ einfachen Integralen con-

---

37) i = einer der 16 Charakteristiken.

gruent ist, liefert auf der Kummer'schen Fläche eine Tangentialebene, welche in einem der 16 Knotenpunkte an dieselbe gelegt wird; dieselbe schneidet auf der Kummer'schen Fläche eine Curve 4 ter Ordnung aus, welche in dem Knotenpunkt eine Spitze hat.

2) Ist $e_1 \mid e_2$ allgemein, und nehmen wir $e_1 \mid e_2$ in der Gestalt an

$$e_1 \mid e_2 = \frac{v_1'+v_1''}{2} \;\Big|\; \frac{v_2'+v_2''}{2}$$

so liefert

$$\vartheta''(u-e) = 0 \tag{2)}$$

eine Tangentialebene der Kummer'schen Fläche, welche in dem Punkt berührt, dessen Argumente sich in die Gestalt setzen lassen [38])

$$u_1 \mid u_2 = \frac{v_1'-v_1''}{2} \;\Big|\; \frac{v_2'-v_2''}{2}.$$

Diese schneidet auf der Kummer'schen Fläche also eine Curve 4 ter Ordnung aus, die in dem betreffenden Punkt einen Doppelpunkt besitzt.

Die Curven 4 ter Ordnung, welche auf der Kummer'schen Fläche durch die Gleichung 1) dargestellt werden, verwandeln sich in Curven 8 ter Ordnung auf der Cyklide, die eine der Minimalgeraden der Cyklide zur stationären Tangente besitzen; sie bilden den Berührungsschnitt mit Minimallinienflächen 8 ter Ordnung, welche den Kugelkreis 4 fach enthalten und diejenige Minimallinie als Leitlinie (2 fach zählend) besitzen, welche die Cyklide in dem genannten Tangenteninflexionspunkt der Curve berührt.

Wir erhalten den Satz:

„Durch die Gleichungen

$$\Theta_i''(u-e) = 0, \text{ wo } e_1 \mid e_2 \equiv \text{einfachen Integralen,}$$

„werden auf der Cyklide 16 Curvensysteme 8 ter Ordnung dargestellt, „welche je eine der 16 Minimalgeraden der Cyklide zur Wendetangente besitzen und angesehen werden können als Berührungsschnitt „mit Minimallinienflächen 8 ter Ordnung, die den Kugelkreis 4 fach „enthalten und die in dem betreffenden Wendepunkt die Cyklide berührende Minimalgerade als Leitlinie besitzen".

---

38) Man vergleiche Seminarvortrag des H. Klein, W. S. 82|83. „Ueber die Kummer'sche Fläche".

Daran schliesst sich sofort der weitere Satz, die Curven betreffend, die durch 2) dargestellt sind:

„Durch die Gleichungen

$$\vartheta''(u-e)=0 \text{ bei beliebigem } e_1 \mid e_2$$

„werden auf der Cyklide ∞^2 Curven 8ter Ordnung mit Doppelpunkt „dargestellt, die angesehen werden können als Berührungsschnitt mit „Minimallinienflächen 8ter Ordnung, die den Kugelkreis 4fach ent„halten und eine der beiden im Doppelpunkt die Cyklide berühren„den Minimalgeraden als Leitlinie besitzen".

Schlusscapitel.

Beziehungen zwischen Kummer'schen Flächen und Flächen 2ten Grades.

Uebertragen wir die Ergebnisse des letzten Capitels im ersten Teil auf den Raum des linearen Complexes, so erhalten wir hier an Stelle der doppeltberührenden Kreise an 2 Flächen des confocalen Systems Hyperboloide, welche 2 Erzeugende derselben Art enthalten, die Doppeltangenten der einen Kummer'schen Fläche, und 2 weitere Erzeugende derselben Art, die Doppeltangenten der andern Kummer-schen Fläche der Schaar [39]) sind, Hyperboloide berühren die Kummer'schen Flächen also in je 4 Punkten. Die Erzeugenden der andern Art der Hyperboloide entsprechen zu je zweien den Kugeln des durch den Bildkreis bestimmten Büschels; den beiden Punktkugeln des Büschels entsprechen (die) 2 $x_6=0$ angehörigen Erzeugenden.

Wählen wir 2 Kummer'sche Flächen der Schaar mit den Parametern λ_0 und μ_0 willkürlich heraus und überdies ein Geradenpaar, das $x_6=0$ angehört und conjugirt in Bezug auf einen andern der Fundamentalcomplexe ist, so lassen sich durch dieses Geradenpaar 4 Hyperboloide legen, welche die gewünschte Eigenschaft besitzen, mit jeder der Kummer'schen Flächen 2 Doppeltangenten gemein zu haben und auf jeder derselben die Kummer'sche Fläche 2mal zu berühren. Durch ein Doppeltangentenpaar $x_6=0$ auf einer der beiden Kummer'schen Flächen selbst, das conjugirt ist in Bezug auf einen der andern 5 Complexe, lassen sich noch 2 Hyperboloide der verlangten Art legen.

Wir haben demnach auf einem solchen Hyperboloide 2 Geraden der ersten Erzeugung. Die $x_i=0$ ($i=1, 2, 3, 4$ od. 5) und 2 Ge-

---

39) Die Kummer'schen Flächen der Schaar berühren sich längs der ausgezeichn. Haupttang. 8. Ord.

rade der 2ten Erzeugung, die $x_6 = 0$ angehören. Die übrigen Geraden der letzten Erzeugung gruppiren sich zu je zweien zu denselben als Doppelelementen einer Involution; entsprechend der Involution des Kugelbüschels mit den Punktkugeln als Doppelelementen. Eine Kugel des Büschels wird zur Ebene; ihr entsprechen die beiden conjugirten Erzeugenden, die die Fundamentalgerade treffen. Die Fundamentalgerade wird noch von 2 Erzeugenden der andern Art geschnitten; letztere entsprechen den Kreispunkten des Ausgangskreises.

Wir haben jetzt im Raum des Complexes $x_6 = 0$, indem wir noch einen der übrigen Fundamentalcomplexe $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$ oder 5) herausgreifen[40]), eine Darstellung der Geradenpaare, jeweils conjugirt in Bezug auf diesen 2ten Fundamentalcomplex, durch 3 Parameter λ, μ, ν, wo

$$a_1 > \nu > a_2, \quad a_2 > \mu > a_3, \quad a_3 > \lambda > a_4.$$

Einem Werttripel λ, μ, ν gehören 8 Geradenpaare an, welche die 3 Kummer'schen Flächen der Schaar, entsprechend den 3 Parametern λ, μ, ν als gemeinschaftliche Doppeltangenten besitzen (cf. p. 235).

Die ∞^2 Schaar von Hyperboloiden wird alsdann analytisch definirt durch die simultanen Differentialgleichungen

$$1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{\Lambda} - \dfrac{d\mu}{M} + \dfrac{d\nu}{N} = 0 \\[2ex] \dfrac{\lambda d\lambda}{\Lambda} - \dfrac{\mu d\mu}{M} + \dfrac{\nu d\nu}{N} = 0 \end{cases}$$

wo Λ, M, N die Werte 3) p. 210. besitzen und $\frac{d\lambda}{\Lambda}$, $\frac{d\mu}{M}$, $\frac{d\nu}{N}$ sämtlich dasselbe Vorzeichen besitzen. Um nur mit reellen Grössen tun zu haben, lassen wir wiederum die Ungleichungen bestehen

$$2) \qquad a_1 > \nu > a_2, \quad \mu_0 > \mu > a_3, \quad \lambda_0 > \lambda > a_4.$$

Der Uebergang von einem Complexgeradenpaar λ, μ, ν zu einem benachbarten $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ giebt uns alsdann eins der 4 in Redestehenden Hyperboloide, wenn dabei die Gleichungen 1) erfüllt werden. Die 4 Hyperboloide sind von einander unterschieden durch die Vorzeichen der Verhältnisse der Wurzelfunctionen Λ, M, N.

Betrachten wir jetzt ein einzelnes der 4 Hyperboloide. Wir lassen das Erzeugendenpaar $(\lambda \mu \nu)$ — wir wollen es (LL') nennen —

40) Wir wollen $x_5 = 0$ auszeichnen.

längs des ganzen Hyperboloids hinlaufen; es werden sich dann die den successiven Erzeugendenpaaren zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, N stetig ändern und ihre Vorzeichen nur mit resp. $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ zusammen ändern, d. h. in den Erzeugendenpaaren resp. $\lambda = a_4$, $\lambda = \lambda_0$; $\mu = a_3$, $\mu = \mu_0$; $\nu = a_2$, $\nu = a_1$; jede Wurzelfunction ändert also ihr Vorzeichen 2mal auf jeder Hälfte des Hyperboloids [41]).

Geht man von dem Geradenpaar $(LL') = (\lambda\,\mu\,\nu)$ bis zu dem Geradenpaare $(L_0 L_0') = (\lambda_0\,\mu'\alpha')$, das Doppeltangentenpaar an die Kummer'sche Fläche λ_0 ist, so ergeben die Differentialgleichungen 1):

$$3)\quad \int\limits_{\nu N}^{\nu' N'} \frac{\nu^{k-1} d\nu}{N} - \int\limits_{\mu M}^{\mu' M'} \frac{\mu^{k-1} d\mu}{M} \int\limits_{\lambda \Lambda}^{\lambda_0 1 0} \frac{\lambda^{\varkappa-1} d\lambda}{\Lambda} = 0 \quad k = 1,\ 2$$

oder

$$4)\quad \int\limits_{a_2}^{\nu N} \frac{\nu^{k-1} d\nu}{N} - \int\limits_{a_3}^{\mu M} \frac{\mu^{k-1} d\mu}{M} + \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_1 \Lambda} \frac{\lambda^{k-1} d\lambda}{\Lambda}$$

$$= \int\limits_{a_2}^{\nu' N'} \frac{\nu^{k-1} d\nu}{N} - \int\limits_{a_3}^{\mu' M'} \frac{\mu^{k-1} d\mu}{M} \quad k = 1,\ 2$$

als Relationen zwischen den Coordinaten $(\nu'\mu')$ der Berührungsdoppeltangente $(L_0 L_0')$ einer der 4 vom Geradenpaar (LL') an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 gehenden Doppelberührungshyperboloide und den Coordinaten $\lambda\mu\nu$ von (LL').

Nun können wir endlich auch Schliessungssätze aufstellen für Gebilde — den Polygonen entsprechend — die aus Teilen von Hyperboloiden zusammen gesetzt sind, welche zu der betrachteten ∞^2 Schaar gehören, Gebilde also, die den Flächen λ_0 und μ_0 umschrieben sind, und ausserdem einer Fläche der Schaar einbeschrieben sein mögen.

Man gelangt zu einem solchen aus Hyperboloidteilen bestehenden Gebilde, indem man von einem Doppeltangentenpaare, conjugirt in Bezug auf $x_5 = 0$ der Kummer'schen Fläche λ ausgeht und, eins der hindurch gehenden 4 Hyperboloide der Schaar beliebig herausgreifend, auf demselben von Erzeugender zur Erzeugender fortschreitet, bis man wiederum zu einem Erzeugendenpaare gelangt, das der Fläche

41) Das Hyperboloid wird durch die 2 $x_5 = 0$ angehörigen Erzeugenden in 2 Hälften geteilt.

λ angehört. Jetzt verlassen wir das Ausgangshyperboloid und gehen auf dem in Bezug auf λ conjugirten Hyperboloid weiter, für welches $\varLambda$ das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Bleibt diese Festsetzung auch für alle späteren Schnitte mit der Fläche λ bestehen, so ist dadurch unsere Construction eindeutig bestimmt, nachdem Anfangserzeugendenpaar und Anfangsfläche gegeben sind.

Neben dem einen Polygon (im übertragenen Sinne) erhalten wir ein 2tes conjugirtes, dessen Kanten ebenfalls auf λ liegen, aber das vom ersten durch die Congruenz $x_4 = 0$ $x_6 = 0$ geschieden ist. Auch jetzt ist zu bemerken, dass wir im allgemeinsten Falle nicht 2, sondern ein einziges Polygon erhalten würden mit der doppelten Kantenzahl, welches die Congruenz $x_4 = 0$, $x_6 = 0$ durchsetzt.

Soll die Polygonconstruction sich schliessen, also Endkante mit Anfangskante zusammenfallen, und das letzte Hyperboloid mit dem ersten conjugirt in Bezug auf λ sein, so muss die Bedingung bestehen:

$$5)\qquad 2e\int\limits_{\lambda\varLambda}^{\lambda_0}\frac{\lambda^{k-1}d\lambda}{\varLambda}-4m\int\limits_{a_3}^{\mu_0}\frac{\mu^{k-1}d\mu}{M}+4n\int\limits_{0|2}^{a_1}\frac{\nu^{k-1}d\nu}{N}.$$

Inhaltsübersicht.



XI.

Ueber einen Satz der Zahlentheorie.

Von

Herrn **F. Gomes-Teixeira,**

Professor an der Universität Coimbra.

In einer Note, publicirt in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome XCIII, hat Herr Weill gezeigt, dass

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(a!)^{\alpha}(b!)^{\beta}\ldots(h!)^{\lambda}}$$

eine ganze Zahl ist, wofern

$$n = a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots h\lambda$$

Er beweist diesen Satz, indem er zeigt, dass obiger Ausdruck die Anzahl der Arten darstellt, auf welche man aus n Buchstaben eine Zusammenstellung von a Gruppen zu α Buchstaben, b Gruppen zu β Buchstaben, c Gruppen zu γ Buchstaben u. s. w. bilden kann.

Wir werden sehen, dass man diesen Satz mit Hülfe der Theorie der Derivirten beliebiger Ordnung begründen kann, ein Verfahren, welches die Bedeutung hat, dass es einen Platz zwischen zwei Doctrinen, der Combinatorik und der Lehre von den höhern Derivirten, aufstellt.

Betrachten wir die 2 Functionen

$$u = f(y), \quad y = \varphi(x)$$

Die successive Diffe h x gibt, wie leicht zu sehen, das Resultat:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \Sigma A u^{(i)} (y')^\alpha (y'')^\beta \dots (y^{(n)})^\lambda$$

wo A eine ganze Zahl ist.

Um den Satz in aller Allgemeinheit zu beweisen, betrachten wir die Functionen

$$u = f(y_1, y_2, \dots y_l)\,;\ y_1 = \varphi_1(x)\,;\ y_2 = \varphi_2(x)\,;\dots\ y_l = \varphi_l(x)$$

In unserm Artikel — über die Derivirten beliebiger Ordnung, publicirt im XVIII. Bande des Giornale di Battaglini, haben wir gezeigt, dass die Derivirte $n$ter Ordnung von u nach x durch die Formel gegeben ist:

$$u^{(n)} = \Sigma A \frac{\partial^m f}{\partial u_1{}^\alpha, \partial y_2{}^\beta \dots} (u_1')^\alpha (u_1'')^\beta \dots (u_2')^{\alpha'} (u_2'')^{\beta'} \dots$$

wo A eine ganze Zahl und durch die Formel ausgedrückt ist:

$$A = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda! \times \alpha'!\,\beta'!\dots\lambda'! \times \dots \times (2!)^{\beta+\beta'+\dots}(3'!)^{\gamma+\gamma'\dots}\dots(n!)^{\lambda+\lambda'+\dots}}$$

wo

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + 3\gamma' + \dots + n\lambda' + \dots = n$$

Der Satz ist hiernach vollständig bewiesen.

Aus dem eben Gesagten schliesst man, dass ein Band besteht zwischen den Coefficienten im analytischen Ausdruck der Derivirten $n$ter Ordnung und der Anzahl der Combinationen von n Buchstaben; und so ergibt ein beliebiger Satz aus der einen Doctrin einen entsprechenden Satz der andern, und die mit der einen verknüpften Gegenstände sind es auch mit der andern.

So sind z. B. die Bernoulli'schen Zahlen, gemäss ihrem Ausdruck

$$B_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{2^{2n} - 1} y_0{}^{(2n-1)}$$

wo $y_0{}^{(2n-1)}$ die $(2n-1)$te Derivirte der Function

$$y = (1 + e^x)^{-1}$$

für $x = 0$ darstellt, verknüpft mit den in Rede stehenden Coefficienten A mittelst der folgenden Formel:

$$B_{2n-1} = \frac{(2n)!}{2^{2n} - 1} \cdot \Sigma \frac{(-1)^{i+n}\, i!}{2^{i+1}\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda}$$

wo

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots (2n-1)\lambda = 2^n - 1$$

Um die Bedeutung der Zusammenstellung der Theorie der Derivirten beliebiger Ordnung mit den Combinationen ans Licht zu stellen, wollen wir einen Satz der Theorie der Derivirten herleiten.

Zu diesem Zwecke wollen wir zuerst mittelst einer Derivirten $n$ter Ordnung den Ausdruck der Summe der Coefficienten A suchen, für welche $\alpha + \beta + \ldots + \lambda$ einen bestimmten Wert i hat.

Setzt man $u = y^i$ in der Formel

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \Sigma A u^{(i)} (y')^{\alpha} (y'')^{\beta} \ldots (y^{(n)})^{\lambda}$$

so werden alle Terme von der Ordnung i an null, weil man hat:

$$u^{(i)} = i!, \quad u^{(i+1)} = u^{(i+2)} = \ldots = 0$$

Macht man nachher $y = e^x - 1$ und $x = 0$, so erhält man gesondert den Term $i$ter Ordnung, weil $y = 0$, $y' = 1$, $y'' = 1$, etc., folglich

$$u = 0, \quad u' = 0, \quad u'' = 0, \quad \ldots u^{(i-1)} = 0$$

Wir haben also

$$\Sigma' A = \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial^n (e^x - 1)^i}{\partial x^n} \right)_{x=0}$$

wo Σ' die Summe der Werte von A darstellt, welche den Lösungen der Gleichungen

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + h\lambda = n; \quad \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = i$$

in positiven ganzen Zahlen entsprechen. Dafür kann man schreiben:

$$i + \beta + 2\gamma + \ldots (h-1)\lambda = 0$$

Andrerseits haben wir in Anwendung der Leibnitz'schen Formel:

$$\frac{\partial^n (e^x - 1)^i}{\partial x^n} = \left[(e^x - 1)(e^x - 1) \ldots \right]^{(n)}$$
$$= S \frac{n!\, e^{(i-\mu)x} (e^x - 1)^{\mu}}{h_1!\, h_2! \ldots h_i!}$$

wo die h alle ganzen Zahlen von 0 bis n zu durchlaufen haben, für welche

$$h_1 + h_2 + \ldots h_i = n \qquad (1)$$

ist, und wo μ die Anzahl der h bezeichnet, welche $= 0$ sind, und folglich

$$\left[\frac{\partial^n (e^x - 1)^i}{\partial x^n} \right]_{x=0} = S \frac{n!}{h_1!\, h_2! \ldots h_i!}$$

wo die h unter der Beschränkung (1) von 1 bis n variiren. Wir haben also:

$$\Sigma' \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(h!)^{\lambda}} = \frac{1}{i!} S \frac{n!}{h_1!h_2!\ldots h_i!}$$

Bezeichnet man nun durch $\varphi(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)$ die Anzahl der Arten, auf welche man mit der Bedingung

$$n = a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots$$

eine Zusammenstellung von a Gruppen zu α, b Gruppen zu β, c Gruppen zu γ Buchstaben u. s. w. bilden kann, so haben wir folgenden Satz:

$$\Sigma\varphi[i+\beta+2\gamma+\ldots+(n-1)\alpha] = \Sigma\varphi(h_1+h_2+\ldots+h_i)$$

das heisst:

„Die Summe aller Anzahlen von Arten, auf welche man, nach „Zerlegung von n auf alle mögliche Arten in $i+\beta+2\gamma+\ldots(n-1)\lambda$, „Zusammenstellungen von i Buchstaben, β Buchstaben, 2 Gruppen zu „γ Buchstaben u. s. w. bilden kann, ist gleich der Summe, welche der Zer-„legung von n auf alle möglichen Arten in $h_1+h_2+\ldots+h_i$ entspricht."

Zum Schluss dieses Artikels geben wir noch den Ausdruck von ΣA mittelst der Derivirten beliebiger Ordnung. Setzt man zu diesem Zwecke $u=e^y$ $y=e^x-1$, so hat man:

$$u^{(i)}=e^y,\quad u_0^{(i)}=1,\quad y_0=0,\quad y_0'=1,\quad y_0''=1, \text{ etc.}$$

und folglich

$$\Sigma A = \left[\frac{\partial^n(e^{e^x-1})}{\partial x^n}\right]_{x=0}$$

Porto, den 6. Januar 1885.

XII.

Zum Molins'schen Problem.

Von

R. Hoppe.

In den Mémoires de l'Acad. des sc., inscr. et b. l. de Toulouse. T. V. hat H. Molins die Aufgabe gestellt und gelöst: in voller Allgemeinheit diejenige Curve in Coordinaten darzustellen, von welcher der Radius der osculirenden Kugel gegebene Function des Krümmungsradius ist. Ohne in den wesentlichen Bestandteilen der Herleitung etwas abzuändern, nehme ich die Aufgabe noch einmal auf, um diese Bestandteile in einfachern Zusammenhang zu bringen, die teilweise Zuziehung geometrischer Betrachtungen, welche dem Einblick keinerweise dienlich ist, durch gleichmässig fortschreitende Rechnung zu ersetzen und zu zeigen, dass der Weg der Lösung, welcher in vorliegender Darstellung durchweg als Invention erscheint, aus der Aufgabe und der ergänzenden willkürlichen Bestimmung sichtlich hervorgeht.

Da zur Bestimmung einer Curve 2 Relationen notwendig sind, die Aufgabe aber nur eine liefert, so muss die allgemeine Lösung eine willkürliche Function enthalten. Es steht uns frei diese von Anfang festzusetzen. Molins hat das Krümmungsverhältniss zur willkürlichen Function des einen Richtungswinkels der Tangente gemacht; letzterer tritt dann als unabhängige Variable im Ausdruck der Curve auf. Wir behalten diese Wahl bei, führen jedoch die ergänzende Relation erst nach erster Integration ein; denn es ist bemerkenswert, dass sich eine solche schon unabhängig davon vollziehen lässt, was bei der Molins'schen Integrationsweise nicht ans Licht kommt.

Die Coordinaten eines Punktes der Curve s seien x, y, z, die Richtungscosinus der Tangente f, g, h, der Hauptnormale f', g', h', der Binormale l, m, n, der Contingenzwinkel der Tangente $\partial\tau$, der Schmiegungsebene $\partial\vartheta$, der Accent bezeichne die Differentiation nach τ

Der Krümmungsradius ist hiernach $= s'$. Der Radius der osculirenden Kugel, d. h. derjenigen Kugel, welche durch 4 consecutive Punkte geht, hat, wie bekannt, den Ausdruck:

$$\pi = \sqrt{s'^2 + \left(\frac{\partial s'}{\partial\vartheta}\right)^2} \tag{1}$$

woraus:

$$\partial\vartheta = \frac{\partial s'}{\sqrt{\pi^2 - s'^2}} \tag{2}$$

Der Aufgabe gemäss soll nun π gegebene Function von s' sein. Gl. (2) zeigt, dass dann auch der Torsionswinkel ϑ bekannte Function von s' ist.

Jetzt führen wir ϑ' als willkürliche Function von f ein. Aus dieser Relation allein geht mit Beachtung, dass $\partial l = -f'\partial\vartheta$ ist, hervor:

$$l = -\int f'\partial\vartheta = -\int \vartheta'\partial f$$

Nun ist

$$f^2 + f'^2 + l^2 = 1$$

folglich

$$f' = \sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}$$

oder

$$\partial\tau = \frac{\partial f}{\sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}} \tag{3}$$

oder

$$\partial\vartheta = \frac{\vartheta'\partial f}{\sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}} \tag{4}$$

Dies identificirt mit (2) gibt zwischen s' und f die Relation:

$$\int \frac{\partial s'}{\sqrt{\pi^2 - s'^2}} = \int \frac{\partial\vartheta'\partial f}{\sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}} \tag{5}$$

Was übrig bleibt, ist eine bekannte Aufgabe. Aus f, f', l findet man g, h, indem man setzt:

$$f = \cos\zeta; \quad g = \sin\zeta\cos\eta; \quad h = \sin\zeta\sin\eta \tag{6}$$

woraus durch Differentiation:

$$g' = \zeta'\cos\zeta\cos\eta - \eta'\sin\zeta\sin\eta$$
$$h' = \zeta'\cos\zeta\sin\eta + \eta'\sin\zeta\cos\eta$$

und in Verbindung mit (6):

$$l = \begin{vmatrix} gg' \\ hh' \end{vmatrix} = \eta' \sin^2 \zeta = \eta'(1 - f^2)$$

ithin

$$\eta = \int \frac{l \partial \tau}{1 - f^2} = -\int \frac{\partial \tau \int \vartheta' \partial f}{1 - f^2} \tag{7}$$

Da nun ausserdem $\partial s = s' \partial \tau$ bekannt ist, so hat man nach (6):

$$\left. \begin{aligned} x = \int f s' \partial \tau; \quad y &= \int s' \partial \tau \sqrt{1 - f^2} \cos \eta \\ z &= \int s' \partial \tau \sqrt{1 - f^2} \sin \eta \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

o s' durch Gl. (5), $\partial \tau$ durch Gl. (3), η durch Gl. (7) als Function on f bestimmt ist.

Nach Einsetzung der Werte (3) von $\partial \tau$ und (6) von f erhält man lie Formeln übereinstimmend mit den Resultaten von Molins.

Die Vergleichung beider Behandlungsweisen liefert eine neue Bestätigung der Regel, welche ich in meiner analytischen Curventheorie über das Verfahren bei der Lösung und Untersuchung curventheoretischer Probleme aufgestellt habe. Die Curventheorie gestattet eine Sonderung aller Linear- und Richtungsgrössen derart, dass die Fragen nach den letzteren unabhängig von erstern zur Entscheidung gebracht werden können. Die Lösung der so vereinfachten Aufgabe iegt öfters unmittelbar zutage, und die restirende Einführung der Lineargrösse ∂s bietet nachher gewöhnlich auch keine Schwierigkeit, ndernfalls wird man meistens leicht finden, von welcher nicht integraeln Gleichung die Lösung abhängt; während es bei Complication von inear- und Richtungsgrössen als eine Sache glücklicher Speculation scheint, wenn eine Lösung gefunden wird, und bis dies gelungen , die Lösbarkeit ungewiss bleibt.

In der Tat ist bei der von Molins gewählten ergänzenden Reion das Gelingen dadurch bedingt, dass sie frei von Lineargrössen Diese Eigenschaft bleibt aber unbeachtet, wenn man, wie er es statt $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$ schreibt $\frac{\varrho}{r}$ wo $\varrho = \frac{\partial s}{\partial \tau}$, $r = \frac{\partial s}{\partial \vartheta}$, also das Linienelement eine Relation einführt, die nichts damit zu tun hat.

Knüpfen wir jetzt, mit Absehen von der Molins'schen Lösung, orientirenden Gesichtspunkte an die Aufgabe selbst, so ist untelbar gegeben eine Differentialgleichung zwischen einer Richtungssse ϑ und einer Lineargrösse s', welche sofort eine Trennung der iabeln zulässt, so dass sie ϑ zur bekannten Function von s' macht. bezeichne, um ein kurzes Wort dafür zu haben, mit „Richtungsssen" unter den Bestimmungsgrössen einer Curve diejenigen, welche

reine Zahlen sind, zum Unterschied von den „Lineargrössen", welche die Linieneinheit zum Factor haben.

Es handelt sich nun um die Wahl der zweiten Relation. Bedingung für dieselbe ist allein, dass sich aus den zwei in Beziehung gesetzten Variabeln die übrigen Bestimmungsstücke, namentlich aber f, g, h finden lassen. Der obigen Regel gemäss muss die Frage über die Richtungsgrössen entschieden sein, ehe die gegebene Relation in Anwendung kommt. Dazu ist die zweite Relation allein nur ausreichend, wenn sie keine Lineargrössen enthält.

Unter den genannten Richtungsgrössen, nämlich den 9 Richtungscosinus, τ, ϑ und deren Differentialquotienten gibt es zahlreiche Combinationen, welche der Bedingung entsprechen. Wir können daher noch weitere Zwecke mit der Auswahl verbinden. Zunächst ist es gewiss wünschenswert den Uebelstand zu vermeiden, welchen die Gl. (5) zeigt, dass sie nämlich auf beiden Seiten allgemeine Functionen enthält, sich daher nach keiner Seite auflösen lässt, so dass die Resultate nicht explicit aufgestellt werden können. Dies geschieht offenbar, indem wir ϑ zur einen, und zwar unabhängigen Variabeln nehmen. Die zweite Variable kann dann ein Richtungscosinus der Hauptnormale oder Binormale sein, während der der Tangente (desgl. die Grösse τ) unlösbare Differentialgleichungen herbeiführen würde. Die Rechnung mit der Binormale ist die einfachere; sei daher l willkürliche Function von ϑ. Dann hat man:

$$f' = -\frac{\partial l}{\partial \vartheta}; \quad f = \sqrt{1 - l^2 - \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2} \tag{9}$$

$$\partial \tau = \frac{\left(l + \frac{\partial^2 l}{\partial \vartheta^2}\right) \partial \vartheta}{\sqrt{1 - l^2 - \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2}} \tag{10}$$

$$\eta = \int \frac{l + \frac{\partial^2 l}{\partial \vartheta^2}}{l + \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2} \frac{l \partial \vartheta}{\sqrt{1 - l^2 - \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2}} \tag{11}$$

$$g = \cos \eta \sqrt{l^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2}; \quad h = \sin \eta \sqrt{l^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2} \tag{12}$$

$$x = \int f s' \partial \tau; \quad y = \int g s' \partial \tau; \quad z = \int h s' \partial \tau \tag{13}$$

Setzt man nun $l = \varphi(\vartheta)$ und zur Vereinfachung

$$\pi = \frac{s'}{\sin \varkappa}$$

wo also $\varkappa$ gegebene Function von s ist, so wird

$$l = \varphi\left(\int \frac{\partial s' \operatorname{tg} \varkappa}{s'}\right); \quad \frac{\partial l}{\partial \vartheta} = \varphi'\left(\int \frac{\partial s' \operatorname{tg} \varkappa}{s'}\right); \quad \frac{\partial^2 l}{\partial \vartheta^2} = \varphi''\left(\int \frac{\partial s' \operatorname{tg} \varkappa}{s'}\right)$$

$$\partial \vartheta = \frac{\partial s' \operatorname{tg} \varkappa}{s'} \tag{14}$$

und man braucht nur erst in den Gleichungen (9) (10) (11) (12) die letzt genannten 4 Werte (14), überdies in (12) den Wert (11) von η und in (13) die Werte (9) (12) von f, g, h und den Wert (10) von $\partial \tau$ einzusetzen, um x, y, z explicit in s' ausgedrückt zu finden. Gleichzeitig ergibt sich der Bogen:

$$s = \int s' d\tau$$

In Betreff der geometrischen Bedeutung der vorkommenden Grössen mag erwähnt werden, dass der Mittelpunkt der osculirenden Kugel der Coincidenzpunkt der Krümmungsaxe ist. Demnach wird π durch die Verbindungsgerade der entsprechenden Punkte der Urcurve und der Einhüllenden ihrer Krümmungsaxe dargestellt. In dieser Lage ist π die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten in der Hauptnormale und Krümmungsaxe liegen, so dass der Krümmungsmittelpunkt den Scheitel des rechten Winkels bildet, und $\varkappa$ den Winkel zwischen der Verbindungsgeraden und der Krümmungsaxe bezeichnet.

XIII.

Bewegung eines senkrecht empor geworfenen Körpers.

Von

R. Hoppe.

Zu den Versuchen, welche die Axendrehung der Erde beweisen können, gehört offenbar auch der folgende. Ein senkrecht empor geworfener Körper muss (wenn keine zufälligen Störungen vorhanden sind) relativ zur Erde hinter deren Rotation zurückbleiben, also weiter westlich, und weiter nach dem Aequator zu den Erdboden wiedererreichen. Es wird erzählt, dass vor längerer Zeit einmal zur Beobachtung dieses Erfolges eine Kanone in verticaler Richtung abgeschlossen worden sei, dass man aber das Geschoss nicht wiedergesehen habe. Eine Berechnung des theoretischen Ergebnisses scheint nicht stattgefunden zu haben, obwol daraus erst zu ersehen gewesen wäre, welche (weit geringere) Schussgeschindigkeit für den Zweck am förderlichsten sein würde.

Im folgenden will ich die Berechnung unter den vereinfachenden Annahmen ausführen, dass die Erde eine homogene Kugel sei, und kein Luftwiderstand stattfinde. Auf diesen einfachen Fall sind wir nämlich beschränkt, wenn wir in geschlossenen Ausdrücken rechnen wollen, und können von diesen Ausdrücken als Hauptwerten ausgehen, um dann die Abplattung der Erde und den Luftwiderstand als Correction zu berücksichtigen.

Der Mittelpunkt der Erde, einer Kugel vom Radius c, sei Anfang der im Raume festen xyz, die Rotationsaxe Axe der x, in der

xy Ebene liege der Ausgangspunkt P des Wurfes in der Breite β; die z seien positiv nach Osten. Ferner sei g die Anziehung der Erde auf die Masseneinheit in ihrer Oberfläche und r der Radiusvector des geworfenen Körpers, α die Rotationsgeschwindigkeit. Dann ist dessen Bewegung bestimmt durch drei beliebige der 4 Gleichungen:

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2c^2 g}{r} - \kappa^2 \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y\partial z - z\partial y}{\partial t} &= A \\ \frac{z\partial x - x\partial z}{\partial t} &= B \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\frac{x\partial y - y\partial x}{\partial t} = C \tag{3}$$

und durch die Anfangswerte, welche durch den Index 0 ausgedrückt seien.

Im Anfang ist

$$r_0 = c; \quad x_0 = c\sin\beta; \quad y_0 = c\cos\beta; \quad z_0 = 0$$

Die Anfangsgeschwindigkeit setzt sich zusammen aus der verticalen Wurfgeschwindigkeit p und der Geschwindigkeit von P in der z Richtung. Ihre Componenten sind also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_0 = p\sin\beta; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_0 = p\cos\beta; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 = \alpha c\cos\beta$$

Demnach wird Gl. (3):

$$x\partial y - y\partial x = 0$$

woraus:

$$\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} = \cot\beta \tag{4}$$

Hiermit werden die Gl. (2) identisch und geben:

$$\frac{y\partial z - z\partial y}{\partial t} = \alpha c^2\cos^2\beta \tag{5}$$

Ist s ein Bogen der Bahn, so gibt Gl. (1):

$$\frac{\partial s^2}{\partial t^2} = \frac{2c^2 g}{r} - \kappa^2 \tag{6}$$

das ist im Anfang:

$$\ldots + \alpha^2 c^2\cos^2\beta = 2cg - \kappa^2 \tag{7}$$

ferner die Quadratsumme der Gl. (2) (3):

$$r^2 \frac{\partial s^2 - \partial r^2}{\partial t^2} = \alpha^2 c^4 \cos^2\beta \tag{8}$$

und nach Elimination von ∂s^2 durch Gl. (6):

$$\frac{r^2 \partial r^2}{\partial t^2} = -\varkappa^2 r^2 + 2c^2 gr - \alpha^2 c^4 \cos^2\beta \tag{9}$$

Sei nun

$$\sin\gamma = \frac{\alpha\varkappa}{g}\cos\beta \tag{10}$$

$$r = \frac{c^2 g}{\varkappa^2}(1 + \cos\gamma\cos\psi) \tag{11}$$

dann werden die Gl. (9) (5):

$$\left(\frac{r\partial r}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{c^2 g\cos\gamma\sin\psi}{\varkappa}\right)^2 \tag{12}$$

$$\frac{y\partial z - z\partial y}{\partial t} = \frac{c^2 g\sin\gamma\cos\beta}{\varkappa} \tag{13}$$

Nehmen wir im Anfang, wo r mit t wächst, $\sin\psi$ positiv, so wird nach Gl. (12) (11):

$$\partial t = -\frac{r\partial\psi}{\varkappa} = -\frac{c^2 g}{\varkappa^3}(1 + \cos\gamma\cos\psi)\partial\psi \tag{14}$$

integrirt:

$$t = \frac{c^2 g}{\varkappa^3}\{\psi_0 - \psi + \cos\gamma(\sin\psi_0 - \sin\psi)\} \tag{15}$$

und zwar ist nach Gl. (11)

$$\cos\gamma\cos\psi_0 = \frac{\varkappa^2}{cg} - 1 \tag{16}$$

Jetzt wird nach Gl. (7)

$$p^2 = -\varkappa^2 + 2cg - \frac{c^2 g^2}{\varkappa^2}\sin^2\gamma = \left(\frac{cg}{\varkappa}\cos\gamma\right)^2 - \left(\varkappa - \frac{cg}{\varkappa}\right)^2$$

$$= \left(\frac{cg}{\varkappa}\cos\gamma\sin\psi_0\right)^2$$

daher

$$\cos\gamma\sin\psi_0 = \frac{p\varkappa}{cg} \tag{17}$$

woraus sich der kleine Winkel ψ_0 besser bestimmt als aus Gl. (16).

Ferner ist mit Zuziehung von Gl. (4)

$$\left(\frac{y}{\cos\beta}\right)^2 + z^2 = r^2 \tag{18}$$

Hiermit Gl. (13) dividirt und mit Gl. (14) multiplicirt gibt:

$$\partial \operatorname{arc\,tg} \frac{z\cos\beta}{y} = -\frac{c^2 g \sin\gamma}{\varkappa^2}\frac{\partial\psi}{r} \tag{19}$$

Setzt man

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} \tag{20}$$

so erhält man nach Gl. (11):

$$\frac{\partial\psi}{r} = \frac{\varkappa^2}{c^2 g}\frac{\partial\psi}{1+\cos\gamma\cos\psi} = \frac{2\varkappa^2\partial\varphi}{c^2 g\sin\gamma}$$

und die Integration von Gl. (19) gibt:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{z\cos\beta}{y} = 2(\varphi_0 - \varphi) \tag{21}$$

Verbindet man hiermit die Gl. (18) (4), so findet man leicht:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\beta\cos 2(\varphi_0 - \varphi) \\ y &= r\cos\beta\cos 2(\varphi_0 - \varphi) \\ z &= r\sin 2(\varphi_0 - \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Sobald nun der geworfene Körper die Erdoberfläche wieder erreicht, wird $r = c$, daher nach Gl. (16), indem ψ beständig abnimmt, $\psi = -\psi_0$, und nach Gl. (20) $\varphi = -\varphi_0$, folglich

$$\left.\begin{aligned} x &= c\sin\beta\cos 4\varphi_0 \\ y &= c\cos\beta\cos 4\varphi_0 \\ z &= c\sin 4\varphi_0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Geht alsdann die Breite β über in $\beta - \beta'$, die Länge null in die westliche Länge λ, so ist gleichzeitig

$$\left.\begin{aligned} x &= c\sin(\beta - \beta') \\ y &= c\cos(\beta - \beta')\cos(\alpha t - \lambda) \\ z &= c\cos(\beta - \beta')\sin(\alpha t - \lambda) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

also

$$\operatorname{tg}(\alpha t - \lambda) = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi_0}{\cos\beta} \tag{25}$$

$$\sin(\beta - \beta') = \sin\beta\cos 4\varphi_0 \tag{26}$$

Nimmt man besonders grosse Werte, nämlich für p die von einer Kanone erzeugte Geschwindigkeit 500 Meter, und den Ausgangspunkt im Aequator, so werden die Grössen

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{\alpha^2 c \cos^2\beta}{g} = 0{,}0032283 \\ \nu &= \frac{p^2}{gc} = 0{,}0039988 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

in denen sich alle Grössen darstellen, noch immer klein genug zur schnellen Annäherung, wenn wir Reihen nach Potenzen derselben entwickeln.

Unmittelbar gibt Gl. (7):

$$\varkappa^2 = 2cg\left(1 - \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \tag{28}$$

woraus nach Gl. (10):

$$\sin\gamma = \sqrt{2\mu}\left\{1 - \frac{\mu+\nu}{4} - \frac{(\mu+\nu)^2}{32} - \ldots\right\}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\left(1 + \frac{\mu-\nu}{4} + \frac{3\mu^2 - 14\mu\nu - \nu^2}{32} + \ldots\right)$$

nach Gl. (17)

$$\cos\gamma\sin\psi_0 = \sqrt{2\nu}\left\{1 - \frac{\mu+\nu}{4} - \frac{(\mu+\nu)^2}{32} - \ldots\right\}$$

$$\sin\psi_0 = \sqrt{2\nu}\left(1 + \frac{3\mu-\nu}{4} + \frac{23\mu^2 - 26\mu\nu - \nu^2}{32} + \ldots\right)$$

$$\psi_0 = \sqrt{2\nu}\left(1 + \frac{3\mu}{4} + \frac{\nu}{12} + \frac{23\mu^2}{32} - \frac{\mu\nu}{16} + \frac{3\nu^2}{160} + \ldots\right)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2} = \sqrt{\frac{\nu}{2}}\left(1 + \frac{3\mu+\nu}{4} + \frac{23\mu^2 + 10\mu\nu + 3\nu^2}{32} + \ldots\right)$$

$$\psi_0 + \cos\gamma\sin\psi_0 = 2\sqrt{2\nu}\left(1 + \frac{\mu}{4} - \frac{\nu}{12} + \frac{11\mu^2}{32} - \frac{\mu\nu}{16} - \frac{\nu^2}{160} - \ldots\right)$$

dann nach Gl. (15), wo $\psi = -\psi_0$ zu setzen, mit Berücksichtigung, dass

$$\varkappa^{-3} = (2gc)^{-\frac{3}{2}}\left\{1 + 3\frac{\mu+\nu}{4} + \frac{15(\mu+\nu)}{32} + \ldots\right\}$$

ist:

$$\alpha t = \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{\cos\beta}\left(1+\mu+\frac{2\nu}{3}+\mu^2+\mu\nu+\frac{2\nu^2}{5}+\dots\right) \tag{29}$$

und nach Gl. (20):

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu\nu}\left(1+\mu+\mu^2-\frac{\mu\nu}{4}+\dots\right)$$

$$\operatorname{tg}4\varphi_0 = 2\sqrt{\mu\nu}(1+\mu+\mu^2+\mu\nu+\dots)$$

woraus nach Gl. (25):

$$\alpha t - \lambda = \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{\cos\beta}\left(1+\mu+\mu^2+\mu\nu-\frac{4\mu\nu}{3\cos^2\beta}+\dots\right)$$

Dies subtrahirt von (29) gibt:

$$\lambda = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{\mu\nu^3}}{\cos\beta}\left(1+\frac{2\mu}{\cos^2\beta}+\frac{3\nu}{5}+\dots\right)$$

Aus Gl. (24) findet man:

$$\beta' = 2\mu\nu\left(1+2\mu+3\mu^2-\frac{\mu\nu}{\cos^2\beta}+\dots\right)\operatorname{tg}\beta$$

das ist nach Substitution der Werte (27):

$$\lambda = \frac{4p^3\alpha}{3g^2c}\left(1+\frac{2\alpha^2c}{g}+\frac{3p^2}{4gc}+\dots\right)$$

$$\beta' = \frac{p^2\alpha^2\sin 2\beta}{g^2}\left(1+\frac{2\alpha^2c\cos^2\beta}{g}+\dots\right).$$

Der Hauptwert von β' ist in der Breite 45° am grössten. Nehmen wir diese durchgängig an, so dass

$$\log c = 6{,}80392;\quad \log g = 0{,}99149;\quad \log\alpha = 5{,}86285-10$$

und reduciren λ und β' durch Multiplication mit

$$\frac{10000\,000}{\mathrm{R}}$$

auf Meter, so kommt:

$$\lambda = 0{,}000\ 001\ 0180p^3(1+0{,}000\ 000\ 011\ 931p^2)$$
$$\beta' = 0{,}000\ 353\ 27p^2$$

das ist im obigen Beispiel $p = 500$:

$$\lambda = 127{,}63;\quad \beta' = 88{,}32;\quad \sqrt{\lambda^2+\beta'^2} = 155$$

In dieser Entfernung = 155 Meter hätte das Geschoss noch gesehen werden können, doch konnte es auch leicht der Beachtung entgehen, wenn die Richtu ng nicht vorher berechnet war. Aus λ und β' ergibt sich eine Richtung fast 35^0 von West nach Süd.

Die umgekehrte Aufgabe, aus der Entfernung

$$\delta = \sqrt{\lambda^2 + \beta'^2}$$

die Anfangsgeschwindigkeit zu berechnen, lässt sich nicht direct durch Reihenentwickelung lösen; doch kann man, da p Function von δ ist, eine Tafel darüber aufstellen. Man findet, wenn $\frac{\beta'}{\lambda} = \mathrm{tg}\,\zeta$:

δ	p	ζ
0,001	1,686	90^0
0,01	5,320	$89^0,12$
0,1	16,815	$87^0,23$
1	52,90	$81^0,33$
10	160,30	$65^0,21$
100	423,36	$39^0,29$
1000	971,17	$19_0',63$

Es liegt nahe, auch für beliebige Elevation die Abweichung der Geschosse vom Zielpunkte infolge der Erdrotation zu berechnen. Unter diesem Gesichtspunkt hat Biehringer in Schlömilch's Zeitschrift Bd. XXVIII. S. 157. die Frage behandelt. In beiden Fällen ist die absolute Bewegung geometrisch bekannt als Ellipse, um den Erdmittelpunkt als Brennpunkt beschrieben, also kein Problem zu lösen.

XIV.

Die Cono-Cunei.

Ein Beitrag zur Lehre von den geradlinigen Flächen.

Von

Dr. **Carl Pabst.**

I. Abschnitt.

Einleitung.

§ 1.

In den „Opera mathematica" von Joh. Wallis findet sich eine Abhandlung über einen Körper, welchen der Verfasser Cono-Cuneus nennt und den er, wie folgt, definirt: Super plana Basi, quae Circuli Quadrans erat (ut in Quadrantali Cono, vel Cylindro) erectum insistebat Solidum; cujus Altitudo (pro arbitrio sumenda) erat dupla Radii Quadrantis istius Circularis: Et a singulis Peripheriae Quadrantalis punctis, ductae ad verticem rectae, coibant, non in Puncto (ut in Apice Coni,) nec in Quadrante parallelo (ut in Quadrantali Cylindro,) sed in Linea recta, ut in acie Cunei. Quamobrem ei nomen feci Cono-Cunei; ut qui in Base Conum repraesentet; in Vertice, Cuneum[1]). Man kann diesen Körper gleichsam als eine Verallgemeinerung des Kegels ansehen, und sich denselben so aus diesem hervorgehen denken, dass die Spitze des Kegels in eine Gerade ausgezogen wird, bis alle erzeugenden Geraden einer gegebenen Ebene parallel sind.

Dieser Körper hat später die Veranlassung zu einer Gruppe von geradlinigen Flächen gegeben, welche die Einen Keilflächen, die

---

1) cf. J. Wallis: Opera mathematica. vol. II. pag. 681.

Anderen Conoidflächen nennen, und deren Entstehungsweise folgende ist: Gegeben ist eine Ebene, die Director-Ebene, eine auf dieser Ebene senkrecht stehende Gerade und eine ebene Curve, deren Ebene auf der Directorebene senkrecht steht. Eine gerade Linie bewegt sich längs dieser Curve so hin, dass sie stets der Directorebene parallel bleibt und durch die gegebene feste Gerade geht.

Unsere Aufgabe ist es, aus dieser Gruppe diejenigen Flächen zu untersuchen, deren Leitlinie ein Kegelschnitt ist, unter der näheren Voraussetzung, dass die singuläre Kante, durch welche alle erzeugenden Geraden gehen, einer Axe des Leitkegelschnitts parallel ist. Wir wollen die Flächen in Folgendem als Cono-Cunei bezeichnen, und zwar je nachdem der Leitkegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, als elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Cono-Cuneus.

Wie man nun gerade und schiefe Kegel unterscheidet, so können wir auch einen Unterschied zwischen geraden und schiefen Cono-Cuneis machen. Unter den geraden Cono-Cuneis verstehen wir dabei diejenigen, bei denen die Ebene, welche durch die singuläre Kante und durch die entsprechende Axe des Leitkegelschnittes geht, auf der Ebene des Leitkegelschnitts senkrecht steht Ist dies nicht der Fall, sondern bilden diese beiden Ebenen einen schiefen Winkel mit einander, so nennen wir diese Flächen schiefe Cono-Cunei. Von den letzteren wollen wir diejenigen etwas näher untersuchen, bei denen die Projection der singulären Kante auf die Leitkegelschnittebene mit einer Scheiteltangente des Leitkegelschnitts zusammenfällt und diese Flächen wollen wir als Scheitel-Cono-Cunei bezeichnen.

§ 2.

Jeder Kegelschnitt hat im Allgemeinen zwei aufeinander senkrecht stehende Axen. Es würden sich demnach 6 verschiedene gerade Cono-Cunei ergeben. Von diesen sind indessen, wie sich später zeigen wird, zunächst die beiden elliptischen identisch. Anders verhält es sich, wenn der Leitkegelschnitt eine Hyperbel ist. Wir wollen hierbei diejenige Fläche, welche entsteht, wenn die Projection der singulären Kante auf die Leithyperbelebene mit der reellen Axe der Leithyperbel zusammenfällt, den geteilten, und diejenige, bei welcher die Projection der singulären Kante in die imaginäre Axe der Leithyperbel fällt, den einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus nennen.

Was schliesslich die Parabel betrifft, so hat diese nur eine im Endlichen liegende Axe; die andere ist ins Unendliche gerückt. Be

chten wir zunächst, wie sich die Sache im letzteren Falle gestaltet, so folgt aus der Definition der geraden Cono-Cunei, dass die singuläre Kante der betreffenden Fläche ebenfalls im Unendlichen liegen muss. Um diesen Fall näher zu untersuchen, denken wir uns eine im Endlichen liegende, der Leitparabelebene parallele Gerade, deren Projection auf die Leitparabelebene auf der im Endlichen liegenden Axe der Parabel senkrecht steht, als singuläre Kante. Entfernt sich diese Gerade vom Scheitel der Parabel parallel der Parabelebene, so wird der Unterschied der Winkel, welche die einzelnen Erzeugenden mit der Parabelebene bilden, allmählich kleiner. Bei unendlicher Entfernung der singulären Kante von dem Parabelscheitel sind demnach die Erzeugenden einander parallel. Da nun das Verhältniss des Abstandes der singulären Kante von der Leitparabelebene zur Entfernung der zweiten Axe der Parabel von ihrem Scheitel gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels ist, welchen die Erzeugenden mit der Leitparabelebene bilden, so fallen die Erzeugenden in die Parabelebene, wenn der Abstand der singulären Kante von dieser Ebene eine endliche Grösse ist; denn alsdann ist das betrachtete Verhältniss unendlich klein. In den anderen Fällen erhält man einen parabolischen Cylinder, und zwar einen geraden oder einen schiefen, je nachdem das in Rede stehende Verhältniss unendlich gross oder eine endliche Grösse ist.

Hieraus folgt, dass sich keine neue Fläche ergiebt, wenn die singuläre Kante senkrecht über der im Unendlichen liegenden Axe der Leitparabel liegt. Einen wirklichen parabolischen Cono-Cuneus erhalten wir nur, wenn die Projection der singulären Kante auf die Leitparabelebene mit der im Endlichen liegenden Axe der Parabel zusammenfällt. Wir können diese Fläche daher kurz als den geraden parabolischen Cono-Cuneus bezeichnen.

§ 3.

Analoge Betrachtungen wie die obigen lassen sich über die Scheitel-Cono-Cunei anstellen. Wir haben auch hierbei im Allgemeinen 6 Flächen, deren Zahl sich aber ebenso wie bei den geraden Cono-Cuneis auf 4 reducirt. Denn erstlich giebt es nur einen elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus. Was dann die hyperbolischen betrifft, so wollen wir denjenigen, dessen singuläre Kante der imaginären Axe der Leithyperbel parallel ist, wobei also die Projection der singulären Kante auf die Leithyperbelebene mit der Tangente in einem reellen Scheitel der Hyperbel zusammenfällt, als den einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus bezeichnen. Die beiden anderen Scheitel der Hyperbel sind imaginär. Wir wollen

indessen diejenige Fläche, bei welcher die Projection der singulären Kante auf die Leithyperbelebene in einem Endpunkte der imaginären Axe auf dieser Axe senkrecht steht, den geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus nennen.

Für die parabolischen Scheitel-Cono-Cunei ergeben sich ähnliche Beziehungen wie für die geraden. Man erhält hierbei nur einen eigentlichen Cono-Cuneus, da es nur eine im Endlichen liegende Scheiteltangente der Parabel giebt. Wir können diesen mithin kurz den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus nennen. Der andere wird ebenso wie der betreffende gerade im Allgemeinen ein parabolischer Cylinder, mit dem einzigen Unterschiede, dass hier die Projectionen der Erzeugenden auf die Leitparabelebene auf der im Endlichen liegenden Axe der Parabel senkrecht stehen, während sie bei den anderen dieser Parabelaxe parallel waren.

Bemerkt sei schliesslich noch, dass die Kegelschnitte in speciellen Fällen zu geraden Linien degeneriren können. Alsdann erhält man im Allgemeinen die aus der analytischen Geometrie bekannten hyperbolischen Paraboloide.

Wir haben demnach folgende 8 Flächen zu betrachten:

1) den geraden elliptischen Cono-Cuneus
2) den geteilten } geraden hyperbolischen Cono-Cuneus
3) den einfachen } geraden hyperbolischen Cono-Cuneus
4) den geraden parabolischen Cono-Cuneus
5) den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus
6) den einfachen } hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus
7) den geteilten } hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus
8) den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus.

§ 4.

Bevor wir auf die Betrachtung der definirten Cono-Cunei eingehen, wollen wir allgemein die Gleichung der Flächen ableiten, deren Leitlinie durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \eta = f(\xi) \\ \zeta = c \end{cases}$$

dargestellt wird. Die Erzeugenden sollen der YZ-Ebene parallel sein und durch die X-Axe gehen. Dieselben müssen daher den Gleichungen genügen:

2) $$\begin{cases} x = v \\ y = u \cdot z \end{cases}$$

hierbei sind u und v beliebige Grössen, welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass die Erzeugenden die Leitlinie (1) schneiden, welche Bedingung darin besteht, dass die Coordinaten x, y, z den Gleichungen (1) genügen. Für dieselbe ergiebt sich demnach:

(3) $$c \cdot u = f(v)$$

Eliminirt man nun u und v aus den Gleichungen (2) und (3), so erhält man als Gleichung der gesuchten geradlinigen Fläche:

(4) $$cy = z \cdot f(x)$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass für den Fall, wo die Leitlinie der Gleichung:

5) $$y^n = f(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$$

genügt, wobei A_0, $A_1, \ldots A_m$ Constante bedeuten, die Fläche vom $m+n$)ten Grade ist. Hat die Leitlinie speciell die Gleichung:

6) $$y = f(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

o ist die vorgelegte Fläche vom $(m+1)$ten Grade.

§ 5.

An die Gleichung (4) wollen wir einige allgemeine Bemerkungen knüpfen. Schneiden wir zu diesem Zwecke die vorgelegte Fläche (4) durch die zur XY-Ebene parallele Ebene:

$$z = h,$$

so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Fläche (4) auf die XY-Ebene:

7) $$y = \frac{h}{c} f(x)$$

us der Vergleichung von (1) und (7) resultirt:

Die zur XY-Ebene parallelen Ebenen schneiden aus der vorlegten Fläche (4) Curven, deren Ordinaten für dasselbe x propornal dem Abstande der schneidenden Ebene von der XY-Ebene chsen. Für $z = h = 0$ degenerirt die ausgeschnittene Curve zur Achse, für $z = h = \infty$ besteht dieselbe aus so vielen zur Y-Achse rallelen Geraden, in wie viel Punkten die Leitlinie der Fläche (4) : XZ-Ebene schneidet.

Ferner erhält man für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene

$$y = k$$

mit der vorgelegten Fläche auf die XZ-Ebene:

(8) $$ck = z . f(x)$$

Daraus geht hervor, dass jede zur XZ-Ebene parallele Ebene die vorgelegte Fläche (4) im Allgemeinen in einer Curve schneidet, deren Grad gleich dem Grade der Fläche ist.

Um diese Curve genauer zu untersuchen, bilden wir:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{ck f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{ck\{f(x).f''(x) - [f'(x)]^2\}}{[f(x)]^3}$$

Hieraus ergeben sich die Relationen:

Die Tangenten in denjenigen Punkten der Durchschnittscurve (8), welche Punkten der Leitlinie der betreffenden Fläche entsprechen, in denen die Tangenten an die Leitlinie der XZ-Ebene parallel ist, sind der X-Axe parallel.

Die Durchschnittscurve (8) nähert sich asymptotisch den auf der X-Axe senkrecht stehenden Ebenen, welche durch die Durchschnittspunkte der Leitlinie mit der XZ-Ebene gehen.

Ist $k > 0$, so ist die Durchschnittscurve convex oder concav nach der X-Axe hin, je nachdem:

$$f(x).f''(x) - [f'(x)]^2 \lesseqgtr 0$$

ist. Wendepunkte kann diese Curve nur besitzen, wenn die Gleichung:

$$f(x).f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$$

reelle Werte für x liefert

Schliesslich folgt für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene

$$x = l$$

mit der Fläche (4) auf die YZ-Ebene:

(9) $$cy = z . f(l)$$

d. h. die zur Directorebene parallelen Ebenen schneiden aus der vorgelegten Fläche die Erzeugenden derselben aus.

§ 6.

Gehen wir nun zur **Tangentialebene** im Punkte xyz der ‑äche (4) über, so erhalten wir als Gleichung derselben, wenn ξ, η, ζ ‑ laufenden Coordinaten bedeuten:

$$zf'(x)(\xi - x) - c(\eta - y) + f(x)(\zeta - z) = 0$$

‑er mit Berücksichtigung der Gleichung (4):

$$zf'(x).\xi - c\eta + f(x).\zeta - xzf'(x) = 0 \quad \text{(10)}$$

Für $z = 0$ geht dieselbe über in:

$$c\eta - f(x).\zeta = 0$$

‑sselbe Resultat ergiebt sich für $f'(x) = 0$. Daraus fliesst der Satz: ‑e Tangentialebenen in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche ‑f der singulären Kante liegen, und in denjenigen, welche Punkten ‑r Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie der ‑Z-Ebene parallel ist, gehen durch die singuläre Kante.

Ausserdem resultirt hieraus, dass jede durch die singuläre Kante ‑ehende Ebene im Allgemeinen eine Tangentialebene der vorgelegten ‑läche ist.

Setzt man $f(x) = 0$, so erhält man aus der Gleichung (10):

$$zf'(x).\xi - c\eta - xzf'(x) = 0$$

Die Tangentialebenen in den Durchschnittspunkten der Fläche (4) mit der XZ-Ebene stehen demnach auf der XY-Ebene senkrecht. Ist zugleich $f'(x) = 0$, so resultirt: $\eta = 0$. D. h. die XZ-Ebene berührt die vorgelegte geradlinige Fläche (4) in allen Punkten derjenigen Erzeugenden, welche durch die Durchschnittspunkte der Leitlinie mit der XZ-Ebene gehen, in denen die Leitlinie die XZ-Ebene berührt.

Ist dagegen zugleich $f(x) = 0$ und $f'(x) = \infty$, so geht die Gleichung der Tangentialebene über in:

$$\xi - x = 0$$

Dasselbe Resultat erhalten wir aus der Gleichung (10) für $f'(x) = \infty$, gleichgültig welchen Wert $f(x)$ annimmt, vorausgesetzt dass es nicht selbst unendlich gross wird. Daraus fliesst der Satz: die Tangentialebenen in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche Punkten ihrer Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie auf der XZ-Ebene senkrecht steht, sind der Directorebene parallel.

Betrachten wir noch die Durchschnittscurve der Fläche (4) mit der Tangentialebene (10), so ergiebt sich für die Projection derselben auf die XZ-Ebene:

$$(11) \qquad zf'(x)(\xi - x) - [f(\xi) - f(x)]\zeta = 0$$

Angenommen, $f(x)$ genüge der Gleichung (6), dann ist $f(\xi) - f(x)$ durch $(\xi - x)$ ohne Rest teilbar. Die Gleichung (11) zerfällt demnach in die beiden Gleichungen:

$$(12) \qquad \begin{cases} \xi - x = 0 \\ zf'(x) - \dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\zeta = 0 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass die Tangentialebene aus der Fläche (4) $(m+1)$ten Grades im Allgemeinen die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende der Fläche und eine Curve $m$ten Grades ausschneidet. Aendert sich z, während x constant bleibt, so ändert sich damit die Curve $m$ten Grades; d. h. gleitet der Berührungspunkt der Tangentialebene auf der durch ihn gehenden erzeugenden Geraden der Fläche fort, so ändert sich die Tangentialebene. Daraus resultirt, dass die Tangentialebene die vorgelegte geradlinige Fläche im Allgemeinen nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben berührt.

Ausnahmen von diesem Satze finden für $f'(x) = 0$ und für $f'(x) = \infty$ statt; d. h. die Tangentialebene in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche Punkten ihrer Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie der XZ-Ebene parallel ist oder auf ihr senkrecht steht, berührt die Fläche längs der ganzen durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben.

Ist $f'(x) = 0$, so schneidet die Tangentialebene aus der Fläche (4) ausser der erzeugenden Geraden noch die X-Axe aus.

Hat die Leitlinie der vorgelegten Fläche die Gleichung (5), so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve der Tangentialebene mit der Fläche auf die XZ-Ebene:

(13)

$$\begin{cases} \xi - x = 0 \\ n^n [f(x)]^{n-1} \dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \zeta^n - z^n [f'(x)]^n (\xi - x)^{n-1} \\ - \dbinom{n}{1} n z^{n-1} f(x) [f'(x)]^{n-1} (\xi - x)^{n-2} . \zeta - \dots \\ \dots - \dbinom{n}{1} n^{n-1} z f'(x) [f(x)]^{n-1} \zeta^{n-1} = \end{cases}$$

Auch für diesen Fall gelten mithin die eben abgeleiteten Sätze.

§ 7.

Analoge Erwägungen wie im vorigen § lassen sich für die Normale im Punkte xyz der vorgelegten geradlinigen Fläche (4) durchführen. Die Gleichungen derselben sind, wenn x_1, y_1, z_1 die laufenden Coordinaten bedeuten:

(14) $$\frac{x_1 - x}{-zf'(x)} = \frac{y_1 - y}{c} = \frac{z_1 - z}{-f(x)}$$

Eliminiren wir y_1 und z_1 aus diesen Gleichungen und der Gleichung: $cy_1 = z_1 f(x_1)$, so erhalten wir für die Durchschnittspunkte der Normalen mit der Fläche (4):

$$[f(x).f(x_1) + c^2](x_1 - x) + z^2 f'(x)[f(x_1) - f(x)] = 0$$

Daraus folgt: Wenn $f(x)$ der Gleichung (6) genügt, so durchsticht die Normale die Fläche (4) $(m+1)$ten Grades im Allgemeinen in $(m+1)$ Punkten.

Nach dem analogen Verfahren wir bei der Tangentialebene ergeben sich folgende Sätze:

1) Die Normale in den Durchschnittspunkten der Fläche (4) mit der XZ-Ebene ist der XY-Ebene parallel und durchsticht die Fläche im Allgemeinen in m Punkten. Ist die Tangentialebene in diesen Punkten der Directorebene parallel, so giebt es m Durchschnittspunkte der Normale mit der Fläche, welche den m Durchschnittspunkten der Leitlinie mit der XZ-Ebene entsprechen.

2) Die Normale in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche Punkten ihrer Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie der XZ-Ebene parallel ist, ist der Directorebene parallel.

3) Die Normale in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche Punkten ihrer Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie auf der XZ-Ebene senkrecht steht, ist der singulären Kante parallel und trifft die Fläche im Allgemeinen in m Punkten.

Die analogen Resultate ergeben sich, wenn die Leitlinie der vorgelegten geradlinigen Fläche (4) der Gleichung (5) genügt.

§ 8.

Eine andere Eigenschaft der vorgelegten Fläche (4) ergiebt sich, wie folgt. Schneiden wir diese Fläche durch die zur Directorebene parallelen Ebenen $x = x_1$, $x = x_2$ und durch die zur XY-Ebene parallele Ebene $z = z_0$, so erhalten wir für das Volumen V, welches

von diesen Ebenen, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil der Fläche begrenzt wird:

$$V = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \int_{z=0}^{z=z_0} y\,dx\,dz = \frac{1}{c} \int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x).dx \int_{z=0}^{z=z_0} z dz$$

$$V = \frac{z_0^2}{2c} \int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x).dx$$

Wir wissen aber, dass die zur XY-Ebene parallele Ebene $z = z_0$ die vorgelegte geradlinige Fläche in der Curve: $cy = z_0 f(x)$ schneidet. Projiciren wir diese Curve auf die XY-Ebene, so resultirt für das Volumen V' zwischen den Ebenen $x = x_1$, $x = x_2$, $z = 0$, $z = z_0$ der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil der Cylinderfläche:

$$V' = z_0 \int_{x=x_1}^{x=x_2} y dx = \frac{z_0^2}{c} \int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x).dx$$

Aus den beiden erhaltenen Resultaten folgt:

(15) $$V : V' = 1 : 2$$

Die vorgelegte Fläche hat demnach die Eigenschaft, den zugehörigen Cylinder zu halbiren.

Bisher haben wir eine bestimmte Fläche angenommen. Wir wollen nun die Flächenschaar in Betracht ziehen, welche durch die Gleichung:

$$F \equiv cy - z.\varphi(x, \alpha) = 0$$

dargestellt wird, wenn α ein variabler Parameter ist. Für die einhüllende Fläche dieser Flächenschaar ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$F = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$$

Daraus geht hervor, dass die einhüllende Fläche der vorgelegten Flächenschaar eine geradlinige Fläche derselben Art wie die Fläche (4) ist; dass nur dann eine wirkliche einhüllende Fläche dieser Schaar existirt, wenn die Leitlinien der einzelnen Flächen dieser Schaar eine Enveloppe besitzen. Diese Enveloppe ist die Leitlinie der einhüllenden Fläche der vorgelegten Flächenschaar.

II. Abschnitt.

Der gerade elliptische Cono-Cuneus.

§ 9.

ıch diesen allgemeinen Erörterungen gehen wir zu unserer ichen Aufgabe über, indem wir zunächst den geraden ellipti- Cono-Cuneus in Betracht ziehen. Hierbei nehmen wir ein inkliges XYZ-Coordinatensystem an, dessen X-Axe die singu- ante und dessen YZ-Ebene die Directorebene sein mag. Sind e Gleichungen der Leitellipse:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$$

iebt sich als Gleichung des geraden elliptischen Cono-Cuneus:

$$c^2y^2=\frac{b^2}{a^2}z^2(a^2-x^2)$$

venn wir c^2 für $\frac{a^2c^2}{b^2}$ setzen:

$$c^2y^2=z^2(a^2-x^2)$$

ıs dieser Gleichung geht zunächst hervor, dass die vorgelegte vom vierten Grade ist. Ferner folgt daraus, dass der abso- 'ert von x nicht grösser als a sein darf, weil sonst y oder z ür wird. Die Fläche (17) erstreckt sich demnach von $x=-a$ $=+a$.

ır die Projection der Durchschnittscurve dieser Fläche mit der $z=h$ auf die XY-Ebene ergiebt sich:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{c^2y^2}{a^2h^2}=1$$

Durchschnittscurve ist daher im Allgemeinen eine Ellipse mit ılbaxen a und $\frac{ah}{c}$, deren Mittelpunkt auf der Z-Axe liegt, und Axen bezüglich in die Ebenen der xz und der yz fallen. Für geht die ausgeschnittene Ellipse in die singuläre Kante, für in einen Kreis mit dem Radius a über. Die Axen in der ene sind für alle diese ausgeschnittenen Ellipsen gleich $2a$, die in der YZ-Ebene dagegen wachsen proportional dem Abstande hneidenden Ebene von der singulären Kante.

Der elliptische Cono-Cuneus kann daher auch so entstanden gedacht werden, dass sich eine Ellipse, deren eine Axe constant, deren andere variabel ist, parallel mit sich selbst bewegt, während ihr Mittelpunkt eine Gerade senkrecht auf der Ellipsenebene beschreibt, und die variable Axe proportional dem Abstande der Ellipsenebene von einer gegebenen Ebene wächst.

Zunächst folgt hieraus, dass der Cono-Cuneus von Wallis mit einem Kreise als Leitlinie identisch mit unserem geraden elliptischen Cono-Cuneus ist, denn auch hierbei wird ein Kreis und durch eine dem Kreise parallele Ebene im Allgemeinen eine Ellipse ausgeschnitten. Ferner ist ersichtlich, dass es gleichgültig ist, welcher von beiden Axen der Leitellipse die singuläre Kante parallel geht; denn ist $a > b$, so ist $h = \frac{a}{b}\, c > c$, wenn h und c die Entfernungen bezüglich des Kreisschnittes und der Leitellipse von der singulären Kante bezeichnen; d. h. ist die singuläre Kante der grösseren Axe der Leitellipse parallel, so liegt der Kreis ausserhalb der Leitellipse und der singulären Kante. Ist dagegen $a < b$, so ist $h = \frac{a}{b} c < c$, d. h. ist die singuläre Kante der kleineren Axe der Leitellipse parallel, so liegt der Kreis zwischen dieser Kante und der Leitellipse. Im Wesentlichen wird dadurch nichts geändert, womit wir die Behauptung in der Einleitung bewiesen haben.

Ferner erhält man für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene $y = k$ mit dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) auf die XZ-Ebene:

$$z^2 (a^2 - x^2) = c^2 k^2 \tag{19}$$

d. i. im Allgemeinen eine Curve vierten Grades, welche die Z-Axe in den Punkten $x = 0$, $z = \pm \frac{ck}{a}$ schneidet. Sie ist in allen ihren Punkten convex nach der X-Axe hin und besteht aus zwei ins Unendliche sich erstreckenden Geraden, welche symmetrisch zu den Axen der x und der z liegen und sich asymptotisch den beiden Geraden $x = \pm a$ nähern. In ihren Durchschnittspunkten mit der Z-Axe sind die Tangenten an die Curve der X-Axe parallel. Für $k = 0$ geht diese Curve über in die X-Axe von $-a$ bis $+a$ und in die beiden Geraden $x = \pm a$.

Schneiden wir schliesslich die vorgelegte geradlinige Fläche (1 durch die Ebene $x = l$, so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Fläche auf die YZ-Ebene:

$$z = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}}\, y \qquad))$$

raus folgt, dass jede zur YZ-Ebene parallele Ebene, deren Abstand n der Directorebene absolute kleiner als a ist, den elliptischen no-Cuneus (17) in zwei Geraden schneidet, welche durch die X-e gehen und mit der XZ-Ebene gleiche Winkel bilden. Für $= \pm a$ fallen diese beiden Geraden in eine einzige zusammen, lche in der XZ-Ebene liegt. Alle diese ausgeschnittenen Geraden d die Erzeugenden des geraden elliptischen Cono-Cuneus.

§ 10.

Verweilen wir noch etwas bei den im vorigen § erhaltenen Re-taten. Aus der Gleichung (18) geht hervor, dass durch Ebenen rallel der XY-Ebene zwischen $h = -c$ und $h = +c$ aus dem raden elliptischen Cono-Cuneus (17) Ellipsen ausgeschnitten wer-n, deren grosse Axen in der XZ-Ebene, deren kleine Axen in der -Ebene liegen. Diejenigen Ebenen parallel der XY-Ebene dagegen ischen $h = -\infty$ bis $h = -c$ und zwischen $h = +c$ bis $h = +\infty$, neiden aus der vorgelegten Fläche Ellipsen aus, deren grosse en in der YZ-Ebene und deren kleine Axen in der XZ-Ebene gen.

Beachten wir die Brennpunkte dieser Ellipsen, so wissen wir, ss diejenigen der ersteren in der XZ-Ebene liegen. Für den Ab-nd eines solchen Brennpunktes von der Z-Axe ergiebt sich: $\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}}$. Man erhält demnach als Gleichung des geometrischen rtes dieser Brennpunkte:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad 1)$$

h. in Worten: Der geometrische Ort der Brennpunkte aller Ellipsen lche durch Ebenen parallel der XY-Ebene zwischen $z = -c$ und $= +c$ aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) ausgeschnitten rden, ist eine Ellipse in der XZ-Ebene mit den Halbaxen a und deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist, und deren Axen be-glich in die Axen der x und der z fallen.

Ist $c < a$, so liegt die grosse Axe dieser Ellipse in der X-Axe, kleine in der Z-Axe; ist $c = a$, so ist der geometrische Ort ein eis mit dem Radius a, und ist $c > a$, so liegt die grosse Axe metrischen Ortes in der Z-Axe, die kleine in der X-Axe

Durch Vergleichung von (18) und (21) ergiebt sich, wenn man

$$\frac{ah}{c} = c$$

setzt:

$$h = \frac{c^2}{a}.$$

Daraus folgt: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu a und c ist, schneidet aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) eine Ellipse aus, welche gleich dem geometrischen Ort der Brennpunkte aller Ellipsen ist, die durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus der vorgelegten Fläche ausgeschnitten werden.

Ferner folgt aus dem Obigen, dass die Brennpunkte derjenigen Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17), deren Abstand von der singulären Kante absolute grösser als c ist, in der YZ-Ebene liegen. Als Gleichung des geometrischen Ortes dieser Brennpunkte erhält man:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{22}$$

Mithin resultirt der Satz: Der geometrische Ort der Brennpunkte derjenigen Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17), deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder grösser als c ist, ist eine Hyperbel in der YZ-Ebene mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren reelle Axe $2c$ in der Z-Axe, und deren imaginäre Axe $2a$ in der Y-Axe liegt. Ist $c = a$, so wird dieser geometrische Ort eine gleichseitige Hyperbel mit dem Parameter $2a$.

Betrachtet man ferner die beiden Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) in den Entfernungen h_1 und h_2 von der singulären Kante, so ergiebt sich, wenn $h_1 < c$ ist, für das Verhältniss der Axen der zu h_1 zugehörigen Ellipse: $\frac{c}{h_1}$; andererseits erhält man, wenn $h_2 > c$ ist, als Axenverhältniss der zu h_2 zugehörigen Ellipse $\frac{h_2}{c}$. Sollen diese beiden Verhältnisse einander gleich sein, so folgt:

$$h_1 . h_2 = c^2. \tag{23}$$

Daraus fliesst der Satz: Das Product der Entfernungen der beiden Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus von der singulären Kante, welche dasselbe Axenverhältniss haben und auf derselben Seite der singulären Kante liegen, ist gleich dem Quadrat des Abstandes des Kreises dieses Cono-Cuneus von seiner singulären Kante.

Oder m. a. W. Die Entfernung derjenigen Ellipse des geraden liptischen Cono-Cuneus von der singulären Kante, deren Axen in emselben Verhältniss zu einander stehen wie die einer gegebenen llipse, und welche mit der gegebenen auf derselben Seite der singuären Kante liegt, ist die vierte Proportionale zu dem Abstande der egebenen Ellipse und dem Abstande des Kreises des geraden elliptichen Cono-Cuneus von seiner singulären Kante.

Bezeichnen h' und h'' die Abstände der zu h_1 und h_2 zugehörigen llipsen von dem Kreise des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17), . h. ist

$$h_1 = c - h' \quad \text{und} \quad h_2 = c + h'',$$

o ergiebt sich nach der Formel (23):

$$h' = \frac{c}{c + h''} h'' \quad \text{und} \quad h'' = \frac{c}{c - h'} h'$$

Demnach kann man die vorige Relation auch so deuten: Der Abstand derjenigen Ellipse des geraden elliptischen Cuno-Cuneus von dem Kreisschnitte desselben, welche dasselbe Axenverhältniss hat wie eine gegebene Ellipse derselben Fläche und mit der gegebenen auf derselben Seite der singulären Kante liegt, ist gleich der vierten Proportionale zum Abstande der gegebenen Ellipse, dem des Kreises von der singulären Kante und der Entfernung der gegebenen Ellipse vom Kreise.

Ferner folgt daraus: $h' < h''$, d. h. in Worten: Liegt die gegebene Ellipse zwischen der singulären Kante und dem Kreise des geraden elliptischen Cono-Cuneus, so ist diejenige Ellipse, welche mit ihr dasselbe Axenverhältniss hat und auf derselben Seite der singulären Kante liegt, weiter von dem Kreise des Cono-Cuneus entfernt als die gegebene, und umgekehrt, liegt die gegebene Ellipse jenseits des Kreises von der singulären Kante, so ist die gesuchte Ellipse näher an dem Kreise als die gegebene.

§ 11.

Wir wollen noch einige schiefe Schnitte des geraden elliptischen ono-Cuneus (17) analytisch untersuchen, welche sich bei Wallis rein ometrisch behandelt finden.

Zunächst schneiden wir ihn durch die auf der XY-Ebene senkechte Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel φ bildet und von er Y-Axe das Stück δ abschneidet.

Um die entsprechende Durchschnittscurve zu untersuchen, führ
wir die Coordinatentransformation ein:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$
$$y = \delta + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$
$$z = z'$$

Setzen wir dann $y' = 0$, so ergiebt sich als Gleichung der definirte
Durchschnittscurve:

$$c^2(\delta + x'\sin\varphi)^2 = z'^2(a^2 - x'^2\cos^2\varphi) \tag{24}$$

Daraus folgt:

$$\frac{dz'}{dx'} = \pm \frac{c(\delta x'\cos^2\varphi + a^2\sin\varphi)}{(a^2 - x'^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2z'}{dx'^2} = \pm \frac{c\cos^2\varphi\{2\delta x'^2\cos^2\varphi + 3a^2x'\sin\varphi + a^2\delta\}}{(a^2 - x'^2\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

Bei der näheren Discussion haben wir 3 Fälle zu unterscheid

1) $\delta\,\mathrm{cosec}\,\varphi < a\sec\varphi$ oder $\delta < a\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

Alsdann besteht die Durchschnittscurve vierten Grades aus z
symmetrischen Zweigen, welche sich im Punkte $x' = -\delta\,\mathrm{cosec}\,\varphi$, $z' =$
schneiden. Die beiden Zweige schneiden die z'-Axe in den Punk
$x' = 0$, $z' = \pm\frac{c\delta}{a}$ und erstrecken sich für $x' = \pm a\sec\varphi$ nach
den Seiten der Z'-Axe ins Unendliche. Sie nähern sich asymptoti
den beiden Geraden $x' = \pm a\sec\varphi$. Diese Curve besitzt zwei Wen
punkte, welche zur Abscisse:

$$x' = \frac{a}{4\delta\cos^2\varphi}\{-3a\sin\varphi + \cos\varphi\sqrt{9a^2\,\mathrm{tg}^2\varphi - 8\delta^2}\}$$

gehören. Ein specieller Fall findet für $\delta = 0$ statt.

Alsdann schneiden sich die beiden Zweige im Coordinatenanf
und liegen sowohl zur X'-Axe als zur Z'-Axe symmetrisch.

2) $\delta = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

Dadurch geht die Gleichung (24) über in:

$$c^2(a + x'\cos\varphi)\,\mathrm{tg}^2\varphi = z'^2(a - x'\cos\varphi)$$

Die Durchschnittscurve ist mithin alsdann vom dritten Gr
Sie liegt symmetrisch zur X'-Axe und schneidet dieselbe im Pu
$x' = -a\sec\varphi$, $z' = 0$. Diese Curve erstreckt sich sowohl au

ositiven als auf der negativen Seite der Z'-Axe für $x' = a \sec\varphi$ s Unendliche und hat die Asymptote $x' = a \sec\varphi$. In ihrem Durchchnittspunkte mit der X'-Axe steht die Tangente an die Curve auf ieser Axe senkrecht. Ausserdem besitzt diese Curve zwei Wendeunkte, welche zur Abscisse $x' = -\frac{1}{2} a \sec\varphi$ gehören.

3) $\delta > a \operatorname{tg}\varphi$.

In diesem Falle besteht die Durchschnittscurve vierten Grades us zwei Zweigen, welche symmetrisch zur X'-Axe liegen, dieselbe ber nicht schneiden. Von der Z'-Axe schneiden sie bezüglich die Stücke $\pm \frac{c\delta}{a}$ ab. Für $x' = -\frac{a^2 \sin\varphi}{\delta \cos^2\varphi}$ ist die Tangente an dieselbe er X'-Axe parallel. Ausserdem besitzt diese Curve die beiden Asymptoten $x' = \pm a \sec\varphi$.

Auf analoge Weise ergiebt sich als Gleichung der Durchschnittsurve des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) mit der Ebene senkecht auf der xz-Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel ψ bildet nd von der Z-Axe das Stück e abschneidet:

$$(25) \qquad c^2 y'^2 = (e + x' \sin\varphi)^2 (a^2 - x'^2 \cos^2\psi)$$

. i. eine Curve vierten Grades, welche symmetrisch zur X'-Axe iegt. Auch hierbei haben wir die 3 Fälle zu unterscheiden $\lesseqgtr a \operatorname{tg}\psi$. Diese Curve ist in allen Fällen geschlossen und besitzt, wenn $e < a \operatorname{tg}\psi$ ist, einen Doppelpunkt. Für $e = 0$ erhält man eine Curve vierten Grades, welche eine ähnliche Gestalt wie die Lemniskate hat.

Schneiden wir schliesslich den geraden elliptischen Cono-Cuneus 17) durch eine Ebene senkrecht auf der YZ-Ebene, welche mit der -Axe den Winkel ϑ bildet und von der Z-Axe das Stück f abchneidet, so erhält man auf die oben ausgeführte Weise als Gleichung der betreffenden Durchschnittscurve:

$$(26) \qquad c^2 y'^2 \cos^2\vartheta = (f + y' \sin\vartheta)^2 (a^2 - x'^2)$$

i. im Allgemeinen eine Curve vierten Grades.

Die verschiedenen Fälle, welche sich hieraus ergeben, je nachm val. abs. $\operatorname{tg}\vartheta \lesseqgtr \frac{c}{a}$ ist, entsprechen den Kegelschnitten. Für l. abs. $\operatorname{tg}\vartheta < \frac{c}{a}$ stellt die Gleichung (26) eine geschlossene Curve

entsprechend der Ellipse beim Kegel dar, welche für $\vartheta = 0$ in eine Ellipse übergeht. Für $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{c}{a}$ erstreckt sich die Durchschnittscurve nach der positiven Seite der Y-Axe ins Unendliche.

Sie schneidet die Y'-Axe im Punkte $x' = 0$, $y' = -\frac{f}{c}\sqrt{a^2+c^2}$, die X'-Axe in den Punkten $x' = \pm a$, $y' = 0$ und liegt zwischen den in den letzteren Punkten auf der X'Axe errichteten Senkrechten. Diese Curve entspricht dem Parabelschnitt des Kegels. Für val. abs. $\operatorname{tg}\vartheta > \frac{c}{a}$ besteht die Durchschnittscurve (26) aus zwei nach beiden Seiten der Y'-Axe ins Unendliche sich erstreckenden Zweigen, von denen der eine Zweig die X'-Axe in den Punkten $x' = \pm a$, $y' = 0$, die Y'-Axe im Punkte $x' = 0$, $y' = -\frac{af}{a\sin\vartheta + c\cos\vartheta}$ schneidet. Der andere Zweig schneidet die Y'-Axe in dem Punkte $x' = 0$, $y' = -\frac{af}{a\sin\vartheta - c\cos\vartheta}$. Diese Curve entspricht der Hyperbel beim Kegel.

Für $f' = 0$ geht die Gleichung (26) über in:

$$x' = \pm\sqrt{a^2 - c^2\operatorname{ctg}^2\vartheta}$$

Die Ebenen, welche durch die singuläre Kante gehen, schneiden daher aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) zwei erzeugende Geraden desselben aus, wenn val. abs. $\operatorname{tg}\vartheta > \frac{c}{a}$ ist. Für $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{c}{a}$ fallen diese beiden Geraden in eine einzige zusammen.

§ 12.

Wir wollen nun die Untersuchungen ebener Schnitte des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) verlassen und zur Betrachtung seiner Tangentialebene übergehen.

Als Gleichung derselben im Punkte xyz der Fläche ergibt sich

$$xz^2(\xi - x) - c^2y(\eta - y) - z(a^2 - x^2)(\zeta - z) = 0$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (17):

$$(27) \qquad xz^2(\xi - x) - cy\,.\,c\eta - z(a^2 - x^2)\zeta = 0$$

Nach den allgemeinen Bemerkungen in der Einleitung berührt diese Tangentialebene den geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) im Allgemeinen nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden desselben. Die Ausnahmen hiervon finden für $z = 0$ und für $x = \pm a$ statt. Im ersteren Falle schneidet die Tangentialebene aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende und die singuläre Kante aus, in den beiden anderen Fällen dagegen nur die durch ihren Berührungspunkt gehende erzeugende Gerade.

Die singuläre Kante des geraden elliptischen Cono-Cuneus ist noch dadurch ausgezeichnet, dass es in den Punkten derselben je zwei Tangentialebenen giebt, welche sich in der X-Ebene schneiden, und mit der XZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Denn setzt man in der Gleichung (27) für cy seinen Wert aus der Gleichung (17) und nimmt dann $z = 0$ an, so geht dieselbe über in:

$$\zeta = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}} \eta$$

Es sind dies die am Schlusse des vorigen § für $f = 0$ betrachteten Ebenen. Daraus folgt, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene, welche mit der XZ-Ebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente absolute gleich oder kleiner als $\frac{c}{a}$ ist, eine Tangentialebene des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) ist.

Im Allgemeinen erhält man für die Projection der Durchschnittscurve der Tangentialebene mit der vorgelegten Fläche auf die XZ-Ebene, wenn man η aus der Gleichung (27) und der Gleichung:

$$c^2 \eta^2 = \zeta^2(a^2 - \xi^2)$$

eliminirt:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{c} \xi - x = 0 \\ (a^2 - x^2)(\xi + x)\zeta^2 - 2xz(a^2 - x^2)\zeta + x^2 z^2(\xi - x) = 0 \end{array} \right.$$

d. h. diese Durchschnittscurve besteht im Allgemeinen aus der durch den Berührungspunkt der Tangentialebene mit der Fläche gehenden Erzeugenden der letzteren und aus einer Curve dritten Grades.

Für die Normale im Punkte xyz des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) ergeben sich die Gleichungen, wenn x_1, y_1, z_1 die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$(29) \qquad \frac{x_1 - x}{xz^2} = \frac{y_1 - y}{-c^2 y} = \frac{z_1 - z}{z(a^2 - x^2)}.$$

§ 13.

Unsere nächste Aufgabe sei, das Volumen V zu bestimmen, welches von den Ebenen $x = 0$, $x = x_0$, $z = z_0$, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teile des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) begrenzt wird. Für dasselbe ergiebt sich:

$$V = \int_0^{x_0}\int_0^{z_0} y\,dx\,dz = \frac{1}{c}\int_0^{x_0} dx\sqrt{a^2-x^2}\int_0^{z_0} z\,dz$$

(30) $$V = \frac{z_0^2}{2c}\left\{\tfrac{1}{2}x_0\sqrt{a^2-x_0^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)\right\}$$

oder, wenn man die zu x_0, z_0 gehörige Coordinate y mit y_0 bezeichnet

(31) $$V = \tfrac{1}{4}x_0 y_0 z_0 + \tfrac{1}{4}a^2 \frac{z_0^2}{c} \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)$$

Das Volumen V mit der vorgeschriebenen Begrenzung ist demnach gleich dem vierten Teil des rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0 vermehrt um ein Prisma, dessen Grundfläche ein Quadrat mit der Seite $\frac{1}{2}a$, und dessen Höhe die mit $\arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)$ multiplicirte vierte Proportionale zu c und z_0 ist.

Setzt man in der Gleichung (30) $x_0 = a$, so geht dieselbe über in

$$V = \frac{\pi a^2 z_0^2}{8c}$$

d. i. aber der vierte Teil desjenigen Volumens V', welches von dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) und der Ebene $z = z_0$ begrenzt wird. Daraus folgt:

(32) $$V' = \tfrac{1}{2}\pi a^2 \frac{z_0^2}{c}.$$

Das von dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) und der Ebene $z = z_0$ begrenzte Volumen ist also gleich der Hälfte eines Cylinders, dessen Grundkreis den Radius a hat, und dessen Höhe die vierte Proportionale zu c und z_0 ist.

Ziehen wir in Betracht, dass die zur XY-Ebene parallele Ebene $Z = Z_0$ aus der vorgelegten Fläche eine Ellipse mit den Halbaxen a und $\frac{az_0}{c}$ ausschneidet, so lässt sich die Formel (52) so deuten:

Das Volumen V' ist gleich dem halben Volumen des Cylinders mit der durch die Ebene $Z = Z_0$ aus der vorgelegten Fläche ausgeschnittenen Ellipse als Grundfläche und der Höhe Z_0.

Allgemein ist diese Beziehung in der Einleitung (§ 8.) nachgewiesen worden; wir wollen daher hier nicht näher darauf eingehen. Bemerkt sei nur noch, dass die Formel (32) auch mit Hilfe einer Mittenfigur deuten lässt. Die Ebene $z = \frac{1}{2}z_0$ schneidet nämlich aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) eine Ellipse mit den Halbaxen a und $\frac{az_0}{2c}$ aus. Bezeichnet man diese Mittenfigur mit M, so geht die Gleichung (32) über in:

(33) $$V' = M \, . \, z_0$$

Diese Formel gilt auch, wenn man das Volumen zwischen den Ebenen $z = z_1$, $z = z_2$ und dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) in Betracht zieht. Man hat alsdann nur für z_0 den Abstand der beiden begrenzenden Ebenen zu setzen. Denn aus der Gleichung (32) folgt für dieses Volumen, wenn $z_2 > z_1$ ist:

$$V = \tfrac{1}{2}\pi a^2 \frac{z_2^{\,2} - z_1^{\,2}}{c} = \tfrac{1}{2}\pi a^2 h \frac{z_1 + z_2}{c}$$

wobei $h = z_2 - z_1$ ist. Nun ist aber: $z = \frac{c}{a} b$, wenn b die zu z zugehörige variabele Halbaxe der Ellipse ist. Mithin erhält man:

$$V = \pi a \, . \, \frac{b_1 + b_2}{2} \, . \, h$$

Setzt man ferner: $\frac{b_1 + b_2}{2} = b_3$, so ergiebt sich:

$$V = \pi a b_3 h$$

Ist z_3 das zu b_3 zugehörige z, so ist:

$$z_3 = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

also:

$$z_2 - z_3 = \tfrac{1}{2}(z_2 - z_1) = \tfrac{1}{2}h$$

Demnach resultirt der oben ausgesprochene Satz:

(34) $$V = M \, . \, h$$

Wir hatten erhalten:

$$V = \pi a \frac{b_1 + b_2}{2} h.$$

Diese Formel lässt sich noch anders deuten. Es ergiebt sich nämlich daraus:

$$V = \tfrac{1}{6}\pi\, ab_1 h + \tfrac{1}{6}\pi\, ab_2 h + \tfrac{1}{3}\pi\, a(b_1 + b_2)h$$

$$V = \frac{h}{3}\left\{ \tfrac{1}{2}(\pi\, ab_1 + \pi\, ab_2) + 2\pi\, ab_3 \right\}$$

Setzt man nun:

$$\pi\, ab_1 = G_1$$
$$\pi\, ab_2 = G_2$$
$$\pi\, ab_3 = M,$$

wobei G_1 und G_2 die begrenzenden Ellipsen, M die Mittenfigur des Körpers V bedeutet, so ist:

$$V = \frac{h}{3}\{\tfrac{1}{2}(G_1 + G_2) + 2M\} \qquad (35)$$

d. i. die Formel, welche in der Stereometrie vom Prismatoid bewiesen wird.

Die beiden Formeln (34) und (35) lassen sich noch verallgemeinern. Wir wollen diese Verallgemeinerung kurz für die erstere durchführen. Betrachtet man nämlich das Volumen zwischen den Ebenen $x = 0$, $x = x_0$, $z = z_1$, $z = z_2$, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17), so erhält man für dasselbe:

$$V' = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2c}\left\{ \tfrac{1}{2}x_0 \sqrt{x_0^2 - a^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right) \right\}$$

Nun ist aber:

$$\frac{z_2^2 - z_1^2}{2c} = \frac{h(z_1 + z_2)}{2c} = h\,\frac{z_3}{c}$$

und

$$\frac{z_3}{c}\left\{ \tfrac{1}{2}x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right) \right\} = M',$$

wenn M' den Teil von M bezeichnet, welcher von den zu $x = 0$, $x = x_0$ zugehörigen Ordinaten der Ellipse, von der X-Axe und dem zugehörigen Bogen begrenzt wird. Folglich resultirt:

$$V' = M'.\, h.$$

Auf analoge Weise ergiebt sich der entsprechende Ausdruck für die Formel (35).

III. Abschnitt.

Die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei.

§ 14.

Um zunächst den geteilten geraden hyperbolischen ono-Cuneus zu betrachten, nehmen wir als Gleichungen der eithyperbel:

$$ 6) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases} $$

emnach wird die X-Axe singuläre Kante, die YZ-Ebene Director-ene. Also erhält man als Gleichungen des betreffenden Cono-Cuneus, enn man wieder c^2 für $\frac{a^2c^2}{b^2}$ setzt:

$$ 7) \quad c^2y^2 = z^2(x^2 - a^2) $$

a diese Gleichung nur die Quadrate von x, y, z enthält, so ist zu-ichst klar, dass die vorgelegte Fläche symmetrisch zu den drei oordinatenebenen liegt. Ferner folgt ohne Weiteres, dass es nur elle Werte für y und z giebt, wenn val. abs. $x \overline{\gtrless} a$ ist. Der in ede stehende Cono-Cuneus besteht daher aus zwei gesonderten Tei-n zu beiden Seiten der Directorebene, woher die Bezeichnung „geteilt" tnommen ist.

Wir wollen nicht näher auf ebene Schnitte des geteilten geraden perbolischen Cono-Cuneus eingehen, da wir dabei auf ganz ähnliche etrachtungen wie beim geraden elliptischen Cono-Cuneus geführt erden. Bemerkt sei hier nur, dass die zur XY-Ebene parallele bene $z = h$ aus der vorgelegten Fläche (37) die Hyperbel:

$$ 8) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2y^2}{a^2h^2} = 1 $$

sschneidet. Für $h = c$ ergiebt sich demnach eine gleichseitige yperbel mit dem halben Parameter a. Die Mittelpunkte aller die-r Hyperbeln liegen auf der Z-Axe, ihre reellen Axen in der YZ-Ebene, re imaginären Axen in der YZ-Ebene. Die reellen Axen der aus-schnittenen Hyperbeln sind einander gleich $2a$, die imaginären da-gen wachsen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene on der singulären Kante.

Ziehen wir die Brennpunkte dieser ausgeschnittenen Hyperbeln in Betracht, so liegen diese, wie sich aus dem Gesagten ergiebt, in

der XZ-Ebene. Als Gleichung des geometrischen Ortes dieser Brennpunkte erhält man:

(39) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

d. h. in Worten: Der geometrische Ort der Brennpunkte aller Hyperbeln, welche aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) durch Ebenen parallel der XY-Ebene ausgeschnitten werden, ist eine Hyperbel in der XZ-Ebene mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren reelle Axe $2a$ in der X-Axe, deren imaginäre Axe $2c$ in der Z-Axe liegt. Ist $c = a$, so ist dieser geometrische Ort eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a.

Aus der Vergleichung von (38) und (39) folgt, wenn wir $\frac{ah}{c} =$ setzen:

$$h = \frac{c^2}{a}$$

Daraus fliesst der Satz: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale z a und c ist, schneidet aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) eine Hyperbel aus, welche gleich ist dem geometrische Orte der Brennpunkte aller durch Ebenen parallel der XY-Eben aus der vorgelegten Fläche ausgeschnittenen Hyperbeln.

Es ist dies ein ganz ähnliches Resultat, wie wir es beim gerade elliptischen Cono-Cuneus erhalten haben.

Vergleichen wir die beiden Resultate (22) und (39), so erhalten wir den Satz:

Sind der gerade elliptische und der geteilte gerade hyperbolische Cono-Cuneus, welche dieselbe Directorebene und dieselbe singuläre Kante haben, so beschaffen, dass die Ebene in der Entfernung a von der singulären Kante aus dem elliptischen einen Kreis mit dem Radius a, aus dem hyperbolischen eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a ausschneidet, so ist der geometrische Ort der Brennpunkte der Ellipsen des elliptischen Cono-Cuneus, deren Entfernung von der singulären Kante absolute gleich oder grösser als a ist, gleich dem geometrischen Orte der Brennpunkte der Hyperbeln des gerade geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus.

Die durch die Gleichung (38) dargestellte Hyperbel besitzt zw Asymptoten, welche der Gleichung genügen:

$$y = \pm \frac{h}{c} x$$

Die Asymptoten aller Hyperbeln, welche aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) durch Ebenen parallel der XY-Ebene ausgeschnitten werden, liegen demnach auf einer Fläche, welche durch die Gleichung dargestellt wird:

$$cy = \pm xz$$

Diese zerfällt in die beiden Gleichungen:

(40) $$\begin{cases} cy - xz = 0 \\ cy + xz = 0 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass die Asymptoten der Hyperbeln des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus auf zwei hyperbolischen Paraboloiden liegen. Um die Gleichungen derselben auf die übliche Form zu bringen, wenden wir die Coordinatentransformation an:

$$x = x'\cos\varphi - z'\sin\varphi$$
$$y = y'$$
$$z = x'\sin\varphi + z'\cos\varphi$$

Dadurch gehen die Gleichungen (40) über in:

$$cy' = \pm\left[(x'^2 - z'^2)\sin\varphi\cos\varphi + x'z'(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right]$$

Für $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi = 0$ ergiebt sich $\varphi = \frac{\pi}{4}$, wodurch man erhält:

$$x'^2 - z'^2 = \pm 2cy'$$

Die beiden hyperbolischen Paraboloide genügen also den Gleichungen:

(41) $$\begin{cases} \dfrac{x'^2}{2c} - \dfrac{z'^2}{2c} = y' \\ \dfrac{z'^2}{2c} - \dfrac{x'^2}{2c} = y' \end{cases}$$

Diese Paraboloide sind demnach der Art, dass Ebenen parallel der $X'Z'$-Ebene gleichseitige Hyperbeln aus ihnen ausschneiden. Ausserdem sind ihre Spuren in den Ebenen der $x'y'$ und der $y'z'$ einander gleich.

§ 15.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) ergiebt sich, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$xz^2(\xi - x) - c^2y(\eta - y) + z(x^2 - a^2)(\zeta - z) = 0$$

oder:

(42) $$xz^2(\xi - x) - cy \cdot c\eta + z(x^2 - a^2)\zeta = 0$$

Schon aus den allgemeinen Erörterungen der Einleitung geht hervor, dass diese Tangentialebene den geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) im Allgemeinen in der durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden und in einer Curve dritten Grades schneidet. Sie berührt aber im Allgemeinen die vorgelegte Fläche nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben. Eine Ausnahme hiervon findet nur für $x = \pm a$ statt; d. h. nur die Tangentialebenen in den Durchschnittspunkten des in Rede stehenden Cono-Cuneus (37) mit der XZ-Ebene berühren denselben längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden. Diese Tangentialebenen sind zugleich der Directorebene parallel und schneiden aus der vorgelegten Fläche nur die betreffende erzeugende Gerade aus.

Ein anderer specieller Fall ergiebt sich für $z = 0$, und zwar erhält man dafür aus der Gleichung (42):

$$\zeta = \pm \frac{c}{\sqrt{x^2 - a^2}} \eta$$

In den Punkten der singulären Kante des geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) giebt es demnach im Allgemeinen je zwei Tangentialebenen, welche durch die X-Axe gehen und mit der XZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Analog dem Resultate beim geraden elliptischen Cono-Cuneus folgt, dass diese Tangentialebenen aus der vorgelegten Fläche ausser der singulären Kante zwei auf beiden Seiten der Directorebene liegende, von derselben gleich weit entfernte erzeugende Geraden ausschneiden.

Jede durch die singuläre Kante gehende Ebene ist mithin im Allgemeinen eine Tangentialebene des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus.

Für die Gleichungen der Normale im Punkte xyz des vorgelegten Cono-Cuneus (37) erhält man, wenn x_1, y_1, z_1 die laufenden Cordinaten sind:

$$(43) \qquad \frac{x_1 - x}{xz^2} = \frac{y_1 - y}{-c^2 y} = \frac{z_1 - z}{z(x^2 - a^2)}$$

§ 16.

Betrachten wir jetzt in der Gleichung:

$$(44) \qquad F \equiv c^2 y^2 - z^2 (x^2 - a^2) = 0$$

c als variabel, so stellt dieselbe eine Schaar von geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneis dar. Alle Flächen dieser Schaar gehen

durch die X-Axe und berühren sich in den beiden Geraden $x = \pm a$, $y = 0$. Sie besitzen also keine eigentliche einhüllende Fläche.

Anders verhält es sich, wenn wir in der Gleichung (44) c als constant, a dagegen als variabel annehmen. Wenden wir hierauf das in § 8. erhaltene Resultat an, so erhält man als Gleichung der einhüllenden Fläche der vorgelegten Flächenschaar:

$$\begin{cases} cy - xz = 0 \\ cy + xz = 0 \end{cases}$$

Das sind aber die Gleichungen (40). Die einhüllende Fläche der vorgelegten Flächenschaar besteht demnach aus den beiden hyperbolischen Paraboloiden, auf denen die Asymptoten aller Hyperbeln des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) liegen.

Für die erste Schaar von geradlinigen Flächen, welche durch die Gleichung (44) dargestellt wird, wollen wir noch die **Orthogonalflächen** bestimmen. Angenommen, eine dieser Orthogonalflächen habe die Gleichung $\varphi = 0$, dann sind die cosinus der Winkel, welche die Normale derselben mit den drei Coordinatenaxen bildet, bezüglich proportional:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ferner sind die cosinus der Winkel, welche die Normale einer Fläche der vorgelegten Flächenschaar mit den drei Coordinatenaxen bildet, bezüglich proportional:

$$\frac{\partial F}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Da diese beiden Normalen nach der obigen Bedingung auf einander senkrecht stehen, so erhält man:

(45) $$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Setzen wir hierin für $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ihre Werte und eliminiren dann c^2 zwischen der erhaltenen Gleichung und der Gleichung (44) der gegebenen Flächenschaar, dann ergiebt sich als partielle Differentialgleichung der gesuchten Orthogonalflächen:

(46) $$xyz \frac{\partial \varphi}{\partial x} - z(x^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y(x^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Nach der Lagrange'schen Reduction der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf ein System gewöhnlicher

Differentialgleichungen gelangt man zum allgemeinen Integral der Gleichung (46) durch Integration von:

$$dx : dy : dz = xyz : -z(x^2-a^2) : y(x^2-a^2)$$

Daraus folgt

$$dx : dy = xy : -(x^2-a^2)$$

$$x^2+y^2-2a^2 \lg x = c_1$$

$$dy : dz = -z : y$$

$$y^2+z^2 = c_2$$

Die Orthogonalflächen der vorgelegten Flächenschaar sind demnach [illegible] enthalten in der Gleichung:

(47) $$F(x^2+y^2-2a^2 \lg x,\ y^2+z^2) = 0$$

Zu demselben Resultat gelangt man bei der Betrachtung der Orthogonalflächen der Schaar von geraden elliptischen Cono-Cuneis, welche sich durch die Gleichung:

(48) $$F \equiv c^2 y^2 - z^2(a^2-x^2) = 0$$

dargestellt werden, wenn c variabel und a constant ist. Denn setzt man in die Bedingungsgleichung (45) für $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ die aus der Gleichung (48) folgenden Werte ein und eliminirt dann c^2 zwischen (48) und der erhaltenen Gleichung, so resultirt als partielle Differentialgleichung der betreffenden Orthogonalflächen:

$$xyz\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z(a^2-x^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y(a^2-x^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

oder:

$$xyz\frac{\partial \varphi}{\partial x} - z(x^2-a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + y(x^2-a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

d. i. aber die Gleichung (46). Daraus fliesst der Satz: Ist c variabel, hat dagegen a einen constanten Wert, so schneiden die Orthogonalflächen der durch die Gleichung (44) dargestellten Schaar von geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneis die durch die Gleichung (48) dargestellte Schaar von geraden elliptischen Cono-Cuneus rechtwinklig.

§ 17.

Unsere nächste Aufgabe sei die Cubatur des geteilten geraden hyberbolischen Cono-Cuneus (37). Es ergiebt sich:

$$V = \int_a^{x_0}\int_0^{z_1} y\,dx\,dz = \frac{1}{c}\int_a^{x_0} dx\sqrt{x^2-a^2}\int_0^{z_0} z\,dz$$

(49) $$V = \frac{z_0^2}{2c}\left\{\tfrac{1}{2}x_0\sqrt{x_0^2-a^2} - \tfrac{1}{2}a^2\lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right)\right\}$$

Beachten wir, dass: $c^2y_0^2 = z_0^2(x_0^2-a^2)$ ist, so geht die Gleichung (49) über in:

(50) $$V = \tfrac{1}{4}x_0y_0z_0 - \tfrac{1}{4}\frac{a^2z_0^2}{c}\lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right)$$

Von diesem Volumen gelten analoge Sätze wie von demjenigen des geraden elliptischen Cono-Cuneus. Wir wollen diese hier nicht erst entwickeln, sondern auf eine andere Betrachtungsweise eingehen.

Lässt man längs einer durch die Ebene $x = x_0$ aus der vorgelegten Fläche (37) ausgeschnittenen Geraden eine gerade Linie parallel der XY-Ebene so hingleiten, dass sie stets durch die Z-Axe geht, zo erzeugt sie ein hyperbolisches Paraboloid, welches der Gleichung:

$$cy = xz$$

genügt. Für das Volumen V' zwischen den Ebenen $x = x_0$, $z = z_0$ der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil dieser Fläche erhält man:

$$V' = \tfrac{1}{4}x_0y_0z_0$$

Mithin resultirt:

(51) $$V' - V = v = \frac{a^2z_0^2}{4c}\lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right)$$

Bezeichnen wir ferner den Hyperbelsector OPA (Fig. 1.) mit s, so ist, wenn die Hyperbel der Gleichung (38) genügt, und wenn man z_0 für h setzt:

(52) $$s = \frac{a^2z_0}{2c}\lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right)$$

Demnach geht die Gleichung (51) über in:

(53) $$v = \tfrac{1}{2}s.z_0$$

d. h. bei constantem z_0 und variablem x_0 verhalten sich die Volumina v wie die zugehörigen Hyperbelsectoren.

Wir haben im § 14. gesehen, dass die Ebene $z = c$ aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a ausschneidet. Setzen wir $z_0 = c$ in die Gleichungen (52) und (53) ein, so erhalten wir:

(54) $$\left\{\begin{aligned} v &= \tfrac{1}{2}s.c \\ s &= \tfrac{1}{2}a^2\lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right)\end{aligned}\right.$$

Hieran wollen wir einige Bemerkungen über Summen und Differenzen von v knüpfen, wenn x_0 verschiedene Werte annimmt. Wie sich aus den Gleichungen (54) ergiebt, haben wir dazu nur die entsprechenden Sectoren s zu betrachten.

Unter den gemachten Voraussetzungen lässt sich die zweite Gleichung in (54) auch so schreiben:

$$(55) \qquad s = \tfrac{1}{2} a^2 \lg\left(\frac{x+y}{a}\right)$$

d. h. der Sector einer gleichseitigen Hyperbel ist gleich dem halben Quadrat des halben Parameters multiplicirt mit dem natürlichen Logarithmus von dem Quotienten aus der Summe der zugehörigen Endcoordinaten dividirt durch den halben Parameter.

Aus der Gleichung (55) folgt:

$$2s = \tfrac{1}{2} a^2 \lg\left(\frac{x+y}{a}\right)^2$$

Ist nun: $2s = s'$ und sind x', y' die zum Sector s' zugehörigen Endcoordinaten, so ist demnach:

$$(56) \qquad x' + y' = \frac{(x+y)^2}{a}$$

Daraus fliesst der Satz: Die Summe der Coordinaten des doppelten Sectors einer gleichseitigen Hyperbel ist die vierte Proportionale zum halben Parameter derselben und der Summe der Coordinaten des einfachen Sectors.

Es ist aber: $x'^2 - y'^2 = a^2$. Mithin erhält man aus der Gleichung (56):

$$(57) \qquad x' = \frac{x^2 + y^2}{a}$$

Den vorigen Satz kann man daher auch so aussprechen: Die Abscisse des doppelten Sectors einer gleichseitigen Hyperbel ist die vierte Proportionale zum halben Parameter derselben und der Verbindungslinie des Endpunktes der Ordinate des einfachen Sectors mit dem Hyperbelmittelpunkt.

Um mithin den Sector OP_1A (Fig. 1.) zu verdoppeln, construirt man die vierte Proportionale zu OA und OP_1, trage dieselbe auf OA von O aus bis Q_2 ab, errichte in Q_2 die Senkrechte P_2Q_2 auf OA, so ist Sector $OP_2A = 2$ Sect. OP_1A.

Damit ist zugleich die Aufgabe gelöst, einen gegebenen Sector
ner gleichseitigen Hyperbel zu halbiren. Denn nach der Gleichung
7) ist

8) $$x^2+y^2=a.x'$$

m daher den Sector OP_2A zu halbiren, construire man über OQ_2
s Durchmesser einen Halbkreis, welcher die Scheiteltangente der
yperbel in R schneidet, mache $OP_1 = OR$, so ist

$$\text{Sect. } OP_1A = \tfrac{1}{2}\text{Sect. } OP_2A.$$

Aus der Gleichung (58) folgt noch, wenn man $y^2 = x^2 - a^2$ setzt:

9) $$x^2 = \tfrac{1}{2}a(a+x')$$

Beachtet man ferner, dass der Krümmungsradius für die gleich-
itige Hyperbel

$$\varrho = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}$$

, so ergiebt sich nach der Gleichung (57):

$$\overline{OQ_2}^2 = OP_1 . \varrho$$

h. in Worten: OQ_2 ist die mittlere Proportionale zu OP_1 und
n Krümmungsradius in P_1.

Zugleich ist klar, dass für den Scheitel der gleichseitigen Hy-
rbel der Krümmungsradius gleich dem halben Parameter derselben ist.

Die Relation (56) lässt sich leicht verallgemeinern. Ist nämlich
$= n.s$ und gehört s_n zu den Endcoordinaten x_n, y_n, so erhält man:

)) $$x_n + y_n = \frac{(x+y)^n}{a^{n-1}}$$

raus resultirt der Satz: Die Summe der Coordinaten des n-fachen,
tors einer gleichseitigen Hyperbel ist gleich der $n$ten Potenz der
nme der Coordinaten des einfachen Sectors dividirt durch die
-1)te Potenz des halben Parameters derselben.

Sind ferner die beiden Sectoren s_1 und s_2 gegeben, welche be-
lich zu den Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gehören, so ist nach (55):

$$s_1 + s_2 = \tfrac{1}{2}a^2 \lg\left(\frac{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}{a^2}\right)$$

Ist nun: $s_1 + s_2 = s_3$, wobei s_3 zu den Coordinaten x_3, y_3 gehört,
t sich die Relation:

$$x_3 + y_3 = \frac{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)}{a} \tag{61}$$

d. h. in Worten: Ist die Summe zweier Sectoren s_1 und s_2 einer gleichseitigen Hyperbel gleich einem dritten Sector s_3, so ist die Summe der Coordinaten dieses dritten Sectors die vierte Proportionale zum halben Parameter und den beiden Summen aus den Coordinaten der beiden zu summirenden Sectoren.

Setzt man: $\frac{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)}{a} = c$, so erhält man:

$$x_3 = \frac{a^2 + c^2}{2c}$$

Um daher einen Sector s_3 zu finden (Fig. 2.), welcher gleich der Summe der beiden Sectoren OP_1A und OP_2A ist, construire man die vierte Proportionale OS zu OA, $OQ_1 + Q_1P_1 = OR_1$ und $OQ_2 + Q_2P_2 = OR_2$, halbire AS in T, trage AS von S aus auf SO bis U ab, ziehe durch U die Parallele UV zu OT, mache $OQ_3 = SV$, errichte in Q_3 die Senkrechte P_3Q_3 auf OQ_3, so ist Sect. OP_3A der gesuchte Sector.

Damit ist zugleich die Aufgabe gelöst: Es sei ein beliebiger Punkt P_2 auf dem Bogen einer gleichseitigen Hyperbel gegeben, man bestimme hierzu einen Punkt P_3 so, dass der Sector OP_2P_3 gleich einem gegebenen Sector OP_1A ist.

Durch Wiederholung derselben Operation lässt sich die Gleichung (61) verallgemeinern. Sind die Hyperbelsectoren $s_1, s_2, \ldots s_n$ gegeben und ist:

$$s_{n+1} = s_1 + s_2 + \ldots + s_n,$$

so ist, wenn die Sectoren bezüglich zu den Endcoordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; $\ldots x_{n+1}$, y_{n+1} gehören:

$$x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\ldots(x_n + y_n)}{a^{n-1}} \tag{62}$$

Aus der Gleichung (61) folgt ferner:

$$x_1 + y_1 = \frac{x_3 + y_3}{x_2 + y_2} a \tag{63}$$

d. h. in Worten: Ist der Sector s_1 einer gleichseitigen Hyperbel gleich der Differenz $s_3 - s_2$ zweier Sectoren, so ist die Summe der Coordinaten von s_1 die vierte Proportionale zu der Summe der Coordinaten von s_2, der Summe der Coordinaten von s_3 und dem halben Parameter der Hyperbel.

Daraus ergiebt sich eine der vorigen ähnliche Construction.

§ 18.

Vir wollen jetzt einige Beziehungen an der gleichseitigen Hy-
l entwickeln, wenn die Punkte P_1 und P_2 (Fig. 3.) so auf dem
rbelbogen liegen, dass O, A, Q_1 und Q_2 vier harmonische Punkte
Man hat demnach die Proportion:

$$OA : AQ_1 = OQ_2 : Q_1 Q_2$$

n ferner die Relationen statt:

$$\text{Sect. } OP_3 A = \tfrac{1}{2} \text{ Sect. } OP_1 A$$
$$\text{Sect. } OP_4 A = \tfrac{1}{2} \text{ Sect. } OP_2 A,$$

lgt zunächst aus (58):

$$\overline{OP_4}^2 = OA . OQ_2$$
$$\overline{OP_4}^2 = \tfrac{1}{2}(OA . OQ_2 + OA . OQ_2)$$
$$\overline{OP_4}^2 = \tfrac{1}{2}(OA . OQ_1 + OA . Q_1 Q_2 + OQ_1 . OQ_2 - AQ_1 . OQ_2)$$

s folgt mit Anwendung der Proportion (64):

$$\overline{OP_4}^2 = \tfrac{1}{2} OQ_1 (OA + OQ_2)$$

(59) ist nun: $\tfrac{1}{2} OA (OA + OQ_2) = \overline{OQ_4}^2$, folglich erhält man:

$$\overline{OP_4}^2 . OA = OQ_1 . \overline{OQ_4}^2$$

en wir hierauf noch die Gleichung (58) an, nach welcher
$Q_1 = \overline{OP_3}^2$ ist, so resultirt:

$$\overline{OP_4}^2 . \overline{OA}^2 = \overline{OP_3}^2 . \overline{OQ_4}^2$$
$$OQ_4 : OP_4 = OA : OP_3$$

er Figur 3. folgt, wenn R der Durchschnittspunkt der Scheitel-
te mit OP_4 ist:

$$OQ_4 : OP_4 = OA : OR$$

eiden Proportionen ergiebt sich:

$$OP_3 = OR$$

araus fliesst der Satz: Ist der Sector $OP_4 A$ die Hälfte des
rs $OP_2 A$ und liegen P_1 und P_2 so auf dem Bogen der gleich-
n Hyperbel, dass die senkrecht darunter liegenden Punkte Q_1
Q_2 mit dem Mittelpunkt O und dem Scheitel A der Hyperbel
armonische Punkte bilden, so schneidet die Scheiteltangente
er Verbindungslinie des Mittelpunktes O mit P_4 ein Stück OR
elches die mittlere Proportionale zu OA und OQ_1 ist.

Zugleich geht hieraus hervor: Wenn O, A, Q_1 und Q_2 vier harmonische Punkte sind, und man halbirt den Sector OP_2A, so dass Sect. $OP_4A = \frac{1}{2}$ Sect. OP_2A ist, so hat man damit auch den Sector OP_1A halbirt, denn man hat nur $OP_3 = OR$ zu machen, so ist Sect. $OP_3A = \frac{1}{2}$ Sect. OP_1A.

Diese Beziehungen lassen sich zu einer Construction von Punkten einer gleichseitigen Hyperbel verwenden, wenn der Mittelpunkt O und der Scheitel A derselben gegeben sind. Man wählt nämlich vier harmonische Punkte O, A, Q_1 und Q_2, construirt über OQ_1 und OQ_2 als Durchmesser Halbkreise, welche die in A auf OA errichtete Senkrechte in R und R_1 schneiden, trägt OR_1 von O aus auf OR bis P_4 ab, so ist P_4 ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel.

Andererseits lässt sich hierauf, wenn die gleichseitige Hyperbel gegeben ist, eine Construction des zu A zugeordneten vierten harmonischen Punktes zu O, A und Q_1 gründen, wie auch eine Construction des zu O conjugirten vierten harmonischen Punktes zu O, A und Q_2.

Construirt man ferner in P_4 unter Beibehaltung derselben Bedingungen die Tangente P_4T an die gleichseitige Hyperbel, so ist:

$$\overline{P_4T^2} = \left(x_4 - \frac{a^2}{x_4}\right)^2 + y_4^2$$

$$\overline{P_4T^2} = \frac{y_4^2(x_4^2 + y_4^2)}{x_4^2}$$

Da aber die Bedingung besteht:

$$\text{Sect. } OP_4A = \tfrac{1}{2}\,\text{Sect. } OP_2A,$$

so folgt nach (59):

$$x_4^2 + y_4^2 = ax_2,$$

also:

$$\frac{y_4^2}{x_4^2} = \frac{x_2 - a}{x_2 + a}$$

Mithin erhält man:

$$\overline{P_4T^2} = \frac{ax_2(x_2 - a)}{x_2 + a}$$

$$\overline{P_4T^2} = \frac{OA\,.\,OQ_2\,.\,AQ_2}{OA + OQ_2}$$

$$\overline{P_4T^2} = \frac{OA\,.\,OQ_2\,.\,AQ_1 + OA\,.\,OQ_2\,.\,Q_1Q_2}{OA + OQ_2}$$

Mit Anwendung der Proportion (64) ergiebt sich hieraus:

$$\overline{P_4T^2} = \frac{OA \,.\, OQ_2 \,.\, AQ_1 + \overline{OQ_2}^2 \,.\, AQ_1}{OA + OQ_2}$$

(66) $$\overline{P_4T^2} = AQ_1 \,.\, OQ_2 = OA \,.\, Q_1Q_2$$

Daraus fliesst der Satz: Sind O, A, Q_1 und Q_2 vier harmonische Punkte auf der Axe einer gleichseitigen Hyperbel, und bestimmt man P_4 so auf dem Hyperbelbogen, dass: $\operatorname{Sect} OP_4A = \frac{1}{2} \operatorname{Sect} OP_2A$ ist, dann ist die Tangente in P_4 die mittlere Proportionale zwischen AQ_1 und OQ_2 oder zwischen OA und Q_1Q_2

Wir haben vorhin erhalten:

$$\frac{y_4^2}{x_4^2} = \frac{x_2 - a}{x_2 + a}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\overline{OQ_4}^2}{\overline{Q_4P_4}^2} = \frac{OA + OQ_2}{AQ_2} = \frac{OA(Q_1Q_2 + AQ_1)}{AQ_1 \,.\, AQ_2},$$

wenn man die Proportion (64) berücksichtigt.. Mithin resultirt:

$$\overline{OQ_4}^2 : \overline{Q_4P_4}^2 = OA : AQ_1$$

Fällt man von Q_4 die Senkrechte Q_4N auf OP_4, so ist:

$$\overline{OQ_4}^2 : \overline{Q_4P_4}^2 = ON : NP_4$$

Aus beiden Proportionen ergiebt sich:

$$OA : AQ_1 = ON : NP_4$$

d. h.

$$AN \parallel Q_1P_4$$

Hierauf kann man, wenn die gleichseitige Hyperbel gegeben ist, eine Construction des zu O conjugirten vierten harmonischen Punktes zu O, A und Q_2 gründen. Man construire über OQ_2 als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die Scheiteltangente in R_1 schneidet, mache $OP_4 = OR_1$, fälle von P_4 die Senkrechte P_4Q_4 auf OQ_2 und von Q_4 die Senkrechte Q_4N auf OP_4; ziehe durch P_4 die Parallele zu AN, so schneidet diese Parallele die Hyperbelaxe in dem zu O zugeordneten vierten harmonischen Punkt Q_1.

§ 19.

Gehen wir nun zur Betrachung des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus über. Nehmen wir hierbei als

Leitlinie dieselbe Hyperbel wie beim geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$z = c$$

als Directorebene demnach die XZ-Ebene und die Y-Axe als singuläre Kante, so müssen die erzeugenden Geraden den Gleichungen genügen:

$$y = v; \quad x = uz,$$

so dass man als Gleichung des in Rede stehenden Cono-Cuneus erhält:

$$\frac{c^2 x^2}{a^2 z^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{67}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass x jeden beliebigen Wert annehmen kann. Ferner folgt daraus, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene den einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) in einer Hyperbel schneidet, deren Mittelpunkt auf der Z-Axe liegt, und deren Axen bezüglich in die Ebenen der xz und der yz fallen. Darin stimmen die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei überein. Während aber beim geteilten alle ausgeschnittenen Hyperbeln dieselbe reelle Axe haben, wachsen beim einfachen diese Axen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante. Die reellen Axen der Hyperbeln des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus verhalten sich also genau so wie die imaginären der Hyperbeln des geteilten, und umgekehrt sind die imaginären Axen der Hyperbeln des einfachen einander gleich wie die reellen derjenigen des geteilten.

Hieraus folgt, dass beim einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) die Scheitel der ausgeschnittenen Hyperbeln von $z = \infty$ bis $z = 0$ sich einander nähern, bis sie für $z = 0$ zusammenfallen, während die Entfernung der Scheitel der Hyperbeln des geteilten constant bleibt. Die beiden Teile des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) liegen daher nicht von einander getrennt, sondern treffen in der singulären Kante zusammen, womit die Bezeichnung „einfach" zusammenhängt.

Die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei unterscheiden sich in Betreff der ausgeschnittenen Hyperbeln noch darin, dass beim geteilten die Zweige der Hyperbeln sich von ihrer reellen Axe mit wachsendem Abstande von der singulären Kante entfernen, während sie umgekehrt beim einfachen sich mit wachsendem Abstande von der singulären Kante ihrer reellen Axe nähern.

Der einfache gerade hyperbolische Cono-Cuneus stimmt wieder arin mit dem geteilten überein, dass auch bei ihm die Brennpunkte ler ausgeschnittenen Hyperbeln auf einer Hyperbel liegen, deren Gleichung ist:

(68) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2 z^2}{b^2 c^2} = 1$$

Der Mittelpunkt dieser Hyperbel ist demnach der Coordinatenanfang, ihre reelle Axe $2a$ liegt in der X-Axe, ihre imaginäre $2\frac{bc}{a}$ in der Z-Axe.

Berücksichtigen wir hierbei die Gleichung (39), so resultirt der Satz: Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel, so liegen die Brennpunkte der durch Ebenen parallel dieser Durchschnittslinie aus ihnen ausgeschnittenen Hyperbeln auf einer und derselben Hyperbel.

Die Asymptoten einer durch eine Ebene parallel der XY-Ebene aus dem einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) ausgeschnittenen Hyperpel genügen der Gleichung:

$$y = \pm \frac{bc}{az} x$$

Die Asymptoten aller dieser ausgeschnittenen Hyperbeln liegen demnach auf den beiden hyperbolischen Paraboloiden:

(69) $$\begin{cases} ayz - bcx = 0 \\ ayz + bcx = 0 \end{cases}$$

Vertauschen wir in diesen Gleichungen y mit x, so gehen dieselben über in:

(70) $$\begin{cases} axz - bcy = 0 \\ axz + bcy = 0 \end{cases}$$

Das sind aber die Flächen, auf denen die Asymptoten der Hyperbeln des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) liegen, wenn man denselben um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$ dreht.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (40) resultirt daher der Satz: Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel, und dreht man den einen um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so liegen die Asymptoten der aus beiden

Flächen durch Ebenen parallel ihrer Durchschnittslinie ausgeschnittenen Hyperbeln auf denselben beiden hyperbolischen Paraboloiden.

Da diese Paraboloide, wie beim geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus nachgewiesen worden ist, zugleich die einhüllende Fläche der Schaar von Cono-Cuneis bilden, welche durch ihre Gleichung dargestellt wird, wenn der Parameter der aus einer solchen Fläche ausgeschnittenen gleichseitigen Hyperbel variabel ist, so kann man diesen Satz auch so deuten:

Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel mit dem halben Parameter a, so bestehen die einhüllenden Flächen der beiden Flächenschaaren, welche durch die Gleichungen der beiden Cono-Cunei dargestellt werden, wenn a variabel ist, und der eine um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$ gedreht wird, aus denselben beiden hyperbolischen Paraboloiden.

§ 20.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) ergiebt sich, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten sind:

$$(71) \qquad \frac{c^2 x \xi}{a^2 z^2} - \frac{y(\eta - y)}{b^2} - \frac{c^2 x^2 \zeta}{a^2 z^3} = 0$$

Von derselben gelten analoge Beziehungen wie von derjenigen des geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus. Die Berührungspunkte derjenigen Tangentialbenen, welche die vorgelegte Fläche (67) längs einer ganzen Erzeugenden berühren, liegen auf den Durchschnittslinien der XZ-Ebene mit der Fläche. In den Punkten der singulären Kante giebt es ebenfalls je zwei Tangentialebenen, welche durch die singuläre Kante gehen und mit der YZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden.

Betrachten wir jetzt das Volumen V zwischen den Ebenen $y = 0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $x = 0$ und dem zugehörigen Teile des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67), so erhält man für dasselbe:

$$(72) \quad V = \frac{a z_0^2}{2bc} \left\{ \tfrac{1}{2} y_0 \sqrt{y_0^2 + b^2} + \tfrac{1}{2} b^2 \lg\left(\frac{y_0 + \sqrt{y_0^2 + b^2}}{b} \right) \right\}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (67) lässt sich diese Gleichung auch so schreiben:

$$(73) \quad V = \tfrac{1}{4} x_0 y_0 z_0 + \frac{ab z_0^2}{4c} \lg \left(\frac{a y_0 z_0 + bc x_0}{ab z_0} \right)$$

Ferner folgt aus der Gleichung (50), wenn man darin: $\sqrt{x_0^2 - a^2}$ durch $\frac{c y_0}{z_0}$ ersetzt:

$$(74) \quad V' = \tfrac{1}{4} x_0 y_0 z_0 - \frac{a^2 z_0^2}{4c} \lg \left(\frac{x_0 z_0 + c y_0}{a z_0} \right)$$

Vertauschen wir in (73) x mit y, d. h. drehen wir den einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so geht diese Gleichung über in:

$$(73a) \quad V = \tfrac{1}{4} x_0 y_0 z_0 + \frac{ab z_0^2}{4c} \lg \left(\frac{a x_0 z_0 + bc y_0}{ab z_0} \right)$$

Setzen wir hierin $a = b$, so resultirt:

$$V + V' = \tfrac{1}{2} x_0 y_0 z_0$$

Daraus fliesst der Satz: Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel, und dreht man den einen um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so ist die Summe der zu denselben Coordinaten x_0, y_0, z_0 gehörenden Volumina der beiden Flächen gleich dem halben Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

also $k - k_1 \equiv (\mu - 1)(y - z)^2$, woraus folgt, dass die beiden Kegelschnitte sich doppelt berühren, mit $\overline{a1}$ als Berührungssehne.

Sehen wir nach, ob diese Beziehung, die sich als notwendig herausstellte, auch hinreichend ist?

Es seien k und k_1 in doppelter Berührung. Bei passend gewähltem Coordinatensystem seien ihre Gleichungen:

$$k \equiv \xi^2 + 2\eta\zeta = 0 \qquad k_1 \equiv l\xi^2 + 2\eta\zeta = 0$$

Der Punkt 1 habe die Coordinaten $0, \eta_1, \zeta_1$
„ 2 „ „ „ ξ_2, η_2, ζ_2.

k gehöre zur $(a_1 b_2 c_3)$-, k_1 zur $(a_1 b_3 c_2)$-Collineation.

Dann wird

$$\overline{ac}: \quad \zeta_2\xi + \zeta_2\eta + \eta_2\zeta = 0 \quad \text{(Polare von 2 bis } k)$$
$$\overline{ab}: \quad l\xi_2\zeta + \zeta_2\eta + \eta_2\zeta = 0 \quad \text{(Polare von 2 bei } k_1)$$

Nun ist aber 3 einerseits der Pol von $\overline{ab}$ bei $k(l\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, andererseits der Pol von ac bei $k_1\left(\frac{\xi_2}{l}, \eta_2, \zeta_2\right)$, also muss

$$l^2 = 1 \quad \text{folglich} \quad l = -1$$

sein. ($l = 1$ würde k_1 mit k identisch machen).

Die Bedingungen sind also:

a) k und k_1 sollen sich doppelt berühren;

b) die Summe der beiden Factoren (l), wodurch $k + lk_1$ sich in lineare Factoren zerlegt, muss $= 0$ sein.

Dann kann man den Punkt 2 ganz beliebig, den Punkt 1 auf der Berührungssehne annehmen, dann erst bestimmt sich 3 eindeutig so, dass 123 in Bezug auf k und k_1 dasselbe Dreieck zum polarreciproken besitzt.

2. Die Dreiecke sind vierfach collinear, wenn $\lambda = \mu = \nu$ ist.

$k \equiv \lambda x^2 + \lambda \eta^2 + \lambda z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0$ gehört zur $(a_1 b_2 c_3)$-Collection
$k_1 \equiv \lambda x_2 + y^2 + z^2 + 2\lambda y^2 + 2zx + 2xy = 0$ „ „ $(a_1 b_3 c_2)$ „
$k_2 \equiv x^2 + \lambda y^2 + z^2 + 2yz + 2\lambda zx + 2xy = 0$ „ „ $(a_3 b_2 c_1)$ „
$k_3 \equiv x^2 + y^2 + \lambda z^2 + 2yz + 2zx + 2\lambda xy = 0$ „ „ $(a_2 b_1 c_3)$ „

also

$$k-k_1\equiv(\lambda-1)(y-z)^2 \qquad k_2-k_3\equiv(\lambda-1)(y-z)(-2x+y+z)$$
$$k-k_2\equiv(\lambda-1)(z-x)^2 \qquad k_3-k_1\equiv(\lambda-1)(z-x)(x-2y+z)$$
$$k-k_3\equiv(\lambda-1)(x-y)^2 \qquad k_1-k_2\equiv(\lambda-1)(x-y)(x+y-2z)$$

woraus man ganz deutlich die gegenseitige Lage der vier Kegelschnitte sieht. Wenn man noch beachtet, dass die Tangente an Q vom gemeinschaftlichen Punkte (1, 1, 1) der Berührungssehnen von k und k_1, k und k_2, k und k_3 sind:

$$x+\alpha y+\alpha^2 z=0 \qquad x+\alpha^2 y+\alpha z=0$$

(α eine complexe dritte Einheitswurzel) kann man die Ergebnisse so aussprechen:

Die binäre kubische Form, die $=0$ gesetzt die drei Berührungssehnen ($y-z=0$, $z-x=0$, $x-y=0$) darstellt, hat die erzeugenden gemeinschaftlichen Sehnen von k_1, k_2, k_3 ($-2x+y+z=0$, $x-2y+z=0$, $x+y-2z=0$) zur kubischen Covariante, und die Tangenten zur Hesse'schen Covariante.

Wenn man aber diese Tangenten und die zugehörige Berührungssehne zu Coordinatenaxen wählt, werden die Gleichungen einfacher:

$$\begin{aligned} k &\equiv \xi^2+2\eta\zeta=0 \\ k_1 &\equiv \xi^2+2\eta\zeta+(\eta-\zeta)=0 \\ k_2 &\equiv \xi^2+2\eta\zeta+(\alpha^2\eta-\alpha\zeta)^2=0 \\ k_3 &\equiv \xi^2+2\eta\zeta+(\alpha\eta-\alpha^2\zeta)^2=0 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} k &\equiv \xi^2+2\eta\zeta=0 \\ k_1 &\equiv \xi^2+\eta^2+\zeta^2=0 \\ k_2 &\equiv \xi^2+\alpha\eta^2+\alpha^2\zeta^2=0 \\ h_3 &\equiv \xi^2+\alpha^2\eta^2+\alpha\zeta^2=0 \end{aligned}$$

die Gleichungen erscheinen in reeller Form, wenn man statt η — ζ resp. mit $\eta+\zeta i$ und $-\eta+\zeta i$ proportionale Grössen einführt.

Der Punkt 1 kann auf der Geraden $\eta-\zeta=0$ beliebig gewählt werden, dadurch aber bestimmt sich 123 eindeutig so, dass die zugehörigen polarreciproken Dreiecke identisch werden.

3. Die Dreiecke sind in $(a_1 b_2 c_3)$ -, $(a_2 b_3 c_1)$ -, $(a_3 b_1 c_2)$-Collineationen, wenn $\lambda\mu\nu=1$ ist.

$k_1\equiv\lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2+2yz+2zx+2xy=0$ gehört zu $(a_1b_2c_3)$-Collineation
$k_2\equiv x^2+\mu y^2+\mu\nu z^2+2\mu\nu yz+2zx+2\mu xy=0$ „ „ $(a_2b_3c_1)$- „
$k_3\equiv x^2+\mu\nu y^2+\nu z^2+2\mu\nu yz+2\nu zx+2xy=0$ „ „ $(a_3b_1c_2)$- „

Diese Kegelschnittte berühren sich im Allgemeinen nicht. Beziehen wir die beiden ersten auf ihr gemeinschaftliches Poldreieck. Ihre Gleichungen seien:

$$k_1 \equiv \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$
$$k_2 \equiv l\xi^2 + m\eta^2 + n\zeta^2 = 0$$

oordinaten von 1. seien ξ_1, η_1, ζ_1. Dann sind:

: $\xi_1\xi + \eta_1\eta + \zeta_1\zeta = 0$ (Polare von 1 bei k_1)

: $l\xi_1\xi + m\eta_1\eta + n\zeta_1\zeta = 0$ (Polare von 1 bei k_2)

oordinaten von 3: $l\xi_1, m\eta_1, n\zeta$ (Pol von $\overline{ab}$ bei k_1)

oordinaten von 2: $\frac{\xi_1}{l}, \frac{\eta_1}{m}, \frac{\zeta_1}{n}$ (Pol von bc bei k_2)

m aber wird ac einerseits:

$l^2\xi_1\xi + m^2\eta_1\eta + n^2\zeta_1\zeta = 0$ (als die Polare von 3 bei k_2

rseits:

$\frac{\xi_1}{l}\xi + \frac{\eta_1}{m}\eta - \frac{\zeta_1}{n}\zeta = 0$ (als die Polare von 2 bei k_1)

s also sein

$$l^3 = m^3 = n^3 \quad (= 1, \text{ wie wir annehmen})$$

vei wesentlich verschiedene Fälle sind zu unterscheiden:

a) $l = m = 1, \quad n = \alpha,$

ind

$$k_1 \equiv \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$
$$k_2 \equiv \xi^2 + \eta^2 + \alpha\zeta^2 = 0$$
$$k_3 \equiv \xi^2 + \eta^2 + \alpha^2\zeta^2 = 0$$

önnen aber nicht in reelle Form übergeführt werden.

b) $l = 1, \quad m = \alpha, \quad n = \alpha^2,$

ind

$$k_1 \equiv \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$
$$k_2 \equiv \xi^2 + \alpha\eta^2 + \alpha^2\xi^2 = 0$$
$$k_3 \equiv \xi^2 + \alpha^2\eta^2 + \alpha\zeta^2 = 0$$

eser Fall tritt ein, wenn die kubische Gleichung, deren Wur- m, n sind, eine reine Gleichung wird. Dies bedingt das itige Verschwinden der beiden wohl bekannten simultanen nten, die bei Salmon mit Θ und Θ' bezeichnet werden.

den obigen drei Kegelschnitten kann ein vierter auf dreierlei bestimmt werden, dass das System der vier Kegelschnitte polarreciproke Dreiecke zulässt. Diese Kegelschnitte sind:

$$k_4 \equiv \xi^2 + 2\eta\zeta = 0, \quad k_5 \equiv \eta^2 + \zeta\xi = 0, \quad k_6 \equiv \zeta^2 + 2\xi\eta = 0$$

Die sechs Kegelschnitte endlich bilden ein System, in Bezug auf welches die Dreiecke 1 2 3 und abc:

$$\begin{array}{llll} \overline{23}: & \alpha\xi + \eta + \zeta = 0 & \overline{bc}: & \alpha^2\xi + \eta + \zeta = 0 \\ \overline{31}: & \xi + \alpha\eta + \zeta = 0 & \overline{ca}: & \xi + \alpha^2\eta + \zeta = 0 \\ \overline{12}: & \xi + \eta + \alpha\zeta = 0 & \overline{ab}: & \xi + \eta + \alpha^2\zeta = 0 \end{array}$$

sechsfach polorreciprok sind.

Unter den 6 Kegelschnitten giebt es höchstens vier reelle, die beiden Dreiecke sind immer imaginär.

Klausenburg (Ungarn) 1884 Februar.

J. Vályi.

2.

Ueber drei geometrische Kreisörter.

Bei der Construction von Dreiecken aus gegebenen Stücken spielt die Lehre von den geometrischen Oertern eine wichtige Rolle. Wenn ich im folgenden auf drei solche Oerter die Aufmerksamkeit lenke, so bin ich weit entfernt zu behaupten, dass dieselben nicht schon anderweitig bekannt seien; indessen habe ich sie in keinem der bekannteren Werke über elementare Geometrie angetroffen. Auch dürfte die analytische Ableitung derselben, wenigstens meines Wissens, mir eigentümlich sein. Ich gehe nun an die Formulirung der Aufgabe:

„Wenn bei constanter Basis und constantem Radius des umschriebenen Kreises eines Dreieckes der Scheitel des Dreieckes sich längs der Peripherie des Kreises bewegt, so ist die Frage nach den geometrischen Oertern, welche der Schwerpunkt des Dreieckes, der Durchschnittspunkt seiner Höhen und der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises beschreiben.“

Das System rechtwinkliger Coordinaten werde für alle drei Fälle so gelegt, dass die X-Axe mit der Basis des Dreieckes zusammenfällt, während die Y-Axe den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises enthält. Der Punkt A der Basis habe die Coordinaten $(-p, 0)$, der Punkt B $(+p, 0)$. Der Scheitel des Dreieckes besitze die variablen Coordinaten (x_1, y_1); endlich sei die Gleichung des Kreises:

$$(y-q)^2+x^2 = r^2 \tag{1}$$

p und q sind an die Bedingung gebunden:

$$p^2+q^2 = r^2$$

Nimmt man für die Coordinaten des Schwerpunktes S ξ und η, so ist bekanntlich

$$\xi = \frac{x_1}{3} \qquad \eta = \frac{y_1}{3}$$

Da nun x_1 und y_1 einem Punkte des Kreises angehören, also die Gleichung (1) identisch erfüllen müssen, so ergibt sich für den geometrischen Ort als Gleichung

$$\left(\eta-\frac{q}{3}\right)^2+\xi^2 = \left(\frac{r}{3}\right)^2$$

ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Ordinatenaxe in der Entfernung $\frac{q}{3}$ sich befindet, und dessen Radius gleich dem dritten Teile des Radius des umschriebenen Kreises ist.

Es sei H der Schnittpunkt der Höhen, seine Coordinaten ξ und η; übrigens sei alles wie zuvor; für ξ und η findet sich:

$$\xi = x_1 \qquad \eta = -\frac{\xi^2-p^2}{y_1} = \frac{p^2-x_1^2}{y_1}$$

Aus der Gleichung (1) aber folgt:

$$p^2-x_1^2 = y_1^2-2y_1q$$

mithin

$$\eta = y_1-2q$$

und daher also Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\xi^2+(\eta+q)^2 = r^2$$

d. i. ein Kreis, der mit dem umschriebenen gleichen Radius hat, und dessen Mittelpunkt auf der Ordinatenaxe in der Entfernung $-q$ liegt.

Etwas schwieriger gestaltet sich der Beweis für den dritten Fall den geometrischen Ort des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises betreffend, da das Auftreten von Wurzelgrössen weitläufige Rechnungen notwendig macht. Indessen ist durch einige einfache geometrische Betrachtungen ich glaube, möglichst einfach zu gestalten.

Aus der bekannten Gleichung für die Grösse des Radius des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises folgt für $\omega\tau = \eta$ der Wert

$$\eta = \frac{2p \cdot y_1}{2p + \sqrt{y_1^2 + (x_1 - p)^2} + \sqrt{y_1^2 + (x_1 + p)^2}}$$

Schafft man die Wurzelzeichen weg, und drückt mit Hilfe der Gleichung (1) alle x_1 durch y_1 aus, so resultirt folgende Bedingungsgleichung:

$$\alpha) \quad y_1 = \frac{\eta^2 + 2(r-q)\eta}{r-q}$$

Andrerseits muss der Punkt ω aus leicht einzusehenden Gründen immer auf der Geraden CO' liegen, deren Gleichung lautet:

$$\beta) \quad y = \frac{y_1 + r - q}{x_1} x + q - r$$

Eliminirt man mit Hilfe von (1) aus (β) die Grösse x_1, setzt ferner $x = \xi$ und $y = \eta$ aus der Gleichung (α), so wird

$$\frac{-p^2 \pm p\sqrt{r^2 - q^2 + y_1(r+q)}}{r+q} + r - q = \frac{y_1 + r - q}{\sqrt{r^2 - (y_1 - q)^2}} \xi$$

nach gehöriger Reduction folgt hieraus

$$\frac{p^2}{q+r} = \frac{\xi^2}{r+q+y_1}$$

Ersetzt man hierin den Wert y_1 durch η gemäss (α), so findet sich als Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\xi^2 + (\eta + r - q)^2 = 2r(r-q)$$

d. i. ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem unteren Durchschnitt des umschriebenen Kreises mit der Ordinatenaxe liegt (O'), und dessen Radius gleich ist AO'.

Der Beweis für den letzteren Ort lässt sich auch unschwer synthetisch führen. Bezeichnet man nämlich die Dreieckswinkel in gewohnter Weise mit α, β, γ, so ist

$$VAO' = \frac{\gamma}{2}$$

Nennt man einen Basiswinkel des gleichschenkligen Dreieckes $A\omega O'$ ψ, so ist wegen

$$\text{Wkl. } AO'C = \beta$$

$$\psi = 90^0 - \frac{\beta}{2}$$

und daher

$$\text{Wkl. } \omega A V = \psi - \frac{\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{w. z. b. w.}$$

Es würde mich zu weit führen alle Fälle anzuführen, in denen vorstehende Oerter sehr einfache und elegante Dreiecksconstructionen erlauben; es genüge nur für den letzten Fall drei Aufgaben dieser Art anzuführen:

Von einem Dreiecke seien die Radien des um- und eingeschriebenen Kreises und die Basis oder ihr Gegenwinkel gegeben; oder: von einem Dreiecke sei die Basis, die Summe der Scheitelseiten und der Radius des eingeschriebenen Kreises gegeben. In diesen Fällen erlaubt der letzte geometrische Ort eine weit einfachere Construction als dies mit Hilfe der Rechnung und nachheriger Construction der berechneten Formel geschehen kann.

Karl Zelbr,
Assistent der k. k. Sternwarte zu Wien.

3.

Ueber die vollkommenen Zahlen, insbesondere über die bis jetzt zweifelhaften Fälle $2^{40}.(2^{41}-1)$, $2^{46}.(2^{47}-1)$ und $2^{52}.(2^{53}-1)$.

In einem Aufsatze von Krafft über die numeri perfecti (Comm. Petrop. T. VII. p. 7—14.) giebt dieser im Ganzen zehn solcher Zahlen an, als die einzigen bekannten. Die vollkommenen Zahlen (numeri perfecti) sind bekanntlich solche, für welche die Teilersumme der Zahl gleich dieser Zahl selbst ist. Die einfachste dieser Zahlen ist $6 = 1 + 2 + 3$; die allgemeine Formel ist $2^n(2^{n+1}-1) = N$ und zwar mit der Bedingung, dass der zweite Factor eine Primzahl ist. Bildet man nämlich unter dieser Voraussetzung die Divisorensumme von $2^n.(2^{n+1}-1)$, so erhält man für diese $(2^{n+1}-1).2^{n+1}$, mithin das Doppelte von N. Zieht man von der Divisorensumme N selbst ab, um die Summe der aliquoten Teiler zu erhalten, so ist letztere demnach gleich N.

Die von Krafft aufgeführten zehn numeri perfecti sind nun (2^2-1), $2^2(2^3-1)$, $2^4(2^5-1)$, $2^6(2^7-1)$, $2^{12}(2^{13}-1)$, $2^{16}(2^{17}-1)$, $(2^{19}-1)$, $2^{30}(2^{31}-1)$, $2^{40}(2^{41}-1)$ und $2^{46}(2^{47}-1)$.

Für die Zahlen 2^2-1 bis $2^{19}-1$ ist ihre Eigenschaft als Primzahlen sofort zu constatiren; $2^{31}-1=2147483647$ hat L. Euler als Primzahl erwiesen, und ich fand dies dadurch bestätigt, dass für die vier zusammengehörigen Formenclassen (1, 0, 13398); (22, 0, 609); (58, 0, 231); 42, 0, 319) nur eine einzige quadratische Darstellung möglich ist, nämlich $22.7001^2+609.1325^2$. Euler selbst hat den Nachweis dadurch geliefert, dass er die Zahl durch sämmtliche Primzahlen von den einzig möglichen Formen $248z+1$ und $248z+63$ bis zu der Quadratwurzel hin dividirte, ohne dass irgend einmal der Divisor aufging.

In Betreff der Zahlen $2^{41}-1$ und $2^{47}-1$ bemerkt Krafft, dass Euler in einer gelegentlichen Bemerkung diese für Primzahlen erklärt habe. Ich fand mich nun bewogen, nachdem ich schon vorher $2^{34}-1=223.616318177$ und $2^{43}-1=431.20408568497$ gefunden hatte[1]), auch jene beiden einer Prüfung zu unterwerfen. Es sei mir gestattet, das hierbei beobachtete Verfahren für eine der beiden, etwa $2^{47}-1$ kurz anzugeben.

Durch Ausziehung der Quadratwurzel aus $2^{47}-1=1407374883553$… findet man $2^{47}-1=11863283^2+4817238.1^2$.

Da nun jeder Prim-Divisor von 2^n-1, wenn n eine Primza… ist, die Form $2nz+1$ haben muss, also für $2^{47}-1$ die Form $94z+$… mit anderen Worten, da jeder Divisor $\equiv 1 (47)$ ist, so muss au… -47 quadratischer Rest jedes Divisors sein. Es kam also dara… an, aus obiger quadratischen Darstellung, deren Determinant… -4817238 ist, eine andere zu gewinnen, deren Determinante de… Factor 47 enthielt. Setzt man zu dem Ende $(11863283-\alpha)^2$ sta… 11863283^2, so hat man als Ausgleich zu dem zweiten Glied… $2.11863283\alpha-\alpha^2$ zu addiren. Für $\alpha=12$ wird dann der neu… Wert des zweiten Gliedes $\equiv 0 (47)$ und die weiteren Werte für … unter welchen diese Congruenz fortbesteht, sind durch die For… $47x+2$ bestimmt. So findet man unter anderen

$$2^{47}-1=11863081^2+2.3.43.47\,(629^2)$$

Behält man jetzt für die Determinante die Factoren 3.43.47 bei, … muss von da an für α die Form $6063x+1643$ gebraucht werde…, damit das zweite Glied $\equiv 0 (3.43.47)$ bleibt. Es ergiebt sich dar… ferner als Darstellung

$$2^{47}-1=11843249^2+2.3.43.47.17.37.73.853.$$

1) Zur Zeit war mir unbekannt, dass Krafft in dem citirten Aufsatze di… beiden Zerlegungen schon angiebt.

Auf diese beiden Darstellungen soll sich die Untersuchung im weiteren Verlaufe gründen. Das zweite Glied oder genauer gesprochen, der Coefficient der zweiten Glieder ist unter Hinzunahme des Vorzeichens (—) in beiden Fällen nichts anderes, als die Determinante. Erwägt man noch, dass $2^{47}-1$ mit 2 multiplicirt sich schreiben lässt $(2^{24})^2-2.1^2$, dass also -2 für sämmtliche Divisoren Rest sein muss, so können diese nur den Formen $8n+1$ oder $8n+4$ angehören. Sei also $N=2^{47}-1$, und F ein Factor von N, so folgt aus der ersten Dasstellung, dass $\left(\frac{F}{3}\right)$ und $\left(\frac{F}{43}\right)$ zugleich $=+1$ oder $=-1$ ist, da ja $\left(\frac{F}{47}\right)$ stets $=+1$ ist.

Aus der zweiten Darstellung ergiebt sich dann ferner, dass für

$$\left(\frac{F}{17}\right),\ \left(\frac{F}{37}\right),\ \left(\frac{F}{73}\right) \text{ und } \left(\frac{F}{853}\right)$$

die Anzahl der Nichtreste eine gerade sein muss. Die Anzahl der möglichen Primdivisoren ist somit wesentlich verringert, und man findet, wenn man für die zurückbleibende die Division ausführt, $N = 2351.59862819377$. In ähnlicher Weise findet man

$$2^{41}-1 = 2199023255551 = 13767.164511353.$$

Endlich untersuchte ich noch $2^{53}-1$ und fand dies gleich

$$9007199254740991 = 69431.129728784761.$$

Beiläufig sei erwähnt, dass in allen diesen Zerlegungen der zweite Factor, sowol wie der erste Primzahlen sind.

Als Resultat der Untersuchungen ergiebt sich demnach, dass die aufeinanderfolgenden Zahlen $2^{37}-1$, $2^{41}-1$, $2^{43}-1$, $2^{47}-1$, $2^{53}-1$ keine Primzahlen sind und dass also die vollkommenen Zahlen bis jetzt auf die bekannten acht beschränkt bleiben müssen, nämlich

$$2(2^2-1),\ 2^2(2^3-1),\ 2^4(2^5-1),\ 2^6(2^7-1),\ 2^{12}(2^{13}-1),\ 2^{16}(2^{17}-1),$$
$$2^{18}(2^{19}-1),\ 2^{30}(2^{31}-1).$$

Seelhoff.

4.

Zur Analyse sehr grosser Zahlen.

In dem Folgenden möchte ich vorläufig nur kurz eine Methode angeben, welche die Schwierigkeiten der Analyse sehr grosser Zahlen wenigstens bedeutend vermindert. Ich habe hierbei Zahlen im Auge, welche über 1000 Million hinausgehen; denn bis zu dieser Grenze

und in manchen Fällen auch noch darüber hinaus verdienen die von mir der Mehrzahl nach erst gefundenen cca 160 Determinanten, welche sämtlich für die entsprechenden Zahlengattungen nur Darstellungen in der Form (m, o, n) zulassen, bei weitem der Vorzug.

Die Methode besteht wesentlich darin, eine Anzahl von einfachst möglichen Determinanten auf leichte Weise zu gewinnen, vermöge deren sich die in Frage kommenden Primdivisoren je auf die Hälfte reduciren lassen, so dass also beispielsweise sich deren Anzahl bei 10 Determinanten bis auf den 1024ten Teil vermindert. Ich lege zu ihrer Auseinandersetzung eine bestimmte Zahl zu Grunde, um mich kurz fassen zu können; es sei dies

$$N = 2^{64} + 1 = 18\cdot446744\cdot073709\cdot551617.$$

Setzt man

$$N = (4\,294\,967\,296 - \alpha)^2 + (8\,589\,934\,592 - \alpha)\,\alpha + 1$$

und nennt das erste Glied rechts A, die beiden anderen zusammengenommen B, die beiden Teile B_1 und B_2, so handelt es sich darum, B als ein Product $m.n\ldots b^2$ darzustellen, wobei dann, jenachdem B positiv oder negativ ist, die gesuchte Determinante $\mp mn\ldots$ wird. Die Primzahlen $m, n\ldots$ und ebenso die Functionen von b^2 können nur solche sein, für welche $\left(\frac{N}{m}\right)$, $\left(\frac{N}{n}\right)$ u. s. w. $= +1$ ist. In unserem Falle ist dies zunächst 13. Man hat aber $B_1 \equiv 5\,(13)$. Setzt man daher $(5 - \alpha)\,\alpha \equiv -1\,(13)$, damit das ganze B durch 13 teilbar wird, oder auch statt 5 die congruente Zahl -8, so ist die Congruenz $\alpha^2 + 8\alpha \equiv 1\,(13)$ zu lösen. Es sei zu diesem Zwecke $\alpha = -4 + z$, so ergiebt sich $z^2 - 4 \equiv 0\,(13)$ und $z = \pm 2$, also $\alpha \equiv -4 \pm 2$ oder $= 13u + 7$ oder 11. Ferner hat man $B_1 \equiv 57\,(13^2)$. Setzt man wieder $(57 - \alpha)\,\alpha \equiv -1\,(13^2)$ oder $\alpha^2 + 112\alpha \equiv 1\,(13^2)$ und $\alpha = -56 + z$, so findet man $z^2 - 95 \equiv 0\,(13^2)$ und $z = \pm 67$, also $\alpha \equiv -56 \pm 67 = 13^2u + 11$ oder 46.

Für $\alpha = 13u + 7$ oder 11 oder für $\alpha = 13^2u + 11$ oder 46 wird also B stets den Factor 13, resp. 13^2 haben. Bestimmt man den Wert von α in gleicher Weise für die übrigen hierher gehörigen Primzahlen bis 100 oder 200, so lassen sich leicht Combinationen finden, um gleichzeitig eine Anzahl von bestimmten Factoren resp. von deren Quadraten in B einzuführen, so dass die neuen, sich noch ergebenden Factoren nicht zu gross werden. Diese selbst kann man dann, da sich die Wurzeln der betreffenden Congruenz sofort ergeben, selbst mit in die Reihe der übrigen aufnehmen. Jenachdem man nun den Wert für α positiv oder negativ gewählt hat, wird die Determinante negativ resp. positiv.

›jenigen Factoren m ausgeschlossen waren, für welche l ist, so setze man ferner

$$\text{= }2 = 2(3037000499 - \alpha)^2 + 2(6074000998 - \alpha)\,\alpha + 11857053615$$

wieder die Teile rechts A und B, resp. B_1 und B_2.

:eten die Primzahlen m ein, für welche $\left(\frac{2N}{m}\right) = +1$ ist. st 3. Man hat $B_1 \equiv 1\,(3)$ und $B_2 \equiv 0\,(3)$, also ist die $2(\alpha^2 + 2\alpha) \equiv 0\,(3)$ oder $\alpha^2 + 2\alpha \equiv 0\,(3)$ zu lösen. Zu sei $\alpha = -1 + z$, dann ist $z = \pm 1$, woraus $\alpha = 3u + 0$ t. Ferner $B_1 \equiv 7\,(3^2)$ und $B_2 \equiv 6\,(3^2)$, mithin $2(\alpha^2 + 2\alpha)$ er $\alpha^2 + 2\alpha \equiv 3\,(3^2)$. Man erhält $\alpha = 3^2u + 1$ oder 6 u. s. w.

:h kann man noch für

$$797000524 - \alpha)^2 + 3(4959401048 - \alpha)\,\alpha + 7531927889$$

:fahren, wobei jedesmal eine Anzahl der früheren Prim-ritt, um durch andere ersetzt zu werden. Es ist wol kaum emerken, dass die rechte Seite der jedesmaligen Congruenz rmen ist, dass sie sich zunächst durch den gewählten ı $a . A$ teilen lässt.

›se Weise erhielt ich für die vorliegende Zahl unter anderen ›terminanten, deren Vorzeichen weggelassen ist, weil die er Form $4n+1$ ist.

3.11.67.157.673
3.13.31.599.1069
13.17.29.317.421
3.5.13.97.563.757
13.191.2777
41.97.1597
3.5.397.2113
3.7.19.421.3041
13.163.193.1091 u. s. w.

›m Canon arithmeticus von C. G. J. Jacobi kann man ohne ür die Primzahlen bis 1000 die quadratischen Reste ent-l benutzt man die Determinanten mit grösseren Factoren Ende hin, so machen auch diese keine besonderen iten.

Dies ist in kurzen Umrissen die Methode, um die Determinanten zu finden; wie dieselbe benutzt wird, um die nicht geeigneten Primzahlen auszuschliessen, kann als bekannt vorausgesetzt werden.

Was nun den speciell vorliegenden Fall anderweit betrifft, so hatte ich schon früher festgestellt, dass $2^{64}+1$ keine Primzahl ist und ich vermutete ferner auf Grund einiger Untersuchungen, dass einer der Factoren nicht allzu hoch sein würde. Meine Prüfung erstreckte sich daher mit Hülfe obiger Determinanten auf die Zahlen bis 400000, und ich blieb zuletzt bei den Zahlen 211969, 267649 und 274177 stehen, deren letzte ein Divisor von $2^{64}+1$ ist. Man hat nämlich, wie bereits von M. Landry (Mondes 2. série LII.) gefunden:

$$18446744073709551617 = 274177 . 67280421310721$$

Bis jetzt kennt man von den Zahlen $2^{2^n}+1$ vier als zusammengesetzte:

$2^{2^5}+1$ mit dem Factor 641. (L. Euler. Mémoires de Berl. Année 1772).

$2^{2^{12}}+1$ mit dem Factor 114689 }

$2^{2^{23}}+1$ mit dem Factor 167772161 } Bulletin de l' Ac. des scienc. St. Petersburg 1878 u. 187. J. Pervouchine.

$2^{2^{26}}+1$ mit dem Factor 274177.

direct analysirt sind die erste und letzte.

Beiläufig erwähne ich noch die beiden Darstellungen als Summe zweier Quadrate.

$$2^{64}+1 = 4294967296^2+1$$
$$4046803256^2+1438793759^2.$$

Bremen, März 1885. P. Seelhoff.

5.

Bemerkungen über Gleichungsauflösung.

1.

Die Methoden, Gleichungen aufzulösen, wie sehr sie auch im Einzelnen von einander abweichen mögen, haben doch das Eine ge-

einsam: Sie beruhen sämtlich in letzter Instanz auf irgend einem unendlichen Process, der zur Grenze führt. [Dass der Process in besondern Fällen auch abbrechen kann, ist bekannt.] Dieses gilt für die sogenannten exacten Methoden, welche in der Reduction der Gleichungen der vier ersten Grade auf Wurzelgrössen bestehen, ganz ebenso, wie bei dem Newton'schen Näherungsverfahren oder bei Lagrange's Entwicklung einer Wurzel der Gleichung in einen Kettenbruch.

Die folgende Bemerkung bezieht sich auf alle derartige Algorithmen und hat den Zweck, die überaus grosse Mannichfaltigkeit denkbarer Methoden der Gleichungs**auflösung** zu veranschaulichen.

Sei $f(x = 0$ die Gleichung, um deren Auflösung es sich handelt, so bringe man dieselbe auf irgend eine Weise auf die Form

$$x = \varphi(x),$$

was sich auf unendlich viele Arten bewerkstelligen lässt.]

Alsdann wähle man einen beliebigen Anfangswert und bilde dann vermittelst der Function φ successive die Reihe von Werten:

$$x_1 = \varphi(x_0)$$
$$x_2 = \varphi(x_1)$$
$$x_3 = \varphi(x_2)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Erweist sich sich die gefundene Reihe als eine einem bestimmten Grenzwert zustrebende Zahlenfolge, so ist der Grenzwert eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Der Beweis dieser Behauptung folgt unmittelear aus den Prämissen.

2.

Die Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung kann entweder **direct** in Angriff genommen, also ein dazu dienlicher unendlicher Process aufgestellt werden, oder man **reducirt** die gegebene Gleichung zunächst auf eine andere, deren Auflösung bereits bekannt ist. Dieses letztere Verfahren, die Reduction, ist es nun, welches

vorzugsweise gemeint wird, wenn man von der Auflösung der Gleichungen spricht. Man weiss, auf wie mannichfaltige Weise sich die Reduction der Gleichungen der vier ersten Grade auf Wurzelgrössen, also auf die binomische Gleichung $x^n = w$, bewerkstelligen lässt.

Das hohe Interesse dieser Reductionen (Auflösungen) für den Mathematiker ist wohl vornehmlich in dem Umstande begründet, dass die Function $\sqrt[n]{w}$ nur von der einzigen Variabeln w abhängt, falls man nämlich den Wurzelexponenten n nicht ebenfalls als einen Paramater des Problems ansehen will.

Man kann aber auch, wie seit Jerrard's Entdeckung betreffs der Gleichung fünften Grades bekannt ist, die Gleichungen der fünf ersten Grade auf Functionen von nur einer Variabeln zurückführen, nämlich auf die trinomischen Gleichungen $z^n - z = w$.

Allerdings darf nicht übersehen werden, dass die Auffassung der Wurzeln der Gleichung $z^n - z = w$ als Functionen nur eines Parameters als eine künstliche, eigentlich nicht ganz zutreffende angesehen werden muss; denn w ist im Allgemeinen eine complexe Grösse, und eine Function $f(u+iv)$ einer complexen Veränderlichen $u+iv$ wird, wenn man die Berechnung durchführt, in den meisten Fällen (nicht immer) doch schliesslich von Functionen zweier Argumente abhängig.

Die Function $\sqrt[n]{w}$ dagegen lässt sich, wie man weiss, auf die Form bringen:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{u^2+v^2} \,.\, e^{\frac{i}{n}\left(2k\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}\right)},$$

also das Product zweier Functionen je eines linearen Arguments darstellen, und hierin allein beruht meines Erachtens der theoretische Vorzug der Reduction einer Gleichung auf Wurzelgrössen vor der Reduction auf beliebige andere Functionen nur eines complexen Arguments, wie beispielsweise auf die Wurzeln der Gleichung $z^n - z = w$.

3.

Der folgende Algorithmus, welcher zur Berechnung der Wurzeln der Gleichung $z^n - z = w$ dient, scheint mir aus mehreren Gründen bemerkenswert.

Berechnet man vermittelst der Formel

$$z_{k+1} = \sqrt[n]{w + z_k}$$

n von einem beliebigen Anfangswerte z_0 ausgeht und einen von den n Wurzelwerten $\sqrt[n]{}$, aber stets denselben, be- ccessive die Reihe $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, \ldots$, so convergirt u einem bestimmten Grenzwert, und dieser ist eine Wurzel enen Gleichung.

ch im Besitz eines allgemeinen und stringenten Beweises hauptung noch nicht bin, so wäre es nicht undenkbar (wie- unwahrscheinlich), dass dieselbe noch eingeschränkt werden

icht genügt Folgendes zur Verification derselben.

ir $w = 0$ ist der Satz richtig. Sei nämlich $z_0 = \varrho_0 e^{i\vartheta_0}$ der Anfangswert, so folgt leicht, wenn man jedesmal den n Wurzelwerte wählt,

$$= e^{i\left(\frac{2\nu\pi}{n} + \frac{2\nu\pi}{n^2} + \frac{2\nu\pi}{n^3} + \ldots + \frac{2\nu\pi}{n^h} + \frac{\vartheta_0}{n^h}\right)} \sqrt[n^\nu]{\varrho_0}$$

$$\text{also für } h = \infty,\ z_\infty = z = e^{i\frac{2\nu\pi}{n-1}}.$$

für $\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1$ in der Tat $n-1$ der n Wurzeln hung $z^n - z = 0$. Die Wurzel $z = 0$ folgt freilich hieraus d bleibt demnach auf diesem Wege unerreich-

s ist leicht für einen beliebigen positiven reellen Wert w Wurzel der Gleichung auf diesem Wege numerisch zu be-

spiel. $z^5 - z = 100$, also $z = \sqrt[5]{100 + z}$.

etze willkürlich $z_0 = 1000$, so folgt:

$$z_1 = 4{,}0576$$
$$z_2 = 2{,}5320$$
$$z_3 = 2{,}5245$$
$$z_4 = 2{,}5244.$$

ist eine reelle Wurzel der Gleichung so genau, als es sich t fünfstelliger Logarithmen ausführen lässt, gefunden.

erkung. Für complexe Grössen verliert dieser Algo- iel von seiner Einfachheit, weil die jedesmalige Separation en und Imaginären Umstände macht. Man könnte dem- er seine Einfachheit erhalten, wenn man im Besitz einer

Tafel wäre, in welcher die Logorithmen complexer Zahlen (für die Basis 10) zusammengestellt sind. Die Aufgabe, eine derartige Tafel zu construiren ist, wenn man sich auf eine geringe Anzahl von Decimalstellen beschränkt, ganz gut durchführbar, und würden solche Tafeln bei der steigenden Wichtigkeit der Theorie der conformen Abbildungen für die Physik auch sonst von Nutzen sein.

4.

Der soeben betrachtete Algorithmus kann mit Leichtigkeit auf jede beliebige Gleichung ausgedehnt werden, indem man sie auf die Form bringt:

$$z = \sqrt[n]{a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n};$$

derselbe ist aber nur einer unter vielen, welcher freilich durch den Umstand, dass er n-deutig ist und daher (falls er convergirt) sämtliche Wurzeln der Gleichung geben kann, einen Vorzug vor andern zu haben scheint.

Um zu zeigen, dass auch andere Formeln zur Grenze führen können, möge das Beispiel

$$z^2 - 2z - 35 = 0$$

betrachtet werden. Hieraus folgt unter Andern:

$$z = 2 + \frac{35}{z}.$$

Die Benutzung dieser Formel liefert für den willkürlichen Anfangswert $z_0 = \infty$:

$z_0 = \infty$, $z_2 = 19{,}5$, $z_4 = 11{,}4$, $z_6 = 7{,}8$, $z_{10} = 7{,}4$, $z_{12} = 7{,}2$, $z_{14} = 7{,}1$

$z_1 = 2$, $z_3 = 3{,}7$, $z_5 = 5$, $z_9 = 6{,}5$, $z_{11} = 6{,}7$, $z_{13} = 6{,}9$, $z_{15} = 6{,}93$

Also nähert sich diese Folge von Werten der Wurzel $z = 7$.

Benutzt man dagegen die Formel $z = \frac{z^2 - 35}{2}$ beispielsweise mit $z_0 = 7{,}1$, so divergirt der Algorithmus.

Die Frage, wann derartige Algorithmen convergiren und wann sie divergiren involvirt meines Erachtens ein höchst interessantes Problem [falls dasselbe noch nicht gelöst sein sollte].

Königsberg, Sept. 1884. Th. Sanio.

XVI.

Die Cono-Cunei.

Von

Carl Pabst.

Fortsetzung von Nr. XIV.

IV. Abschnitt.

Der elliptische und die hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei.

§ 21.

Bevor wir in der Betrachtung der geraden Cono-Cunei fortfahren und zum geraden parabolischen Cono-Cuneus übergehen, wollen wir uns zu den elliptischen und den hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei wenden.

Was zunächst den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus betrifft, so nehmen wir hierbei als Gleichungen der Leitellipse:

$$(75) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ z &= c \end{aligned} \right.$$

die XZ-Ebene demnach als Directorebene und als singuläre Kante die Y-Axe. Die erzeugenden Geraden müssen mithin den Gleichungen genügen:

$$x = u.z; \quad y = v,$$

» als Gleichung des in Rede stehenden Cono-Cuneus er-

$$(76)\qquad \frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die vorgelegte Fläche ebenso wie der gerade elliptische Cono-Cuneus vom vierten Grade ist. Ferner stimmen die beiden elliptischen Cono-Cunei darin überein, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene aus ihnen eine Ellipse ausschneidet, deren eine Axe für alle ausgeschnittenen Ellipsen constant ist, und deren andere Axe proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante wächst. Ein Kreis wird aus dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) für $z=\frac{bc}{a}$ ausgeschnitten.

Diejenigen Ellipsen des vorgelegten Cono-Cuneus (76), deren Entfernung von der singulären Kante absolute kleiner als $\frac{bc}{a}$ ist, haben ihre grossen Axen $=2b$ in einer Ebene, welche durch die singuläre Kante geht und mit der Ellipsenebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{c}{a}$ ist, ihre kleinen Axen $=2\frac{a}{c}z$ in der XZ-Ebene; diejenigen dagegen, deren Abstand von der singulären Kante absolute grösser als $\frac{bc}{a}$ ist, haben ihre grossen Axen $=2\frac{a}{c}z$ in der XZ-Ebene, und ihre kleinen in der eben beschriebenen, durch die singuläre Kante gehenden Ebene.

Daraus geht hervor, dass der gerade elliptische Cono-Cuneus und der elliptische Scheitel-Cono-Cuneus sich darin unterscheiden, dass bei jenem die Mittelpunkte der ausgeschnittenen Ellipsen auf einer Geraden liegen, die auf der Ellipsenebene senkrecht steht, während bei diesem der geometrische Ort der Mittelpunkte der Ellipsen eine Gerade ist, welche mit der Ellipsenebene einen schiefen Winkel bildet. Bei beiden Cono-Cuneis gehen diese Geraden durch die singuläre Kante und stehen auf derselben senkrecht.

Ferner ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene $x=k$ mit der vorgelegten Fläche auf die YZ-Ebene:

$$(77)\qquad y^2=\left(\frac{bc}{az}\right)^2 k\left(2\frac{a}{c}z-k\right)$$

Ist $k > 0$, so giebt es demnach nur reelle Werte von y, wenn $z > 0$ ist, und umgekehrt ist $k < 0$, so giebt es nur reelle Werte von y, wenn $z < 0$ ist. D. h. die Durchschnittscurve liegt entweder auf der positiven oder auf der negativen Seite der z-Axe, nicht aber auf beiden zugleich. Sie schneidet die z-Axe im Punkte $y = 0$, $z = \frac{ck}{2a}$. Ist $z < \frac{ck}{2a}$, wenn $k > 0$ ist, so giebt es keine reellen Werte für y. Die Curve liegt symmetrisch zur z-Axe und erstreckt sich von $z = \frac{ck}{2a}$ bis $z = \infty$. Sie ist in allen ihren Punkten convex nach der Y-Axe hin; in ihrem Durchschnittspunkte mit der z-Axe ist ihre Tangente der Y-Axe parallel.

Daraus geht hervor, dass der elliptische Scheitel-Cono-Cuneus (76) nur in 4 Octanten liegt, während der gerade elliptische Cono-Cuneus (17) sich in allen 8 Octanten erstreckt.

Die auf der singulären Kante senkrecht stehende Ebene $y = h$ schneidet aus dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) die beiden Erzeugenden aus, deren Projectionen auf die XZ-Ebene der Gleichung genügen:

$$x = \frac{a(b \pm \sqrt{b^2 - h^2})}{bc} z \tag{78}$$

§ 22.

Wir haben im vorigen § gesehen, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene aus dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) eine Ellipse ausschneidet. Betrachten wir die beiden Ellipsen in den Entfernungen h_1 und h_2 von der singulären Kante, so ergiebt sich, wenn $h_1 > \frac{bc}{a}$ ist, für das Axenverhältniss der zu h_1 zugehörigen Ellipse $\frac{ah_1}{bc}$, und wenn $h_2 < \frac{bc}{a}$ ist, für das Axenverhältniss der zu h_2 zugehörigen Ellipse: $\frac{bc}{ah_2}$. Sollen diese beiden Verhältnisse einander gleich sein, so erhält man demnach die Relation:

$$h_1 . h_2 = \left(\frac{bc}{a}\right)^2$$

Nun war $\frac{bc}{a}$ die Entfernung des Kreisschnittes von der singulären Kante des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76). Mithin resultirt der Satz: Diejenigen beiden Ellipsen des elliptischen Scheitel-

Cono-Cuneus, welche so auf dieser Fläche liegen, dass das Product ihrer Abstände von der singulären Kante gleich dem Quadrat der Entfernung des Kreisschnittes von derselben Kante ist, haben dasselbe Axenverhältniss.

Es ist dies derselbe Satz, den wir beim geraden elliptischen Cono-Cuneus in § 10 nachgewiesen haben. Hieraus ergeben sich auch dieselben Beziehungen in Bezug auf die Entfernungen der beiden Ellipsen von dem Kreisschnitte wie dort.

Betrachtet man ferner die Brennpunkte der ausgeschnittenen Ellipsen, so geht aus dem vorigen § hervor, dass die Brennpunkte derjenigen Ellipsen, deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder kleiner als $\frac{bc}{a}$ ist, in einer durch die singuläre Kante gehenden Ebene liegen, welche mit der Z-Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{a}{c}$ ist. Der Abstand eines solchen Brennpunktes von der XZ-Ebene ist $\sqrt{b^2 - \left(\frac{az}{c}\right)^2}$.

Für den geometrischen Ort dieser Brennpunkte ergiebt sich demnach die Ellipse:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{a^2 z^2}{b^2 c^2} = 1 \tag{79}$$

Vergleichen wir hiermit das Resultat (21) in § 10., so folgt der Satz: Sind der gerade elliptische Cono-Cuneus und der elliptische Scheitel-Cono-Cuneus, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, so beschaffen, dass eine und dieselbe Ebene aus jedem einen Kreis mit dem Radius a ausschneidet, so ist der geometrische Ort der Brennpunkte der Ellipsen des geraden Cono-Cuneus, deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder kleiner als der des Kreises derselben Fläche ist, gleich dem geometrischen Ort der Brennpunkte der entsprechenden Ellipsen des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus.

Auf analoge Weise erhält man für den geometrischen Ort der Brennpunkte derjenigen Ellipsen des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76), deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder grösser als $\frac{bc}{a}$ ist:

$$x^2 - 2\frac{axz}{c} + b^2 = 0 \tag{80}$$

d. h. die in Rede stehenden Brennpunkte liegen in der XZ-Ebene

f einer Hyperbel, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang, deren elle Axe $= 2b\sqrt{\frac{2c}{\sqrt{4a^2+c^2}-c}}$ und deren imaginäre Axe $2b\sqrt{\frac{2c}{\sqrt{4a^2+c^2}+c}}$ ist.

§ 23.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Tangentialebene im unkte xyz des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) über, so erlten wir als deren Gleichung, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coornaten bedeuten:

$$\left(x-\frac{az}{c}\right)(\xi-x)+\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{az}{c}\right)-\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right\}(\zeta-z)=0$$

ler mit Berücksichtigung der Gleichung (76):

$$\text{1)}\quad \left(x-\frac{az}{c}\right)\xi+\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{az}{c}\right)-\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right\}\zeta=0$$

Für $x=0$ erhält man hieraus: $\xi=0$, d. h. der vorgelegte ono-Cuneus berührt die YZ-Ebene. Ferner ergiebt sich für $z=0$:

$$\xi=\frac{a(b\pm\sqrt{b^2-y^2})}{bc}\zeta$$

d. h. In den Punkten der singulären Kante giebt es je zwei Tangentialebenen an den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus, welche sich in der singulären Kante schneiden. Diese Tangentialebenen schneiden im Allgemeinen, ebenso wie beim geraden elliptischen Cono-Cuneus, je zwei erzeugende Geraden aus der Fläche aus.

Diejenigen Tangentialebenen, welche die vorgelegte Fläche längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden berühren, haben ihre Berührungspunkte auf den Geraden, welche den Coordinaten genügen: einerseits $y=\pm b$, andererseits $x=0$ und $x=2\frac{a}{c}z$. Es giebt demnach, ebenso wie beim geraden elliptischen Cono-Cuneus, auch hier 4 Erzeugende, in welchen die Tangentialebenen den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus längs der ganzen Erzeugenden berühren. Die ersteren dieser Tangentialebenen haben,

wie sich nach kurzer Ueberlegung zeigt, die Eigenschaft, da aus dem vorgelegten Cono-Cuneus nur die betreffenden Erzeug schneiden, während die Durchschnittscurve der anderen mit der F (76) aus der Erzeugenden und der singulären Kante besteht.

Schliesslich erhält man für das Volumen V zwischen den nen $y=0$, $y=y_0$, $z=z_0$ und dem zugehörigen Teil des ellipti Scheitel-Cono-Cuneus (76):

$$V=\int_0^{y_0}\int_0^{z_0}(x_1-x_2)\,dy\,dz$$

Aus der Gleichung (76) ergiebt sich:

$$x_{1,2}=\frac{az}{c}\pm\frac{az}{bc}\sqrt{b^2-y^2}$$

folglich:

$$x_1-x_2=2\frac{az}{bc}\sqrt{b^2-y^2}$$

Demnach resultirt:

$$V=2\frac{a}{bc}\int_0^{y_0}dy\sqrt{b^2-y^2}\int_0^{z_0}z\,dz$$

$$\text{(82)}\qquad V=\frac{az_0}{bc}\left\{\tfrac{1}{2}y_0\sqrt{b^2-y_0^2}+\tfrac{1}{2}b^2\arcsin\left(\frac{y_0}{b}\right)\right\}$$

Von diesen Volumen gelten dieselben Sätze wie von demje des geraden elliptischen Cono-Cuneus.

§ 24.

Um jetzt die Gleichung des einfachen hyperbolisc Scheitel-Cono-Cuneus abzuleiten, nehmen wir als Gleichu der Leithyperbel:

$$\text{(83)}\qquad \begin{cases}\dfrac{(x-a)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{cases}$$

Nach der Definition des § 3. muss dann die Y-Axe sing Kante, die XZ-Ebene Directorebene werden, so dass man als chung des betreffenden Cono-Cuneus erhält:

$$\text{(84)}\qquad \frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

dieser Gleichung geht zunächst hervor, dass die Fläche
Grades nur symmetrisch zur XZ-Ebene liegt. Ausserdem
htlich, dass x, y und z alle beliebigen Werte annehmen können.

e zur XY-Ebene parallele Ebene schneidet ferner aus dem
n hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) im Allgemeinen
perbel mit den Halbaxen $\frac{a}{c}z$ und b aus. Die reellen Axen
Iyperbeln liegen in der XZ-Ebene und wachsen proportional
stande der schneidenden Ebene von der singulären Kante;
ginären Axen dagegen sind für alle ausgeschnittenen Hyper-
$2b$ und liegen in einer durch die singuläre Kante gehenden
welche mit der Z-Axe einen Winkel bildet, dessen trigono-
ne Tangente gleich $\frac{a}{c}$ ist.

raus folgt, dass die Mittelpunkte der Hyperbeln des einfachen
lischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) in der XZ-Ebene liegen
ar auf einer Geraden, welche durch den Coordinatenanfang
d mit der Hyperbelebene einen Winkel bildet, dessen trigono-
ne Tangente gleich $\frac{c}{a}$ ist.

ährend also bei den geraden hyperbolischen Cono-Cuneis der
rische Ort der Mittelpunkte ihrer Hyperbeln eine Gerade ist,
durch die singuläre Kante geht und auf der Hyperbelebene senk-
teht, schneidet die Gerade, auf welcher die Mittelpunkte der
eln des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus liegen,
e singuläre Kante dieser Fläche rechtwinklig, bildet aber mit
perbelebene einen schiefen Winkel.

rner folgt aus diesen Erörterungen, dass die Scheitel der aus
rgelegten Fläche ausgeschnittenen Hyperbeln sich von $z = \infty$
0 einander nähern, bis sie für $z = 0$ zusammenfallen. Diese
haft hat der vorgelegte Cono-Cuneus mit dem geraden ein-
hyperbolischen Cono-Cuneus gemein. Während aber bei diesem
eitel auf zwei Geraden liegen, welche durch die singuläre
gehen und mit der Hyperbelebene gleiche, schiefe Winkel bilden,
bei dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus die
l auf zwei Geraden, welche sich zwar in der singulären Kante
en und auf derselben senkrecht stehen, von denen aber die
nen rechten, die andere einen schiefen Winkel mit der Hyper-
ne bildet.

s der Gleichung (84) ergiebt sich ausserdem, dass die zur
ene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante

absolute gleich $\frac{bc}{a}$ ist, eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter b aus dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) ausschneidet.

Ziehen wir nun die Brennpunkte der ausgeschnittenen Hyperbeln in Betracht, so resultirt aus dem Gesagten, dass sie sämmtlich in der XZ-Ebene liegen. Die Entfernung eines solchen Brennpunktes von der Z-Axe ist: $\frac{a}{c}z \pm \sqrt{\left(\frac{a}{c}z\right)^2 + b^2}$. Für den geometrischen Ort derselben erhält man demnach:

$$(85) \qquad x^2 - 2\frac{a}{c}xz - b^2 = 0$$

d. h. in Worten: Der geometriche Ort der Brennpunkte aller Hyperbeln, welche durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) ausgeschnitten werden, ist eine Hyperbel in der XZ-Ebene, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist.

Was schliesslich die Asymptoten einer solchen ausgeschnittenen Hyperbel betrifft, so genügen dieselben der Gleichung:

$$y = \pm\frac{bc}{az}\left(x - \frac{a}{c}z\right)$$

Sie liegen mithin auf den beiden hyperbolischen Paraboloiden:

$$(86) \qquad \begin{cases} ayz - b(cx - az) = 0 \\ ayz + b(cx - az) = 0 \end{cases}$$

§. 25.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der **Tangentialebene** im **Punkte** xyz des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84). Als Gleichung derselben resultirt:

$$\left(x - \frac{a}{c}z\right)(\xi - x) - \left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta - y) - \left\{\frac{a}{c}\left(x - \frac{a}{c}z\right) + \frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2 + b^2)\right\}(\zeta - z) = 0$$

oder:

$$87)\quad \left(x-\frac{a}{c}z\right)\xi-\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2+c^2)\right\}\zeta=0$$

Für $z=0$ ergiebt sich hieraus mit Berücksichtigung der Glei-
chung (84):

$$\xi=\frac{a(b\pm\sqrt{y^2+b^2})}{bc}\zeta$$

d. h. In jedem Punkte der singulären Kante giebt es je zwei Tangentialebenen an die vorgelegte Fläche, 'welche durch die singuläre Kante gehen. Es gilt demnach auch von dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus der Satz, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene im Allgemeinen eine Tangentialebene ist.

Diejenigen Punkte, in denen die Tangentialebene den einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden berührt, gehören zu $y=0$, d. h. sie liegen auf den Durchschnittslinien der Fläche mit der XZ-Ebene. Dafür ergiebt sich nun:

$$\xi=0$$

$$\xi=2\frac{a}{c}z$$

Es folgt daraus, dass die YZ-Ebene hier ebenso wie beim elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) eine Tangentialebene ist.

Schneidet man schliesslich den einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) durch die Ebenen $y=y_0$, $z=z_0$, so ergiebt sich für das Volumen zwischen den Ebenen $y=0$, $y=y_0$, $z=z_0$ und dem zugehörigen Teil der Fläche einerseits:

$$V_1=\int_0^{y_0}\int_0^{z_0} x_1\,dy\,dz$$

andererseits:

$$V_2=\int_0^{y_0}\int_0^{z_0} x_2\,dy\,dz,$$

wobei, wie aus der Gleichung (84) folgt:

$$x_1=\frac{az}{bc}(\sqrt{y^2+b^2}+b)$$

$$x_2=\frac{az}{bc}(\sqrt{y^2+b^2}-b)$$

Mithin erhält man:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2a}{bc}\int_0^{y_0} dy\sqrt{y^2+b^2}\int_0^{z_0} z\,dz$$

(88) $$V = \frac{az_0^2}{bc}\left\{\tfrac{1}{2}y_0\sqrt{y_0^2+b^2} + \tfrac{1}{2}b^2\lg\left(\frac{y_0+\sqrt{y_0^2+b^2}}{b}\right)\right\}.$$

§ 26.

Zur Untersuchung des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus nehmen wir an, die Leithyperbel werde durch die Gleichungen dargestellt:

(89) $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{(y-b)^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

Alsdann muss gemäss den Erörterungen des § 3. die YZ-Ebene Directorebene und die X-Axe singuläre Kante werden, so dass man als Gleichung des betreffenden Cono-Cuneus erhält:

(90) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(y - \frac{b}{c}z\right)^2}{\left(\frac{b}{c}z\right)^2} = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der geteilte hyperbolische Scheitel-Cono-Cuneus (90) vom vierten Grade ist und symmetrisch zur YZ-Ebene liegt. Für val. abs. $x < a$ giebt es keine reellen Werte für y und z. Die vorgelegte Fläche besteht demnach aus zwei, auf beiden Seiten der YZ-Ebene liegenden, von einander getrennten Teilen, woher die Bezeichnung „geteilt" entnommen ist.

Ferner geht aus der Gleichung (90) hervor, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene die vorgelegte Fläche in einer Hyperbel schneidet, deren reelle Axe $= 2a$, deren imaginäre Axe $= 2\frac{b}{c}z$ ist. Eine gleichseitige Hyperbel wird demnach aus dem geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) durch eine Ebene parallel der XY-Ebene ausgeschnitten, deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich $\frac{ac}{b}$ ist.

Die imaginären Axen der ausgeschnittenen Hyperbeln liegen in der YZ-Ebene und wachsen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante; die reellen dagegen sind

für alle ausgeschnittenen Hyperbeln gleich $2a$ und liegen in einer Ebene, welche durch die singuläre Kante geht, und welche mit der Hyperbelebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{b}{c}$ ist.

Auch hierbei ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der ausgeschnittenen Hyperbeln, wie sich aus dem Gesagten ergibt, eine gerade Linie, welche durch die singuläre Kante geht, auf derselben senkrecht steht, mit der Hyperbelebene aber einen Winkel bildet, dessen trigonometriche Tangente gleich $\frac{c}{b}$ ist. Es ist dies eine analoge Beziehung, wie wir sie bei dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus nachgewiesen haben. Da dieselbe Relation auch von dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus gilt, so bezeichnet dieselbe ein durchgreifendes Unterscheidungsmerkmal zwischen den geraden und den Scheitel-Cono-Cuneis, vorausgesetzt, dass der Leitkegelschnitt einen Mittelpunkt hat.

Weil die reellen Axen der aus dem geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) ausgeschnittenen Hyperbeln in einer durch die singuläre Kante gehenden Ebene liegen, welche mit der Z-Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{b}{c}$ ist, so liegen auch die Brennpunkte der Hyperbeln in dieser Ebene. Für die Entfernung eines solchen Brennpunkts von der YZ-Ebene erhält man aus der Gleichung (90): $\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{c} z\right)^2}$. Die Brennpunkte liegen demnach in der beschriebenen Ebene auf der Curve:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2 z^2}{a^2 c^2} = 1 \tag{91}$$

d. h. Der geometrische Ort der Brennpunkte der durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) ausgeschnittenen Hyperbeln ist eine Hyperbel mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren reelle Axe $= 2a$ und deren imaginäre Axe $= 2\frac{ac}{b}$ ist.

Aus der Vergleichung von (90) und (91) folgt, wenn man $z = \frac{ac}{b}$ setzt:

$$z = \frac{ac^2}{b^2} \tag{92}$$

Bezeichnen wir $\frac{ac}{b}$ mit c', wobei c', wie aus dem Obigen hervorgeht, die Entfernung der gleichseitigen Hyperbel des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) von seiner singulären Kante bedeutet, so geht die Gleichung (92) über in:

$$z = \frac{c'^2}{a}$$

Daraus fliesst der Satz: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu dem halben Parameter und dem Abstande der gleichseitigen Hyperbel des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus von dessen singulärer Kante ist, schneidet aus dieser Fläche eine Hyperbel aus, welche gleich ist dem geometrischen Orte der Brennpunkte aller durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dieser Fläche ausgeschnittenen Hyperbeln.

Diese Eigenschaft hat der vorgelegte Cono-Cuneus mit dem geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus gemeinsam.

Die Asymptoten einer Hyperbel des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) genügen der Gleichung:

$$y - \frac{b}{c}z = \pm \frac{bz}{ac}x$$

Die Asymptoten aller Hyperbeln der vorgelegten Fläche liegen demnach auf den beiden hyperbolischen Paraboloiden:

$$(93) \qquad \begin{cases} bxz - a(cy - bz) = 0 \\ bxz + a(cy - bz) = 0 \end{cases}$$

Dreht man den vorgelegten Cono-Cuneus um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so, dass die positive X-Axe in die negative Y-Axe fällt, dann hat man nur y mit x zu vertauschen; alles Uebrige bleibt ungeändert. Führen wir diese Vertauschung in den Gleichungen (93) aus, so gehen dieselben über in:

$$byz - a(cx - bz) = 0$$
$$byz + a(cx - bz) = 0$$

Beachten wir hierbei die Gleichungen (86) im § 24., so resultirt der Satz: Haben der einfache und der geteilte hyperbolische Scheitel-Cono-Cuneus dieselbe singuläre Kante und dieselbe Directorebene und sind sie so beschaffen, dass eine und dieselbe Ebene aus den beiden Flächen je eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a

ısschneidet, so liegen die Asymptoten der aus beiden Flächen aus-schnittenen Hyperbeln auf denselben beiden hyperbolischen Para-loiden.

Es ist dies ein analoger Satz, wie wir ihn von den beiden ge-den hyperbolischen Cono-Cuneis im § 19. nachgewiesen haben.

Zugleich ergiebt sich hieraus, dass die geraden hyperbolischen ono-Cunei und die hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei das mit ein-ader gemeinsam haben, dass die Asymptoten der aus ihnen ausge-hnittenen Hyperbeln auf je zwei hyperbolischen Paraboloiden liegen.

§ 27.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des ge-ilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus erhält man:

$$\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x(\xi - x) - \left(y - \frac{b}{c}z\right)(\eta - y) + \left[\frac{b^2 z}{a^2 c^2}(x^2 - a^2) + \frac{b}{c}\left(y - \frac{b}{c}z\right)\right](\zeta - z) = 0$$

der:

94) $$\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x(\xi - x) - \left(y - \frac{b}{c}z\right)\eta + \left[\frac{b^2 z}{a^2 c^2}(x^2 - a^2) + \frac{b}{c}\left(y - \frac{b}{c}z\right)\right]\zeta = 0$$

Für $z = 0$ geht diese Gleichung über, wenn man für $y - \frac{b}{c}z$ inen Wert aus (90) setzt, in

$$\eta = \frac{c(a \pm \sqrt{x^2 - a^2})}{ac}\zeta$$

h. in den Punkten der singulären Kante giebt es je zwei Tangen-lebenen an die vorgelegte Fläche.

Diese Eigenschaft haben mithin die geraden elliptischen und perbolischen Cono-Cunei mit den elliptischen und den hyperboli-hen Scheitel-Cono-Cuneis gemeinsam.

Ferner ergiebt sich, dass die beiden Ebenen $\xi = \pm a$ den teilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) längs einer ganzen rzeugenden berühren.

Aus der Gleichung (90) folgt:

$$y_{1,2} = \frac{bz}{ac}\left(a \pm \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

Demnach erhält man für das Volumen V zwischen den Ebenen $x = x_0$, $z = z_0$ und dem zugehörigen Teil des vorgelegten Cono-Cuneus:

$$V = \frac{2b}{ac}\int_0^{x_0} dx \sqrt{x^2 - a^2} \int_0^{z_0} z\,dz$$

$$(95) \quad V = \frac{bz_0^2}{ac}\left\{\tfrac{1}{2}x_0\sqrt{x_0^2 - a^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \lg\left(\frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a}\right)\right\}$$

Nun ist aber, wie sich aus (90) ergiebt;

$$\sqrt{x_0^2 - a^2} = \frac{ac}{bz_0}\left(x_0 - \frac{b}{c}z_0\right).$$

Demnach geht die Gleichung (95) über in:

$$(96) \quad V = \frac{bz_0^2}{c}\left\{\tfrac{1}{2}\cdot\frac{cx_0}{bz_0}\left(y_0 - \frac{b}{c}z_0\right) - \tfrac{1}{2}a\log\left(\frac{bx_0 z_0 + ac\left(y_0 - \frac{b}{c}z_0\right)}{abz_0}\right)\right\}$$

Ferner folgt aus der Gleichung (88) des § 25., wenn man darin für $\sqrt{y_0^2 + b^2}$ den aus (84) sich ergebenden Wert: $\frac{bc}{az_0}\left(x_0 - \frac{a}{c}z_0\right)$ setzt:

$$(97) \quad V' = \frac{az_0^2}{c}\left\{\tfrac{1}{2}\cdot\frac{cy_0}{az_0}\left(x_0 - \frac{a}{c}z_0\right) + \tfrac{1}{2}b\lg\left(\frac{ay_0 z_0 + bc\left(x_0 - \frac{a}{c}z_0\right)}{abz_0}\right)\right\}$$

Vertauscht man in der letzteren Gleichung x mit y und setzt (96) und (97) $a = b$, so resultirt:

$$V + V' = x_0 z_0\left(y_0 - \frac{b}{c}z_0\right)$$

Eine analoge Beziehung hat sich für die beiden geraden hyperbo schen Cono-Cunei im § 20. ergeben.

V. Abschnitt.

Die beiden parabolischen Cono-Cunei.

§ 28.

In diesem Abschnitte wollen wir den geraden parabolischen Cono-neus und den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus betrachten. Da se beiden Flächen von Hochheim ausführlich behandelt worden d (Grunerts Archiv T. 53. pag. 350—363 und T. 55. pag. 35 18), so wollen wir hier nur die hauptsächlichsten Eigenschaften rselben kurz ableiten. Was zunächst den geraden paraboli-hen Cono-Cuneus betrifft, so nehmen wir als Gleichungen der itparabel:

$$8) \quad \begin{cases} y^2 = 2px \\ z = c \end{cases}$$

sdann ist, wie sich aus den Erläuterungen der Einleitung ergiebt, X-Axe singuläre Kante, die YZ-Ebene Directorebene, so dass n als Gleichung des betreffenden Cono-Cuneus erhält:

$$) \quad c^2 y^2 = 2pxz^2$$

Hieraus geht zunächst hervor, dass dieser Cono-Cuneus im Gegen-z zu den bisher behandelten vom dritten Grade ist. Ferner folgt s der Gleichung (99), dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene vorgelegte Fläche in einer Parabel schneidet, deren Parameter ich $2\frac{pz^2}{c^2}$ ist, d. h. die Parameter der ausgeschnittenen Parabeln chsen proportional dem Quadrate des Abstandes der schneidenden ene von der singulären Kante.

Ziehen wir die Brennpunkte der ausgeschnittenen Parabeln in racht, so ergiebt sich zunächst, dass dieselben in der XZ-Ebene en. Die Entfernung eines solchen Brennpunktes von der Z-Axe $\frac{pz^2}{2c^2}$. Für den geometrischen Ort aller dieser Brennpunkte er-t man demnach:

$$) \quad z^2 = 2\frac{c^2}{p}x$$

h. in Worten: Der geometrische Ort der Brennpunkte aller Para-n, welche durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem geraden abolischen Cono-Cuneus (99) ausgeschnitten werden, ist eine Pa-el in der XZ-Ebene, deren Scheitel der Coordinatenanfang ist,

und deren Axe in die singuläre Kante des Cono-Cuneus fällt. Der halbe Parameter dieser Parabel ist die vierte Proportionale zu p und c.

Aus der Vergleichung von (99) und (100) folgt, wenn man $\frac{c^2}{p} = \frac{pz^2}{c^2}$ setzt:

$$z = \frac{c^2}{p}$$

Daraus fliesst der Satz: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu p und c ist, schneidet aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) eine Parabel aus, welche gleich ist der Parabel, auf welcher die Brennpunkte aller durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus diesem Cono-Cuneus ausgeschnittenen Parabeln liegen.

Beachtet man hierbei, dass $2\frac{c^2}{p}$ der Parameter der betreffenden Parabel ist, so kann man diese Relationen auch so deuten: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu p und c ist, schneidet aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) eine Parabel aus, deren Parameter gleich dem doppelten Abstande der Parabel von der singulären Kante ist.

Als Projection der Durchschnittscurve der Ebene $x = h$ mit vorgelegten Fläche auf die YZ-Ebene ergiebt sich:

$$(101) \qquad z = \pm \frac{c}{\sqrt{2ph}}\, y.$$

Daraus folgt, dass jede der Directorebene parallele Ebene Allgemeinen aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus zwei Erzeugende ausschneidet, welche durch die singuläre Kante gehen und mit der XZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Für $h =$ fallen diese beiden Geraden in eine eine einzige zusammen.

Erwähnt sei hier noch, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene den vorgelegten Cono-Cuneus in einer Geraden schneidet, denn man erhält für

$$y = az:$$

$$(102) \qquad c^2 a^2 = 2px$$

Hierin unterscheidet sich der gerade parabolische Cono-Cuneus von den bisher betrachteten Flächen und, wie sich später zeigen

d, auch von dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus, denn aus sen schneidet jede durch die singuläre Kante gehende Ebene im gemeinen zwei gerade Linien.

Um schliesslich die Durchschnittscurve des vorgelegten Cononeus mit einer durch die Z-Axe gehenden Ebene, welche mit der Axe den Winkel φ bildet, zu untersuchen, wenden wir die Coornatentransformation an:

)3)
$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \\ z = z' \end{cases}$$

Setzen wir dann $y' = 0$, so ergiebt sich als Gleichung der deirten Durchschnittscurve:

)4)
$$z'^2 = \frac{c^2 \sin^2\varphi}{2p \cos\varphi} . x'$$

Jede durch die Z-Axe gehende Ebene schneidet demnach den raden parabolischen Cono-Cuneus (99) in einer Parabel, deren heitel der Coordinatenaufang ist, und deren Axe in der XY-Ebene gt. Die Brennweite einer solchen Parabel ist: $\frac{c^2 \sin^2\varphi}{8p \cos\varphi}$. Mithin hält man für den geometrischen Ort der Brennpunkte dieser Pabeln in Polarcoordinaten:

$$r = \frac{c^2 \sin^2\varphi}{8p \cos\varphi}$$

er in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten:

$$y^2 = \frac{8px^3}{c^2 - 8px}$$

ese Gleichung stellt eine Cissoide dar, welche die X-Axe im Coornatenanfang berührt und welche sich auf der positiven und auf der gativen Seite der Y-Axe der Geraden $x = \frac{c^2}{8p}$ asymptotisch nähert.

§ 29.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des geten parabolischen Cono-Cuneus (99) erhält man, wenn ξ, η, ζ die ifenden Coordinaten bedeuten:

$$pz^2(\xi - x) - c^2y(\eta - y) + 2pxz(\zeta - z) = 0$$

er:

)5)
$$pz^2(\xi - x) - c^2y\eta + 2pxz\zeta = 0$$

Daraus folgt für $x = 0 : \xi = 0$; d. h. die Directorebene berührt den geraden parabolischen Cono-Cuneus (99).

Ferner erhält man für $z = 0$:

$$\eta = \pm \frac{\sqrt{2px}}{c} \zeta$$

d. h. In den Punkten der singulären Kante giebt es je zwei Tangentialebenen an den vorgelegten Cono-Cuneus, welche sich in der singulären Kante schneiden und mit der XZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Es sind dies die in (102) des vorigen § betrachteten Ebenen. Diese Tangentialebenen schneiden mithin aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) die singuläre Kante und eine Erzeugende desselben.

Im Allgemeinen besteht die Durchschnittscurve der Tangentialebene mit dem vorgelegten Cono-Cuneus aus der durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden desselben und aus einer Parabel, deren Projection auf die XZ-Ebene als Parameter die vierte Proportionale zu $4x$ und z hat, wenn x, y, z die Coordinaten des Berührungspunktes sind.

Schneiden wir nun den geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) durch die Ebenen $x = x_0$, $z = z_0$, so erhält man für das Volumen V zwischen diesen Ebenen, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teile desselben

$$V = \int_0^{x_0}\int_0^{z_0} y\,dx\,dz = \frac{\sqrt{2p}}{c}\int_0^{x_0}\sqrt{x}\,.\,dx\int_0^{z_0} z\,dz$$

$$V = \frac{x_0 z_0^2 \sqrt{2px_0}}{3c} = \tfrac{1}{3}x_0 y_0 z_0 \qquad (106)$$

Das Volumen zwischen den Ebenen $x = x_0$, $y = 0$, $z = z_0$ und dem zugehörigen Teile des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) ist demnach gleich dem dritten Teil eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

Nun ist: $\frac{2}{3}x_0 \cdot y_0 = F$, wenn F den zugehörigen Teil der begrenzenden Parabel bedeutet; also:

$$V = \tfrac{1}{2}F . z_0, \qquad (107)$$

welchen Satz wir schon in der Einleitung bewiesen haben.

§ 30.

Wir kommen jetzt zur Betrachtung des letzten in der Einleitung efinirten Cono-Cuneus, des parabolischen Scheitel-Cono-uneus. Nehmen wir hierbei als Leitparabel dieselbe wie beim raden parabolischen Cono-Cuneus, nämlich:

$$y^2 = 2px$$
$$z = c$$

s Directorebene demnach die XZ-Ebene, als singuläre Kante die -Axe, so erhält man als Gleichung der vorgelegten Fläche:

08) $$y^2 z = 2cpx$$

Der parabolische Scheitel-Cono-Cuneus ist mithin ebenso wie r gerade parabolische Cono-Cuneus eine Fläche dritten Grades.

Ferner fogt aus der Gleichung (108), dass jede zur XY-Ebene rallele Ebene den vorgelegten Cono-Cuneus in einer Parabel hneidet, deren Axe in der XZ-Ebene und deren Scheitel auf der -Axe liegt. Der Parameter einer solchen Parabel ist gleich $\frac{2p}{z}$, d. h. er ist umgekehrt proportional dem Abstande der schneinden Ebene von der singulären Kante. Hierin unterscheidet sich r parabolische Scheitel-Cono-Cuneus von dem geraden parabolihen Cono-Cuneus.

Für den geometrischen Ort der Brennpunkte der aus der vorlegten Fläche ausgeschnittenen Parabeln erhält man demnach:

09) $$xz = \frac{pc}{2}$$

h. der geometrische Ort der Brennpunkte aller Parabeln, welche urch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem parabolischen Scheitelono-Cuneus (108) ausgeschnitten werden, ist eine gleichseitige Hy erbel in der XZ-Ebene, deren Asymptoten die Axen der x und der sind, und deren Excentricität die mittlere Proportionale zu $2p$ und ist.

Ferner wird durch die Ebene $y = h$ aus dem parabolischen cheitel-Cono-Cuneus (108) eine Curve ausgeschnitten, als deren rojection auf die XZ-Ebene man erhält:

10) $$z = \frac{2pc}{h^2} x$$

Daraus folgt, dass jede zur Directorebene parallele Ebene aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus eine erzeugende Gerade ausschneidet. Hierin unterscheidet sich dieser Cono-Cuneus von allen bisher betrachteten, aus denen jede der Directorebene parallele Ebene im Allgemeinen zwei Erzeugenden der betreffendan Fläche ausschneidet.

Der vorgelegte Cono-Cuneus unterscheidet sich von dem geraden parabolischen Cono-Cuneus auch dadurch, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene im Allgemeinen zwei erzeugende Geraden desselben ausschneidet. Denn es ergiebt sich als Projection der Durchschnittscurve der Ebene $z = ax$ mit der Fläche (108) auf die YZ-Ebene:

$$(111) \qquad y = \pm\sqrt{\frac{2pc}{a}}$$

Diese Eigenschaft hat der parabolische Scheitel-Cono-Cuneus, wie schon im § 28. angedeutet worden ist, mit den elliptischen und den hyperbolischen Cono-Cuneis gemeinsam.

Ein Hauptunterschied zwischen dem geraden parabolischen Cono-Cuneus und dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus besteht darin, dass durch gewisse Ebenen aus dem letzteren Hyperbeln ausgeschnitten werden, was bei dem ersteren nicht der Fall ist. Zu diesen gehören die durch die Z-Axe gehenden Ebenen. Um die betreffenden Durchschnittscurven näher zu untersuchen, wenden wir die Coordinatentransformation (103) an und setzen $y' = 0$. Alsdann erhält man als Gleichung einer Durchschnittscurve:

$$(112) \qquad x'z' = \frac{2pc\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$

Diese Durchschnittscurve ist demnach eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Axen der x' und der z' sind, und deren Quadrat der Excentricität gleich $\frac{8pc\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ ist.

§ 31.

Gehen wir nun zur Tangentialebene im Punkte xyz des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) über, so erhalten wir als Gleichung derselben:

$$2pc(\xi - x) - 2yz(\eta - y) - y^2(\zeta - z) = 0$$

oder:

$$(113) \qquad 2pc.\xi - 2yz(\eta - y) - y^2\zeta = 0.$$

Daraus folgt für $y=0$: $\xi=0$; d. h. der parabolische Scheitel-
ono-Cuneus (108) berührt die YZ-Ebene.

Ferner ergiebt sich für $z=0$ aus der Gleichung (113):

$$\xi=\frac{y^2}{2pc}\zeta$$

e Tangentialebene in einem Punkte der singulären Kante geht
mnach durch diese Kante. Es giebt aber, wie man hieraus er-
ht, in einem Punkte der singulären Kante nur eine Tangential-
ene an den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus und auch hierdurch
terscheidet sich derselbe von den übrigen betrachteten Cono-Cu-
is.

Diese Tangentialebenen sind die unter (111) des vorigen § be-
chteten Ebenen. Sie schneiden also aus dem parabolischen Schei-
-Cono-Cuneus die singuläre Kante und zwei erzeugende Geraden
sselben aus.

Allgemein erhält man für die Projection der Durchschnittscurve
r Tangentialebene mit der vorgelegten Fläche auf die YZ-Ebene,
nn man ξ aus der Gleichung (113) und der Gleichung $\eta^2\zeta=2pc\xi$
minirt:

$$\text{(1}4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\eta-y=0\\ &(\eta+y)\zeta-2yz=0\end{aligned}\right.$$

Daraus geht hervor, dass die Tangentialebene aus dem parabo-
hen Scheitel-Cono-Cuneus im Allgemeinen die durch ihren Be-
rungspunkt gehende Erzeugende desselben und eine gleichseitige
perbel ausschneidet, deren Projection auf die YZ-Ebene die Ex-
tricität $\sqrt{2y.z}$ hat. Auch die Tangentialebenen gehören daher zu
oben erwähnten Ebenen, welche aus dem parabolischen Scheitel-
no-Cuneus Hyperbeln ausschneiden.

Zugleich ist ersichtlich, dass die Tangentialebene die Fläche im
gemeinen nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt
enden Erzeugenden derselben berührt. Eine Ausnahme findet
für $y=0$ statt; d. h. die YZ-Ebene berührt den parabolischen
heitel-Cono-Cuneus (108) längs der ganzen in ihr liegenden Er-
genden desselben.

Schliesslich erhalten wir für das Volumen V zwischen den
enen $y=y_0$, $z=z_0$, $x=0$ und dem zugehörigen Teile der vor-
legten Fläche:

$$V=\int\limits_0^{y_0}\int\limits_0^{z_0} x\,dy\,dz = \frac{1}{2pc}\int\limits_0^{y_0} y^2\,dy \int\limits_0^{z_0} z\,dz$$

(115) $$V=\frac{y_0^3 \cdot z_0^2}{12\,pc} = \tfrac{1}{6}\,x_0\,y_0\,z_0$$

d. h. Das Volumen mit der vorgeschriebenen Begrenzung ist gleich dem sechsten Teile eines rechtwinkligen Parallepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

Wir haben beim geraden parabolischen Cono-Cuneus erhalten:

$$V' = \tfrac{1}{3}x_0\,y_0\,z_0$$

Daraus folgt:

$$V + V' = \tfrac{1}{2}x_0\,y_0\,z_0$$

d. h. in Worten: Die Summe der Volumina, welche von den beiden parabolischen Cono-Cuneis begrenzt werden, und zu den Coordinaten x_0, y_0, z_0 gehören, ist gleich der Hälfte des rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

VI. Abschnitt.

Die Fusspunktenflächen der betrachteten Cono-Cunei für den Coordinatenanfang als Pol.

§ 32.

Wenn man von einem gegebenen Punkte die Senkrechten auf die Tangentialebenen einer gegebenen Fläche fällt, so bilden die Fusspunkte dieser Senkrechten eine neue Fläche, welche die Fusspunktenfläche der gegebenen Fläche für den gegebenen Punkt als Pol genannt wird. Wir wollen nun in diesem Abschnitte die Fusspunktenflächen der behandelten Cono-Cunei für den Coordinatenanfang als Pol einer kurzen Betrachtung unterwerfen.

Was zunächst den geraden elliptischen Cono-Cuneus (17)

$$c^2 y^2 = z^2(a^2 - x^2)$$

betrifft, so hatten wir als Gleichung der Tangentialebene desselben erhalten [§ 12. Gl. 27]:

$$x z^2(\xi - x) + cy \,.\, c\eta - z(a^2 - x^2)\zeta = 0$$

Demnach ergiebt sich für die Gleichungen der Geraden, welche durch den Coordinatenanfang geht und auf dieser Tangentialebene senkrecht steht, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeute

$$116) \qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{xz^2}{z(a^2-x^2)}\,\zeta \\[2ex] \eta = -\dfrac{c^2y}{z(a^2-x^2)}\,\zeta \end{cases}$$

ie Coordinaten der Fusspunkte dieser Senkrechten müssen den leichungen (116) und der Gleichung der betreffenden Tangential- ene genügen. Demnach folgt für dieselben:

$$\xi = \frac{x^3 z^4}{x^2 z^4 + c^4 y^2 + z^2(a^2-x^2)^2}$$

$$\eta = \frac{c^2 x^2 y z^2}{x^2 z^4 + c^4 y^2 + z^2(a^2-x^2)^2}$$

$$\zeta = -\frac{x^2 z^3 (a^2-x^2)}{x^2 z^4 + c^4 y^2 + z^2(a^2-x^2)^2}$$

urch Elimination von x, y, z aus diesen drei Gleichungen mit Hilfe er Gleichung (17) resultirt die Gleichung der gesuchten Fuss- unktenfläche:

$$117) \qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{\xi^2(a^2\eta^2-c^2\zeta^2)}{\eta^2}$$

Die Fusspunktenfläche des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) ir den Coordinatenanfang als Pol ist demnach eine Fläche 6ten rades.

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den geteilten geraden yperbolischen Cono-Cuneus (37):

$$c^2y^2 = z^2(x^2-a^2),$$

s dessen Fusspunktenfläche für den Coordinatenanfang als Pol man hält:

$$18) \qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{\xi^2(a^2\eta^2+c^2\zeta^2)}{\eta^2}$$

Die beiden Gleichungen (117) und (118) gehen für $\zeta = 0$ über in:

$$19) \qquad \xi^2+\eta^2 = \pm\, a\xi$$

araus folgt der Satz: Die beiden Fusspunktenflächen (117) und 18) und der Cylinder (119) schneiden sich in einer und derselben urve, und zwar in einer ebenen Curve.

Diese Relation kann man auch so deuten: Sind der gerade lliptische und der gerade geteilte hyperbolische Cono-Cuneus, welche

dieselbe singuläre Kante haben, so beschaffen, dass eine und dieselbe Ebene aus dem elliptischen einen Kreis, aus dem hyperbolischen eine gleichseitige Hyperbel ausschneidet, deren halber Parameter gleich dem Radius des Kreises des elliptischen Cono-Cuneus ist, so schneiden sich die beiden zugehörigen Fusspunktenflächen für den Coordinatenanfang als Pol in einer ebenen Curve, und zwar in zwei Kreisen in der XY-Ebene mit dem Radius $\frac{1}{2}a$, welche sich im Coordinatenanfang berühren und deren Mittelpunkte auf der singulären Kante der beiden zugehörigen Cono-Cunei liegen:

Ferner ist die Gleichung der Tangentialebene des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus:

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1:$$

$$c^2x\xi - yz^2(\eta - y) - z(y^2 + a^2)\zeta = 0$$

Demnach erhält man als Gleichungen der vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällten Senkrechten:

$$\xi = -\frac{c^2x}{z(y^2+a^2)}\zeta$$

$$\eta = \frac{yz^2}{z(y^2+a^2)}\zeta$$

Für die Coordinaten des Fusspunktes dieser Senkrechten resultirt mithin:

$$\xi = -\frac{c^2xy^2z^2}{c^4x^2+y^2z^4+z^2(y^2+a^2)}$$

$$\eta = \frac{y^3z^4}{c^4x^2+y^2z^4+z^2(y^2+a^2)}$$

$$\zeta = \frac{y^2z^3(y^2+a^2)}{c^4x^2+y^2z^4+z^2(y^2+a^2)}$$

Eliminirt man x, y, z aus diesen drei Gleichungen mit Hilfe der Gleichung des zugehörigen Cono-Cuneus, so erhält man als Gleichung der betreffenden Fusspunktenfläche des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus:

$$(120) \qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{\eta^2(c^2\zeta^2 - a^2\xi^2)}{\xi^2}$$

Auch diese Fläche ist wie die beiden vorhergehenden vom 6ten Grade.

Untersuchen wir nun die Durchschnittscurven der drei abgelei- Fusspunktenflächen mit Ebenen, welche durch die singuläre e des zugehörigen Cono-Cuneus gehen. Zu dem Zwecke setzen n den beiden Gleichungen (117) und (118):

$$c\zeta = m\,a\,\eta,$$

diese Gleichung stellt eine Ebene dar, welche durch die X- also durch die singuläre Kante des geraden elliptischen Cono- us (17) und des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus geht. Dadurch gehen die betreffenden beiden Gleichungen über

$$\xi^2 + \frac{m^2a^2+c^2}{c^2}\eta^2 = \pm\, a\xi\sqrt{1-m^2}$$

$$\xi^2 + \frac{m^2a^2+c^2}{c^2}\eta^2 = \pm\, a\xi\sqrt{1+m^2}$$

Diese beiden Gleichungen stellen im Allgemeinen je zwei Ellipsen welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittel- te auf der X-Axe liegen. In der Gleichung (121) ist diese Mög- eit an die Bedingung geknüpft, dass $m^2 < 1$ ist, während der für die andere Gleichung für jeden Wert von m gilt.

Eine analoge Beziehung ergiebt sich für die Fusspunktenfläche des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus. Da dieser -Cuneus die Y-Axe zur singulären Kante hat, so stellt die hung

$$c\zeta = m\,a\,\xi$$

Ebene dar, welche durch diese singuläre Kante geht. Dafür t man aus der Gleichung (120):

$$\frac{m^2a^2+c^2}{c^2}\xi^2 + \eta^2 = \pm\, a\eta\sqrt{m^2-1}$$

Diese Gleichung stellt, wenn $m^2 > 1$ ist, zwei Ellipsen dar, e sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittelpunkte er Y-Axe liegen.

Aus diesen Erörterungen folgt der Satz:

Jede durch die singuläre Kante eines geraden elliptischen oder bolischen Cono-Cuneus gehende Ebene schneidet im Allgemeinen der Fusspunktenfläche des betreffenden Cono-Cuneus für den linatenanfang als Pol zwei unter sich gleiche Ellipsen aus, e sich im Pol der Fläche berühren.

§ 33.

Was ferner die Fusspunktenfläche des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76)

$$\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

für den Coordinatenanfang als Pol betrifft, so hatten wir als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz desselben erhalten [§ 23. Gl. 81]:

$$\left(x-\frac{a}{c}z\right)\xi+\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)-\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right\}\zeta=0$$

Die Gleichungen der vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällten Senkrechten sind demnach:

$$\xi=\frac{x-\frac{a}{c}z}{-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)}\zeta$$

$$\eta=\frac{\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y}{-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)}\zeta$$

Daraus folgen für die Coordinaten des Fusspunktes dieser Senkrechten die Gleichungen:

$$\xi=\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)\left(\frac{az}{bc}\right)^2y^2}{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2+\left(\frac{az}{bc}\right)^4y^2+\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]^2}$$

$$\eta=\frac{\left(\frac{az}{bc}\right)^4y^3}{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2+\left(\frac{az}{bc}\right)^4y^2+\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]^2}$$

$$\zeta=\frac{\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]\left(\frac{az}{bc}\right)^2y^2}{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2+\left(\frac{az}{bc}\right)^4y^2+\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]^2}$$

rch Elimination von x, y, z mit Hilfe der Gleichung (76) folgt raus die Gleichung der gesuchten Fusspunktenfläche:

$$4)\qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{b^2\eta^2}{a^2\xi^2}\left[a^2\xi^2-(c\zeta+a\xi)^2\right]$$

Zunächst geht hieraus hervor, dass die Fusspunktenfläche ebenso e die im vorigen § betrachteten vom 6ten Grade ist. Ferner er- bt sich aus der Gleichung (124) für:

$$c\zeta+a\xi=0:$$

$$\frac{a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2=\pm b\eta$$

Daraus folgt der Satz: Die durch die singuläre Kante des ellip- chen Scheitel-Cono-Cuneus (76) gehende Ebene $c\zeta+a\xi=0$ schneidet s der zugehörigen Fusspunktenfläche (124) zwei Ellipsen aus, welche h im Coordinatenanfang berühren, und deren Projectionen auf die -Ebene die Halbaxen $\frac{bc}{2\sqrt{a^2+c^2}}$ und $\frac{b}{2}$ haben.

Auf analoge Weise erhält man für die Fusspunktenfläche des fachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84):

$$\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

den Coordinatenanfang als Pol die Gleichung:

$$5)\qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2=\frac{b^2\eta^2}{a^2\xi^2}\left[(c\zeta-a\xi)^2-a^2\xi^2\right]$$

Ferner war die Tangentialebene des geteilten hyperbolischen heitel-Cono-Cuneus (84):

$$\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x(\xi-x)-\left(y-\frac{b}{c}z\right)\eta+\left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)\right]\zeta=0$$

raus folgen die Gleichungen der durch den Coordinatenanfang henden, auf dieser Ebene senkrecht stehenden Geraden:

$$\xi=\frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x}{\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)}\zeta$$

$$\eta = -\frac{y - \frac{b}{c}z}{\frac{b^2 z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)}\,\zeta$$

Mithin genügen die Coordinaten des Fusspunktes dieser Senkrechten den Gleichungen:

$$\xi = \frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^3}{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^2 + \left(y-\frac{b}{c}z\right)^2 + \left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)\right]^2}$$

$$\eta = \frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x^2 \left(y-\frac{b}{c}z\right)}{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^2 + \left(y-\frac{b}{c}z\right)^2 + \left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)\right]^2}$$

$$\zeta = \frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x^2 \left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)\right]}{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^2 + \left(y-\frac{b}{c}z\right)^2 + \left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)\right]^2}$$

Hieraus folgt die Gleichung der Fusspunktenfläche des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) für den Coordinatenanfang als Pol:

(126) $$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{a^2\xi^2}{b^2\eta^2}\left[(c\zeta+b\eta)^2+b^2\eta^2\right].$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für $\zeta = 0$:

$$\xi^2+\eta^2 = \pm a\xi\sqrt{2}$$

d. h. in Worten: Die Fusspunktenfläche (126) schneidet die XY-Ebene in zwei Kreisen mit den Radien $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittelpunkte auf der X-Axe liegen.

Dreht man die Fläche (126) um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so dass die positive X-Axe in die negative Y-Axe fällt, dann geht die Gleichung derselben über in:

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{a^2\eta^2}{b^2\xi^2}\left[(c\zeta+b\xi)^2+b^2\xi^2\right]$$

Berücksichtigt man hierbei die Gleichung (124) der Fusspunktenfläche des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) und beachtet, dass, wenn man $a = b$ setzt, die beiden Gleichungen für $c\zeta + a\xi = 0$ übergehen in

$$\frac{a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2=\pm a\eta,$$

resultirt der Satz: Sind der elliptische und der geteilte hyper-olische Scheitel-Cono-Cuneus, deren singuläre Kanten auf einander enkrecht stehen und in einer Ebene liegen, so beschaffen, dass die bene in der Entfernung c von den singulären Kanten aus dem ellip-schen den Kreis mit dem Radius a, aus dem hyperbolischen die leichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a ausschneidet, so esteht die Durchschnittscurve der Fusspunktenfläche des elliptischen cheitel-Cono-Cuneus für den Coordinatenanfang als Pol mit der um um die Z-Axe gedrehten betreffenden Fusspunktenfläche des ge-eilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus aus zwei Ellipsen, welche ich im Coordinatenanfang berühren, und deren Projectionen auf die Y-Ebene die Halbaxen $\frac{ac}{2\sqrt{a^2+c^2}}$ und $\frac{a}{2}$ haben.

Wir wollen nun noch ähnlich wie im vorigen § die Durch-hnittscurven der drei abgeleiteten Fusspunktenflächen mit Ebenen, lche durch die singuläre Kante des zugehörigen Cono-Cuneus gehen, tersuchen. Da der elliptische und der einfache hyperbolische heitel-Cono-Cuneus die Y-Axe zur singulären Kante haben, so ist

$$c\zeta=ma\xi$$

e Ebene, welche durch diese singuläre Kante geht. Setzen wir sen Wert von ζ in die Gleichungen (124) und (125) ein, so gehen selben über in:

27) $$\frac{m^2a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2=\pm b\eta\sqrt{1-(m+1)^2}$$

28) $$\frac{m^2a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2=\pm b\eta\sqrt{(m-1)^2-1}$$

Diese beiden Gleichungen stellen im Allgemeinen je zwei Ellipsen r, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittel-nkte auf der Y-Axe liegen. Ein ähnliches Resultat ergiebt sich die Fusspunktenfläche (126) des geteilten hyperbolischen Scheitel-no-Cuneus. Dieser Cono-Cuneus hat die X-Axe zur singulären nte. Folglich stellt die Gleichung

$$c\zeta=mb\eta$$

e Ebene dar, welche durch diese singuläre Kante geht. Dadurch hält man aus der Gleichung (126):

(129) $$\xi^2 + \frac{m^2b^2 + c^2}{c^2}\eta^2 = \pm\, a\xi\sqrt{(m+1)^2+1}$$

Zugleich ist hieraus ersichtlich, dass aus der Fusspunktenfläche (126) jede durch die singuläre Kante des zugehörigen geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus gehende Ebene zwei Ellipsen ausschneidet, während bei den beiden vorhergehenden die Ebenen noch gewissen Beschränkungen unterworfen sind.

Diese Resultate können wir in den Satz zusammenfassen: Jede durch die singuläre Kante eines elliptischen oder eines hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus gehende Ebene schneidet im Allgemeinen aus der Fusspunktenfläche des betreffenden Cono-Cuneus für den Coordinatenanfang als Pol zwei sich gleiche Ellipsen aus, welche sich im Pol der Fläche berühren.

§ 34.

Um schliesslich die betreffenden Fusspunktenflächen der beiden betrachteten parabolischen Cono-Cunei zu untersuchen, so haben wir im § 29. als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des geraden parabolischen Cono-Cuneus erhalten:

$$pz^2(\xi - x) - c^2y\eta + 2pxz\zeta = 0$$

Demnach sind die Gleichungen der vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällten Senkrechten:

$$\xi = \frac{pz^2}{2pxz}\zeta$$

$$\eta = -\frac{c^2y}{2pxz}\zeta,$$

so dass man für den Fusspunkt dieser Senkrechten erhält:

$$\xi = \frac{p^2xz^4}{p^2z^4 + c^4y^2 + 4p^2x^2z^2}$$

$$\eta = -\frac{c^2pxyz^2}{p^2z^4 + c^4y^2 + 4p^2x^2z^2}$$

$$\zeta = \frac{2p^2x^2z^3}{p^2z^4 + c^4y^2 + 4p^2x^2z^2}$$

Daraus folgt als Gleichung der Fusspunktenfläche des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) für den Coordinatenanfang als Pol:

(130) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{c^2\xi\zeta^2}{2p\eta^2}.$$

Diese Fusspunktenfläche ist demnach vom vierten Grade, während die bisher betrachteten vom 6ten Grade sind.

Ferner ergiebt sich aus der Gleichung des geraden parabolischen Cono-Cuneus:

$$c^2\eta^2 = 2p\xi\zeta^2:$$

$$\frac{\xi\zeta^2}{\eta^2} = \frac{c^2}{2p}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (130) ein, so geht dieselbe über in

(131) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{c^4}{4p^2}$$

Daraus folgt der Satz: Der gerade parabolische Cono-Cuneus (99), die zugehörige Fusspunktenfläche (130) und die Kugel (131) schneiden sich in einer und derselben Curve.

Oder m. a. W. Die Durchschnittscurve des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) mit der zugehörigen Fusspunktenfläche für den Coordinatenanfang als Pol liegt auf einer Kugel mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren Radius die vierte Proportionale zu $2p$ und c ist.

Ein ähnliches Resultat erhält man für den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108). Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz desselben ist [§ 31. Gl. 113].

$$2pc\xi - 2yz(\eta - y) - y^2\zeta = 0$$

Die vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällte Senkrechte hat demnach die Gleichungen:

$$\xi = -\frac{2pc}{y^2}\zeta$$

$$\eta = \frac{2yz}{y^2}\zeta,$$

wodurch man für den Fusspunkt dieser Senkrechten erhält:

Daraus folgt als Gleichung der gesuchten Fusspunktenfläche:

$$(132) \qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2+\frac{2pc\eta^2\zeta}{\xi}=0$$

Das ist eine Gleichung fünften Grades.

Dreht man nun den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (1.. um die Z-Axe um π, so ist die Gleichung desselben:

$$\eta^2\zeta=-2pc\xi.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\eta^2\zeta}{\xi}=-2pc.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (132) ein, so geht dieselbe über in

$$(133) \qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=2pc$$

d. h. in Worten: Der um π um die Z-Axe gedrehte parabolische Scheitel-Cono-Cuneus (108), die zugehörige Fusspunktenfläche (132) und die Kugel (133) schneiden sich in einer und derselben Curve.

Oder: Die Durchschnittscurve des um π um die Z-Axe gedrehten parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) mit der zugehörigen Fusspunktenfläche (132) liegt auf einer Kugel um den Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren Radius die mittlere Proportionale zu $2p$ und c ist.

Setzt man ferner

$$2pc=\frac{c^4}{4p^2},$$

so folgt:

$$c=2p.$$

Daraus folgt der Satz: Schneiden sich die beiden parabolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten auf einander senkrecht stehen und in einer Ebene liegen, in einer Parabel, deren Parameter gleich ihrem Abstande von den singulären Kanten ist, so liegt die Durchschnittscurve des geraden parabolischen Cono-Cuneus mit der zugehörigen Fusspunktenfläche und die Durchschnittscurve der Fusspunktenfläche des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus mit dem um π um die Z-Axe gedrehten parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus auf einer und derselben Kugel um den Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren Radius gleich dem Parameter der Durchschnittsparabel der beiden Cono-Cunei ist.

Schliesslich wollen wir noch die Durchschnittscurven der beiden sspunktenflächen (130) und (132) mit Ebenen, welche durch die guläre Kante des betreffenden Cono-Cuneus gehen, untersuchen.

Schneiden wir zu dem Ende die Fläche (130) durch die Ebene:

$$\zeta = \mu\eta,$$

lche durch die X-Axe, also durch die singuläre Kante des geraden rabolischen Cono-Cuneus (99) geht, so erhält man für die Protion der betreffenden Durchschnittscurve auf die XY-Ebene:

$$34) \qquad \xi^2 + (\mu^2+1)\eta^2 = \frac{\mu^2 c^2}{2p}\xi$$

Hieraus folgt, dass jede durch die singuläre Kante des geraden rabolischen Cono-Cuneus gehende Ebene die zugehörige Fusspunkten-che in einer Ellipse schneidet, welche durch den Pol der Fuss-nktenfläche geht. Hierin unterscheidet sich also die Fusspunkten-che des geraden parabolischen Cono-Cuneus von den bisher trachteten und, wie wir sogleich sehen werden, auch von derjenigen s parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus, aus denen jede durch die guläre Kante des betreffenden Cono-Cuneus gehende Ebene im lgemeinen je zwei Ellipsen ausschneidet.

Um dies für die Fläche (132) nachzuweisen, betrachten wir die urchschnittscurve derselben mit der Ebene:

$$\zeta = -\mu\xi$$

a die Y-Axe singuläre Kante des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus 08) ist. Für die Projection der in Rede stehenden Durchschnitts-rve auf die XY-Ebene ergiebt sich alsdann:

$$35) \qquad (1+\mu^2)\xi^2 + \eta^2 = \pm\,\eta\sqrt{2\mu pc}$$

omit die obige Behauptung bewiesen ist.

Wir haben also gefunden, dass die Fusspunktenflächen des ge-den elliptischen, der beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei d diejenigen des elliptischen und der beiden hyperbolischen Scheitel-ono-Cunei vom 6ten Grade sind, während die Fusspunktenfläche s geraden parabolischen Cono-Cuneus eine Fläche vierten Grades, ejenige des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus eine Fläche fünften rades ist.

Ferner stimmen die Fusspunktenflächen des geraden elliptisch ono-Cuneus und der geraden hyperbolischen Cono-Cunei mit den en der betrachteten Scheitel-Cono-Cunei darin überein, dass jede

die singuläre Kante des betreffenden Cono-Cuneus gehende Eben
Allgemeinen aus ihnen je zwei Ellipsen ausschneidet, welche sich
Pol der Fläche berühren. Die Durchschnittscurve der Fusspunk
fläche des geraden parabolischen Cono-Cuneus mit einer durch
singuläre Kante dieses Cono-Cuneus gehenden Ebene dagegen be
nur aus einer Ellipse, welche durch den Pol der Fusspunktenfläche g

VII. Abschnitt.

Die Meridiancurven der Cono-Cunei.

§ 35.

Wir schliessen hier eine kurze Behandlung einer Art von Cu
auf den Cono-Cuneis an. Auf den Rotationsflächen untersch
man Meridiane und Curven gleicher Polhöhe. Diese Terminologie
Alfred Enneper auf krumme Oberflächen übertragen und diese Cu
folgendermassen definirt [1]). Im Punkte xyz einer Fläche bilde die N
male den Winkel u mit der Z-Axe, durch v werde der Winkel
zeichnet, welchen die Projection der Normale auf die XY-Ebene
der Axe der x einschliesst. Einem bestimmten Werte von u
spricht auf der Fläche eine bestimmte Curve, für welche v a
variabel ist. Dieselbe heisst auf den Rotationsflächen eine C
gleicher Polhöhe. Variirt u allein, hat also v einen bestimm
Wert, so entspricht demselben eine Curve, welche bei den Rotati
flächen den Namen Meridian führt.

Wir wollen in Folgendem die Meridiancurven der Cono-C
betrachten. Wird z als Function von x und y angesehen, dann
steht die Gleichung

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \operatorname{tg} v$$

Mittelst der Gleichung (17) des geraden elliptischen Cono-Cun
ergiebt sich:

$$\operatorname{tg} v = \frac{a^2 - x^2}{xy}$$

(136) $$a^2 - x^2 - xy \operatorname{tg} v = 0$$

---

1) cf. Alfred Enneper: „Ueber Flächen mit besonderen Meridiancur
im XXIX. Bde. der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissens
[illegible] Göttingen.

Diese Gleichung lässt erkennen, dass die Projection der Meridiancurve des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) auf die XY-Ebene eine Hyperbel mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt ist, deren eine Axe mit der Axe der x den Winkel $\frac{1}{2}v$ bildet, und deren Axen bezüglich gleich: $\frac{a}{\cos\frac{1}{2}v}\sqrt{\cos v}$ und $\frac{a}{\sin\frac{1}{2}v}\sqrt{\cos v}$ sind.

Zu demselben Resultate gelangt man beim geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37). Man erhält nämlich:

$$\operatorname{tg} v = -\frac{x^2 - a^2}{xy}$$

Daraus fliesst der Satz: die Meridiancurven des geraden elliptischen und die des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus liegen auf denselben hyperbolischen Cylinderflächen.

Diese Meridiancurven sind Curven doppelter Krümmung. Denn wäre dies nicht der Fall, so müsste, wie in der Theorie der Curven nachgewiesen wird, wenn man x als unabhängige Veränderliche annimmt:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2y}{dx^2} & \frac{d^3y}{dx^3} \\ \frac{d^2z}{dx^2} & \frac{d^3z}{dx^3} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Man erhält aber für die Meridiancurven des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) als Wert dieser Determinante:

$$\frac{6a^4c}{x^3(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}^2 v}$$

und für diejenigen des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37)

$$\frac{6a^4c}{x^3(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}^2 v}.$$

Setzt man den Wert von a^2-x^2 aus der Gleichung (136) in die Gleichung (17), so ergiebt sich:

(137) $$c^2y = xz^2 \operatorname{tg} v$$

Die Meridiancurven des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) liegen demnach auch auf Flächen, welche durch die Gleichung (137) dargestellt werden. Es sind dies parabolische Scheitel-Cono-Cunei, deren Leitlinien den Gleichungen:

$$z^2 = cy \operatorname{ctg} v$$
$$x = c$$

genügen, welche also die XY-Ebene zur Directorebene und die Z-Axe zur singulären Kante haben.

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37), dessen Meridiancurven auf den Flächen:

$$c^2 y = -xz^2 \operatorname{tg} v_1$$

$$(138) \qquad c^2 y = xz^2 \operatorname{tg}(\pi - v_1)$$

liegen. Daraus geht hervor, dass die parabolischen Scheitel-Cono-Cunei der eben beschriebenen Art sowol den geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) als auch den geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37) in Meridiancurven schneiden.

Ferner erhält man für den geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus (67):

$$\operatorname{tg} v = -\frac{xy}{y^2 + b^2}$$

$$(139) \qquad y^2 \operatorname{tg} v + xy + b^2 \operatorname{tg} v = 0$$

Die Meridiancurven des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus (67) liegen mithin ebenso wie diejenigen des geraden elliptischen und des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus auf hyperbolischen Cylinderflächen, deren Axe die Z-Axe ist. Die Spuren dieser Cylinderflächen in der XY-Ebene sind Hyperbeln mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren eine Axe mit der Axe der x den Winkel $\frac{1}{2}v$ bildet und deren Axen bezüglich

$$b\sqrt{\frac{2\sin v}{1+\sin v}} \quad \text{und} \quad b\sqrt{\frac{2\sin v}{1-\sin v}} \quad \text{sind.}$$

Durch Substitution des Wertes von $y^2 + b^2$ aus (139) in (67) ergiebt sich:

$$b^2 c^2 x \operatorname{tg} v = -a^2 yz^2$$

$$(140) \qquad b^2 c^2 x = a^2 yz^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$$

Durch Vertauschung von x mit y geht die Gleichung über in:

$$(141) \qquad b^2 c^2 y = a^2 xz^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$$

Vergleichen wir die Resultate (137), (138) und (141), so resultirt der Satz:

Die Meridiancurven des geraden elliptischen, des geraden geteilten und des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus, welche die singuläre Kante und die Directorebene gemeinsam haben, und

welche so beschaffen sind, dass eine und dieselbe Ebene aus dem elliptischen einen Kreis, aus den beiden hyperbolischen je eine gleichseitige Hyperbel mit einem Parameter gleich dem doppelten Radius des Kreises des elliptischen Cono-Cuneus ausschneidet, liegen auf denselben parabolischen Scheitel-Cono-Cuneis.

§ 36.

Um nun die Meridiancurven des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) zu untersuchen, so folgt aus der Gleichung (76):

(142) $$z = \frac{bcx}{a(b + \sqrt{b^2 - y^2})}$$

Mithin erhält man:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{bc}{a(b + \sqrt{b^2 - y^2})};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{bcxy}{a(b + \sqrt{b^2 - y^2})^2 \sqrt{b^2 - y^2}},$$

so dass sich ergiebt:

(143) $$\operatorname{tg} v = \frac{xy}{(b + \sqrt{b^2 - y^2})\sqrt{b^2 - y^2}}$$

Diese Gleichung stellt eine Cylinderfläche 6ten Grades dar; denn man erhält daraus:

$$x^4 y^2 \operatorname{ctg}^4 v + (b^2 - y^2)^2 y^2 = 2x^2 \operatorname{ctg}^2 v (b^2 - y^2)(2b^2 - y^2)$$

Während daher die Projectionen der Meridiancurven des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) auf die XY-Ebene Hyperbeln, d. h. Curven zweiten Grades sind, liegen die Meridiancurven des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) auf Cylinderflächen 6ten Grades.

Setzt man für die irrationalen Ausdrücke: $b + \sqrt{b^2 - y^2}$ und $\sqrt{b^2 - y^2}$ die aus der Gleichung (142) folgenden rationalen, so geht die Gleichung (143) über in

(144) $$\operatorname{tg} v = \frac{a^2 y z^2}{b^2 c (cx - az)}$$

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84):

$$\frac{\left(x - \frac{a}{c} z\right)^2}{\left(\frac{a}{c} z\right)^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Man erhält nämlich:

$$\operatorname{tg} v_1 = -\frac{xy}{(b+\sqrt{y^2+b^2})\sqrt{y^2+b^2}}$$

(145) $$\operatorname{tg}(\pi - v_1) = \frac{xy}{(b+\sqrt{y^2+b^2})\sqrt{y^2+b^2}}$$

Die Meridiancurven des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) liegen demnach ebenso wie diejenigen des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) auf Cylinderflächen 6ten Grades. Ferner folgt aus der Gleichung (145):

(146) $$\operatorname{tg}(\pi - v_1) = \frac{a^2 y z^2}{b^2 c(cx - az)}$$

Aus der Vergleichung von (144) und (146) resultirt der Satz: Die Meridiancurven des elliptischen und des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus, welche dieselbe singuläre Kante und dieselbe Directorebene haben, liegen auf denselben Flächen dritten Grades.

Schliesslich erhält man für den geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus aus der Gleichung (108):

$$z = \frac{acy}{b(a+\sqrt{x^2-a^2})}$$

Demnach ergiebt sich:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{acxy}{b(a+\sqrt{x^2-a^2})^2\sqrt{x^2-a^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ac}{b(a+\sqrt{x^2-a^2})},$$

also:

$$\operatorname{tg} v' = -\frac{(a+\sqrt{x^2-a^2})\sqrt{x^2-a^2}}{xy}$$

oder:

(147) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + v'\right) = \frac{xy}{(a+\sqrt{x^2-a^2})\sqrt{x^2-a^2}}$$

Die Meridiancurven des elliptischen und der beiden hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei stimmen also darin überein, dass sie auf Cylinderflächen 6ten Grades liegen.

Ferner folgt aus (147):

(148) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + v'\right) = \frac{b^2 x z^2}{a^2 c(cy - bz)}$$

Dreht man den geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so dass die positive X-Axe in die negative Y-Axe fällt, so haben wir nur x mit y zu vertauschen, alles

Uebrige bleibt unverändert. Führen wir diese Vertauschung in der Gleichung (148) aus, so geht dieselbe über in

$$(149)\qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+v'\right)=\frac{b^2 y z^2}{a^2 c(cx-bz)}$$

Aus der Vergleichung von (144), (146) und (149) resultirt der Satz:

Die Meridiancurven des elliptischen, des einfachen und des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus, welche dieselbe singuläre Kante und dieselbe Directorebene haben, und welche so beschaffen sind, dass eine und dieselbe Ebene aus dem elliptischen einen Kreis, aus den beiden hyperbolischen je eine gleichseitige Hyperbel mit einem Parameter gleich dem doppelten Radius des Kreises des ellip- Scheitel-Cono-Cuneus ausschneidet, liegen auf denselben Flächen dritten Grades.

Es ist dies eine ganz ähnliche Beziehung, wie wir sie am Ende des vorigen § für die drei entsprechenden geraden Cono-Cunei abgeleitet haben.

§ 37.

Verfolgen wir nun dieselbe Untersuchung für die beiden parabolischen Cono-Cunei. Aus der Gleichung (99) des geraden parabolischen Cono-Cuneus geht hervor:

$$z=\frac{cy}{\sqrt{2px}}.$$

also:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{cy}{2\sqrt{2px^3}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c}{\sqrt{2px}}.$$

Mithin erhält man:

$$\operatorname{tg} v=-\frac{2x}{y}$$

$$(150)\qquad 2x+y\operatorname{tg} v=0$$

Die Meridiancurven des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) liegen demnach in Ebenen, welche durch die Z-Axe gehen. Es sind mithin zum Unterschiede von den bisher betrachteten ebene Curven, und zwar Parabeln, welche der Gleichung genügen:

$$z'^2=\frac{2c^2\operatorname{ctg}^2 v}{p\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2 v}}\,x'.$$

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108):

$$z = \frac{2pcx}{y^2}.$$

Es folgt nämlich hieraus:

$$\operatorname{tg} v = -\frac{2x}{y}$$

$$2x + y \operatorname{tg} v = 0$$

d. i. aber die Gleichung (150). Mithin resultirt der Satz: Die durch die Z-Axe gehenden Ebenen schneiden sowol den geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) als auch den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) in Meridiancurven.

Die Meridiancurven des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) sind aber, wie sich aus den Erörterungen des § 30. Gl. (112) ergiebt, zum Unterschiede von denen des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) gleichseitige Hyperbeln; sie liegen also auf hyperbolischen Cylinderflächen, und hierin stimmen sie mit den Meridiancurven des geraden elliptischen und der beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei überein.

Ziehen wir schliesslich allgemein die durch die Gleichung (4):

$$cy = zf(x)$$

dargestellten Flächen in Betracht, so ergiebt sich für dieselben:

$$\operatorname{tg} v = -\frac{f(x)}{yf'(x)}$$

also:

$$yf'(x) \operatorname{tg} v + f(x) = 0$$

Die Projectionen der Meridiancurven der durch die Gleichung (4) dargestellten Flächen auf die XY-Ebene sind demnach im Allgemeinen Curven $m$ten Grades, wenn m den Grad von $f(x)$ bedeutet, vorausgesetzt dass $f(x)$ eine ganze rationale Function von x bezeichnet.

Dieser Satz gilt auch, wenn die Leitlinie der Fläche der Gleichung: $y^n = f(x)$ genügt, so dass der Grad der auf die XY-Ebene projicirten Meridiancurven der Fläche (4) von n unabhängig ist.

Denn es ergiebt sich für diesen Fall:

$$yf'(x) \operatorname{tg} v + nf(x) = 0$$

VIII. Abschnitt.

Verallgemeinerungen der Cono-Cunei.

§ 38.

Zum Schluss wollen wir an bisher gefundene Resultate einige Bemerkungen anknüpfen, indem wir die betrachteten Flächen etwas verallgemeinern.

Wir ändern zunächst die Bedingung, dass die singuläre Kante einer Axe des Leitkegelschnitts parallel ist, dahin ab, dass eine Axe des Leitkegelschnitts mit der singulären Kante den Winkel α bildet, während diese Kante der Ebene des Leitkegelschnitts parallel ist und durch die im Mittelpunkte desselben auf seiner Ebene senkrecht stehende Gerade geht.

Sind die Gleichungen des Leitkegelschnitts:

$$\text{(151)} \qquad \left\{ \begin{array}{r} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D \\ z = c \end{array} \right.$$

dann ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Fläche, wenn die Ebene der yz die Directorebene ist:

$$\text{(152)} \qquad Ax^2z^2 + 2Bcxyz + Cc^2y^2 = Dz^2$$

Daraus folgt, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene die Fläche (152) in einem Kegelschnitte schneidet, und zwar da das charakteristische Binom desselben gleich $(B^2 - A.C)c^2z^2$ ist, in einer Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der Leitkegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

Um diesen Kegelschnitt näher zu untersuchen, betrachten wir die allgemeine Mittelpunktsgleichung eines solchen:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D$$

Wenden wir hierauf die Coordinatentransformation an:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y &= -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{aligned}$$

so geht diese Gleichung über in

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = D$$

wobei:

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha \\ B' &= \tfrac{1}{2}A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}C\sin 2\alpha \\ C' &= A\sin^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \end{aligned}$$

$B' = 0$ liefert die Bedingung: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{C-A}$. Dadurch ergiebt sich:

$$A' = \tfrac{1}{2}(A+C) + \frac{(A-C)^2 - 4B^4}{2\sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}$$

$$C' = \tfrac{1}{2}(A+C) - \frac{(A-C)^2 - 4B^2}{2\sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}$$

Diese Resultate auf die Gleichung (152) angewandt, liefert:

$$(153) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2Bcz}{Cc^2 - Az^2} \\ A' = \tfrac{1}{2}(Az^2 + Cc^2) + \dfrac{(Az^2 - Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2}{2\sqrt{(Cc^2 - Az^2)^2 + 4B^2c^2z^2}} \\ C' = \tfrac{1}{2}(Az^2 + Cc^2) - \dfrac{(Az^2 - Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2}{2\sqrt{(Cc^2 - Az^2)^2 + 4B^2c^2z^2}} \end{cases}$$

Daraus geht hervor, dass die Fläche (152) dadurch entstanden gedacht werden kann, dass sich eine Ellipse oder Hyperbel mit variablen Axen parallel mit sich selbst bewegt, während ihr Mittelpunkt eine auf der Ebene des Kegelschnitts senkrechte Gerade beschreibt und ihre Axen sich um den Mittelpunkt drehen. Diese Art von Flächen unterscheidet sich dadurch von den Cono-Cuneis, dass hier beide Axen des beweglichen Kegelschnitts variabel sind, während bei jenen nur eine Axe sich ändert. Sie haben das mit den elliptischen Cono-Cuneis gemein, dass auch hierbei unter den ausgeschnittenen Ellipsen ein Kreis vorkommt, und zwar erhält man denselben für

$$(Az^2 - Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2 = 0$$

$$(154) \quad z = \pm \frac{c}{A}(B + \sqrt{B^2 + A.C})$$

Wenn der Leitkegelschnitt hierbei eine Parabel ist, so ist, weil der Mittelpunkt derselben im Unendlichen liegt, die singuläre Kante der Parabelaxe parallel, ihre Projection auf die Parabelebene braucht aber nicht mit der Parabelaxe zusammenzufallen, sondern kann von ihr um irgend eine Strecke δ entfernt sein.

Um diesen Fall zu untersuchen, nehmen wir als Gleichungen der Leitparabel:

$$(155) \quad \begin{cases} (y-\delta)^2 = 2px \\ z = c, \end{cases}$$

wodurch wir als Gleichungen der betreffenden Fläche erhalten:

$$56)\qquad \left(y - \frac{\delta}{c}z\right)^2 = 2p\,\frac{z^2}{c^2}\,x$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass jede zur XY-Ebene parallele ene die betreffende Fläche in einer Parabel schneidet, deren Para- ter proportional dem Quadrate der Entfernung der schneidenden ene von der singulären Kante wächst. Die Axen dieser aus- schnittenen Parabeln sind der singulären Kante parallel und ent- nen sich von der XZ-Ebene proportional dem Abstande der neidenden Ebene von der XY-Ebene. Diese Fläche ist also ein hiefer parabolischer Cono-Cuneus.

§ 39.

Eine andere Verallgemeinerung ist die, dass die Ebene des Leit- gelschnitts nicht der singulären Kante parallel ist, sondern mit ihr n Winkel α bildet. Wir wollen hierbei zunächst den speciellen ll untersuchen, wo

$$57)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = (a + x)\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

e Gleichungen der Leitlinie sind. Die Gleichung der betreffenden läche ist demnach:

$$58)\qquad y^2(a+x)^2\operatorname{tg}^2\alpha = (r^2 - x^2)z^2$$

Betrachten wir die Durchschnittscurve dieser Fläche vierten rades mit einer Ebene senkrecht auf der XZ-Ebene, welche mit r X-Axe den Winkel ψ bildet und von derselben das Stück c ab- schneidet, so ergiebt sich, wenn man die Coordinatentransformation wendet:

$$59)\qquad \begin{cases} x = x'\cos\psi - z'\sin\psi \\ y = y' \\ z = c\operatorname{tg}\psi + x'\sin\psi + z'\cos\psi \end{cases}$$

d $z' = 0$ setzt, als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$y^2(a + x'\cos\psi)^2\operatorname{tg}^2\alpha = (r^2 - x'^2\cos^2\psi)(c + x'\cos\psi)^2\operatorname{tg}^2\psi$$

Für $c = a$ geht diese Gleichung über in

$$60)\qquad \begin{cases} a + x'\cos\psi = 0 \\ y'^2\operatorname{tg}^2\alpha = (r^2 - x'^2\cos^2\psi)\operatorname{tg}^2\psi \end{cases}$$

Daraus folgt: Alle Ebenen senkrecht auf der XZ-Ebene, welche rch die in der XY-Ebene liegende Gerade $x = -a$ gehen, schnei-

den die Fläche (158) in Ellipsen, deren Mittelpunkte auf der Z-Axe liegen, und deren Axen bezüglich in die Ebenen der xz und der yz fallen.

Zugleich ist ersichtlich: Wenn $a > r$ ist, so besteht die betrachtete Durchschnittscurve nur aus der beschriebenen Ellipse; ist dagegen $a \overline{\leq} r$, so erhält man ausser dieser Ellipse noch eine Gerade.

Unter den ausgeschnittenen Ellipsen findet sich ein Kreis, und zwar für $\sin\psi = \operatorname{tg}\alpha$. Ein Kreis kann demnach nur aus der Fläche (158) ausgeschnitten werden, wenn $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$ ist.

Hätten wir als Gleichungen des Leitkegelschnitts allgemein angenommen:

$$(161)\quad \begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ z = (a + x)\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

so hätten wir als Gleichung der Fläche erhalten:

$$(162)\quad \begin{cases} z^2 . \varphi_1 + z(a+x) . \varphi_2 + (a+x)^2 . \varphi_3 = 0 \\ \varphi_1 = Ax^2 + 2Dx + F \\ \varphi_2 = 2(Bx + E)\, y \operatorname{tg}\alpha \\ \varphi_3 = Cy^2 \operatorname{tg}^2\alpha \end{cases}$$

Für die Durchschnittscurve der oben definirten Ebene mit dieser Fläche ergiebt sich für $c = a$:

$$(163)\quad \begin{cases} a + x' \cos\psi = 0 \\ \varphi_1' . \operatorname{tg}^2\psi + \varphi_2' . \operatorname{tg}\psi + \varphi_3' = 0 \end{cases}$$

Der ausgeschnittene Kegelschnitt ist also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem:

$$(B^2 - A . C)\operatorname{tg}^2\alpha . \sin^2\psi \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$$

ist, d. h. je nachdem die Leitlinie eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Das charakteristische Binom verschwindet allerdings auch für $\psi = 0$. In diesem Falle ergiebt sich aber die singuläre Kante als Durchschnittscurve. Man kann demnach die betrachteten Flächen so entstanden denken, dass sich ein variabler Kegelschnitt um eine in seiner Ebene liegende Gerade dreht, während die Punkte seiner Peripherie gerade Linien beschreiben, welche einer durch die Drehungsaxe gehenden Ebene parallel sind und durch eine auf dieser Directionsebene senkrecht stehende Gerade gehen, welche die Drehungsaxe schneidet.

Die Cono-Cunei gehen dadurch hieraus hervor, dass die Drehungsaxe ins Unendliche rückt.

Aus der Gleichung (158) ergeben sich folgende zwei specielle Fälle.

Für $a = 0$ geht dieselbe über in

(164) $$x^2 y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (r^2 - x^2) z^2$$

Für $a = r$ ergiebt sich aus (158):

(165) $$y^2 (r + x) \operatorname{tg}^2 \alpha = (r - x) z^2$$

Diese letztere Gleichung stellt eine Fläche dritten Grades dar, welche die Eigenschaft hat, wie sich leicht nachweisen lässt, dass die Tangentialebene aus ihr im Allgemeinen die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende der Fläche und eine Ellipse ausschneidet.

§ 40.

Schliesslich wollen wir noch eine dritte Voraussetzung, welche wir bei der Definition der Cono-Cunei gemacht haben, fallen lassen. Wir haben dort nämlich angenommen, dass die singuläre Kante auf der Directorebene senkrecht steht, oder, was dasselbe bedeutet, dass die erzeugenden Geraden die singuläre Kante rechtwinklig schneiden. Betrachten wir nun den allgemeineren Fall, dass die Projectionen der Erzeugenden auf die XZ-Ebene mit der singulären Kante den Winkel β bilden.

Diese Erzeugenden müssen demnach den Gleichungen genügen, wenn wir die singuläre Kante wieder zur X-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems nehmen:

(166) $$\begin{cases} y = uz \\ x = v + z \operatorname{ctg} \beta \end{cases}$$

Hat der Leitkegelschnitt allgemein die Gleichungen:

(167) $$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ z = (a + x) \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

so erhält man als Gleichung der betreffenden Fläche, wenn man

$$1 - \operatorname{tg} \alpha . \operatorname{ctg} \beta = m; \quad \operatorname{tg} \alpha . \operatorname{ctg} \beta = n$$

setzt:

(168) $$\begin{cases} z^2 . \varphi_1 + z(a + x) . \varphi_2 + (a + x)^2 . \varphi_3 = 0 \\ \varphi_1 = A[na + x - z \operatorname{ctg} \beta]^2 - 2Bny[(1 + n)a + 2x - z \operatorname{ctg} \beta] \\ \quad + Cn^2 y^2 + 2Dm[na + x - z \operatorname{ctg} \beta] - 2Em . ny + F . m^2 \\ \varphi_2 = 2[B(na + x) - Cny + Em] y \operatorname{tg} \alpha \\ \varphi_3 = Cy^2 . \operatorname{tg}^2 \alpha \end{cases}$$

Wir wollen nun nachweisen, dass auch diese Flächen durch Drehung eines veränderlichen Kegelschnitts entstehen können. Zu dem Zwecke betrachten wir die Durchschnittscurve der Fläche (168) mit einer auf der XZ-Ebene senkrecht stehenden Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel ψ bildet und von derselben das Stück c abschneidet. Mit Hülfe der Transformationsgleichungen (159) des vorigen § ergiebt sich als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$(169) \quad \left\{ \begin{aligned} & (c+x'\cos\psi)^2 . \varphi_1' . \operatorname{tg}^2\psi \\ & + (c+x'\cos\psi)(a+x'\cos\psi) . \varphi_2' . \operatorname{tg}\psi \\ & + (a+x'\cos\psi)^2 . \varphi_3' = 0 \end{aligned} \right.$$

Wird $c = a$, so geht diese Gleichung über in

$$(170) \quad \left\{ \begin{aligned} & a + x'\cos\psi = 0 \\ & \varphi_1' . \operatorname{tg}^2\psi + \varphi_2' . \operatorname{tg}\psi + \varphi_3' = 0 \end{aligned} \right.$$

Aus den Gleichungen (168) geht hervor, dass φ_1', φ_2', φ_3' Functionen zweiten Grades in x', y' sind. Mithin resultirt der Satz:

Diejenigen auf der XZ-Ebene senkrechten Ebenen, welche durch die in der XY-Ebene liegende Gerade $x = -a$ gehen, schneiden aus der Fläche (168) im Allgemeinen Kegelschnitte aus.

Das charakteristische Binom der Gleichung der Kegelschnitte ist:

$$(B^2 - A.C)(\operatorname{ctg}\psi - \operatorname{ctg}\beta)^4 . \sin^2\psi . \operatorname{tg}^4\psi . \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Das Vorzeichen desselben hängt mithin von dem Vorzeichen von $B^2 - A.C$ ab, d. h. der ausgeschnittene Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Leitkegelschnitt der Fläche (168) eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Allerdings verschwindet das charakteristische Binom auch für $\psi = 0$ und für $\psi = \beta$. Im ersteren Falle erhält man aber als Durchschnittscurve die singuläre Kante, im zweiten eine erzeugende Gerade der Fläche oder kein geometrisches Gebilde.

Damit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

XVII.

Das Sehnen-Tangentenviereck.

Von

Herrn Dr. J. **Schumacher.**

In der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", herausgegeben von J. C. V. Hoffmann, ist im 8. Jahrgang pag. 502. Aufgabe Nummer 48. von Herrn Geheimrat Dr. Schlömilch die nachfolgende Aufgabe gestellt:

„Die Vierecke, welche einem Kreise eingeschrieben und zugleich „einem andern Kreise umgeschrieben sind, bieten mancherlei Auf„gaben dar, von denen bisher nur wenige (z. B. die Ermittelung des „Abstandes der beiden Kreiscentren) Beachtung gefunden haben. „Als Beispiel eines hierher gehörenden Problems sei folgendes er„wähnt: Aus drei gegebenen Eckpunkten A, B, C eines solchen Vier„ecks den vierten Eckpunkt D zu suchen."

„Vierecke der genannten Art sind durch drei gegebene Stücke „bestimmt; die Bearbeitung der einzelnen Fälle gäbe eine kleine „Theorie, die sich vielleicht rein geometrisch behandeln lassen wird."

Ich habe mich an die Untersuchungen dieser besonderen Art von Vierecken gemacht, bin jedoch nicht dem Rate des sehr geehrten Herrn Aufgabenstellers, die sämtlichen einzelnen Fälle, durch die ein Sehnentangentenviereck bestimmt sein kann, zu behandeln, gefolgt, sondern suchte nur die Eigenschaften dieser speciellen Gattung von Vierecken herauszufinden, durch welche ich leichter in den Stand gesetzt zu sein glaubte, die einzelnen Fälle eleganter lösen zu können.

Die Vermutung Schlömilch's, dass die Bearbeitung derselben sich vielleicht rein geometrisch behandeln lassen wird, habe ich bestätigt gefunden.

Die in denselben Zeitschriften über das bicentrische Viereck angestellten Untersuchungen des Herrn R. O. Consentius aus Carlsruhe und jene des Herrn Dr. Eheler aus Zülichau habe ich nicht gekannt und wurde erst, nachdem meine Arbeit schon ziemlich vorgeschritten war, von Herrn Rector Dietsch auf dieselben aufmerksam gemacht. Wo die Resultate, namentlich des ersten Herrn, mit den meinigen die gleichen sind, wird der verschiedenartige Weg, auf welchem wir zu gleichen Schlüssen kamen, die obige Behauptung bestätigen.

Indem ich die interessanten Schlussfolgerungen des Herrn Consentius vollkommen anerkenne, kann ich mir nicht das Urteil versagen, dass genannter Herr auf seinem Wege nicht die Reichhaltigkeit der Eigenschaften erschöpft hätte, wie sie nur bei directer Untersuchung des Sehnen-Tangentenvierecks möglich ist; denn die sich ergebenden Schlussfolgerungen sind in der Tat so vielseitig, dass ich nicht leugne, manche in dieser Abhandlung unerwähnt gelassen zu haben, die von Interesse sind, weil ich sie im Gange meiner Betrachtung für selbstverständlich gehalten habe.

Die Schuld an der geringeren Zahl der Aufgaben, die von Herrn Consentius in dieser Zeitschrift gestellt sind, trägt wohl die allgemeinere also auch desto schwierigere Behandlung.

Meinen Betrachtungen legte ich die Kenntniss der zwei Fundamentalsätze des Sehnen- und Tangentenvierecks zu Grunde:

1) In jedem Sehnenviereck ist die Summe der gegenüberliegenden Winkel $= 180^0$.

2) In jedem Tangentenviereck sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Zum Beweise meiner Lehrsätze werde ich mich des rechnerischen und des rein geometrischen Verfahrens bedienen und demgemäss diese Arbeit in zwei Teile zu teilen haben, von denen der eine das geometrische, der andere das rechnerische Resüme enthält. Manche Lehrsätze werden sich in beiden Teilen bestätigt finden.

Es sei das Sehnen-Tangentenviereck A, B, C, D gegeben durch den Radius des eingeschriebenen Kreises $= \varrho$ und zwei einer Seite anliegende Winkel (A und B). Verbinden wir den Mittelpunkt desselben (M) mit den vier Ecken A, B, C, D, und fällen wir ausserdem noch von M aus die Lote auf die Seiten (Ma_1, Mb_1, Mc_1, Md_1)

so erhalten wir die 4 Sehnenvierecke MAa_1d_1, MBa_1b_1, MCb_1c_1, MDc_1d_1. Fassen wir nun zwei, welche gegenüberliegende Ecken enthalten, ins Auge, etwa die Vierecke

$$MBa_1b_1 \quad \text{und} \quad MDd_1c_1,$$

so ist

$$\text{Wkl. } B + a_1Mb_1 = 2R$$

$$\text{Wkl. } D + d_1Mc_1 = 2R$$

folglich

$$\text{Wkl. } B + D + a_1Mb_1 + d_1Mb_1 + d_1Mc_1 = 4R$$

$$-\text{Wkl. } B \pm D \qquad = 2R$$

folglich

$$\text{Wkl. } a_1Mb_1 + d_1Mc_1 \qquad = 2R$$

folglich

$$a_1Mb_1 = D$$

und

$$d_1Mc_1 = B.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Construction des Sehnen-Tangentenvierecks aus ϱ und zwei Winkeln.

Halbire den Winkel A und lasse dessen Schenkel den Kreis vom Radius ϱ berühren. Hierauf ziehe M_1a_1 und Md_1 und trage an Md_1 den Winkel B an. Die Schenkel dieses Winkels schneiden auf dem Kreise um M den Berührungspunkt c_1 aus. An Mc_1 trage wieder den Winkel A an, von welchem der Schenkel Mb_1 den vierten Berührungspunkt auf dem Kreise um M ausschneidet.

Die Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 sind die Berührungspunkte der Seiten des gesuchten Vierecks und die Tangenten in ihnen an den Kreis um M schneiden sich in den Ecken A, B, C, D, die wiederum auf einem Kreise liegen.

Aus der nachgewiesenen Eigenschaft des Sehnen-Tangentenvierecks folgern sich noch mehrere andere Constructionen, die wir übergehen, weil es uns nur um die Wirklichkeit eines solchen Vierecks vorerst zu tun ist.

In jedem Sehnen-Tangentenviereck ergänzen sich die Bögen des eingeschriebenen Kreises, die zwischen gegenüberliegenden Winkeln des Vierecks $ABCD$ liegen, zu einem Halbkreise.

Da Wkl. $a_1Mb_1 + d_1Mc_1 = 180^0$ beträgt, müssen auch die Bögen

$$\widehat{a_1b_1} + \widehat{c_1d_1} = 180^0$$

und analog

$$\widehat{a_1d_1} + \widehat{b_1c_1} = 180^0$$

betragen.

Die Verbindungslinien der Berührungspunkte a_1, b_1, c_1, d_1 liefern ein neues Sehnenviereck, welches nicht zugleich Tangentenviereck ist, und dessen Diagonalen auf einander senkrecht stehen. Dass a_1, b_1, c_1, d_1 ein Sehnenviereck, ist sofort aus der Figur einzusehen.

Ist ϱ der Radius des Kreises um M, dann erhalten wir:

$$a_1b_1 = 2\varrho\cos\frac{B}{2} \qquad a_1d_1 = 2\varrho\cos\frac{A}{2}$$

$$c_1d_1 = 2\varrho\sin\frac{B}{2} \qquad b_1c_1 = 2\varrho\sin\frac{A}{2}$$

folglich

$$a_1b_1 + c_1d_1 = 2\varrho\left(\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\right). \quad a_1d_1 + b_1c_1 = 2\varrho\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right)$$

Die Summen der gegenüberliegenden Seiten sind somit nur gleich, wenn Wkl. $A = B$, was hier bei Betrachtung des allgemeinen Falles nicht vorausgesetzt ist.

Ferner ist

$$\text{Wkl. } d_1a_1c_1 = \tfrac{1}{2}d_1Mc_1 = \tfrac{1}{2}B$$
$$\text{Wkl. } a_1d_1b_1 = \tfrac{1}{2}a_1Mb_1 = 90^0 - \tfrac{1}{2}B$$

folglich

$$\text{Wkl. } d_1a_1c_1 + a_1d_1b_1 = 90^0$$

d. h. die Diagonalen des Berührungsehnenvierecks stehen auf einander senkrecht.

Hieraus folgt weiter: Beschreibt man über den Seiten des Berührungsehnenvierecks eines Sehnen-Tangentenvierecks Kreise, so schneiden sich dieselben in dem Durchschnittspunkte der Diagonalen des Sehnen-Tangentenvierecks. Die Diagonalen des ersteren zerlegen die Winkel in ihre Bestandteile.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig:

Errichtet man in einem Kreise von beliebigem Radius zwei auf einander senkrecht stehende Sehnen, so schneiden dieselben auf dem Kreise 4 Punkte aus, welche die Berührungspunkte der Seiten eines Sehnen-Tangentenvierecks sind, von welchem der Schnittpunkt der Sehnen zugleich Durchschnittspunkt der Diagonalen ist.

Seien a_1c_1 und b_1d_1 diese Sehnen, und verbinden wir a_1, b_1, c_1, d_1 mit dem Kreismittelpunkte M, construiren wir ferner die Tangenten in denselben Punkten, so schneiden sich letztere in den Ecken des fraglichen Vierecks A, B, C, D.

Nun ist

$$\text{Wkl. } b_1a_1c_1 = \tfrac{1}{2}b_1Mc_1$$
$$a_1b_1d_1 = \tfrac{1}{2}a_1Md_1$$

folglich

$$b_1a_1c_1 + a_1b_1d_1 = \text{R}$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}b_1Mc_1 + \tfrac{1}{2}a_1Md_1 = \text{R}$$
$$b_1Mc_1 + a_1Md_1 = 2\text{R}.$$

Nach der Construction ist aber

$$b_1Mc_1 = A$$

und

$$a_1Md_1 = C;$$

somit

$$A + C = = 2\text{R}.$$

Die Pole der Diagonalen a_1c_1 und b_1d_1 sind offenbar die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Sehnen-Tangentenvierecks. Lassen wir daher diese beiden auf einander senkrecht stehenden Sehnen sich um denselben Punkt drehen, so bewegen sich ihre Pole auf je einer Geraden fort, den Polaren des Punktes x. Diese Geraden müssen aber notwendig zusammenfallen. Sie ist die dritte Diagonale des Vierecks $ABCD$.

Diese Gerade bleibt nun immer dieselbe für alle Sehnen-Tangentenvierecke, so lange wir den Punkt x und den Kreis um M festhalten.

Es müssen daher die Verbindungslinien der Schnittpunkte zweier gegenüberliegender Seiten irgend eines Sehnen-Tangentenvierecks alle mit der Polaren von x zusammenfallen.

Indem wir nun die beiden auf einander senkrecht stehenden Sehnen a_1c_1 und b_1d_1 in immer andere Lagen übergehen lassen, erhalten wir lauter neue Sehnen-Tangentenvierecke, welche sämtlich die äussere Diagonale, die Polare des Punktes x, gemeinschaftlich haben. Eine besondere Lage irgend eines Sehnenpaares wird auch jene sein, wenn eine dieser Sehnen ein Durchmesser des Kreises um M wird.

Construiren wir in den Schnittpunkten dieses Durchmessers mit dem Kreise M die Tangenten, so werden dieselben zu einander und mithin auch zu der äusseren Diagonale parallel. Da aber dieser durch x gezogene Durchmesser auf den Tangenten senkrecht steht, so ist damit auch die Lage dieser äusseren Diagonale fixirt. Wir erhalten daher den merkwürdigen Satz:

„In jedem Sehnen-Tangentenviereck steht die Diagonale, die „man durch Verbindung der Schnittpunkte der verlängerten Vier-

„eckseiten erhält, auf jenem Durchmesser des dem Viereck einbe-„schriebenen Kreises senkrecht,' welcher durch den Diagonalschnitt-„punkt geht."

Das Sehnen-Tangentenviereck selbst, durch welches wir auf obigen Satz gelangten, ist aber ein Antiparallelogramm.

Einige Eigenschaften desselben hat Herr Dr. Ehrler in der Hoffmann'schen Zeitschrift, Jahrgang V., pag. 432. bereits veröffentlicht, auf die ich hier nur verweisen will, ohne die betreffenden Sätze noch einmal zu recapituliren.

Ein weiteres besonderes Sehnen-Tangentenviereck erhalten wir durch Annahme jenes Falles, wonach eine seiner Diagonalen durch den Mittelpunkt des ihm umschriebenen Kreises geht.

In einem solchen Viereck müssen zwei Winkel je 90° betragen und die Durchmesserdiagonale die anderen Diagonalen halbiren; folglich sind auch je zwei in demselben Endpunkte der Durchmesserdiagonale zusammenstossende Seiten einander gleich. Die Construction dieses Vierecks ist demnach die folgende:

Wir construiren ein circulares Sehnenpaar im Punkte x in der Weise, dass die Linie Mx den Winkel dieses Sehnenpaares halbirt.

Wir haben bisher den Mittelpunkt des irgend einem Sehnen-Tangentenvierecke einbeschriebenen Kreises, sowie den Schnittpunkt (x) der Diagonalen fixirt und erfahren, dass jedes durch x gehende circulare Sehnenpaar Anlass zu einem bicentrischen Vierecke gibt.

Wir treten nun der Frage nach dem Orte der Mittelpunkte der allen Sehnen-Tangentenvierecken umschriebenen Kreise nahe, wenn sie denselben Schnittpunkt der Diagonalen besitzen und demselben Kreise umschrieben sind. Wir beantworten dieselbe durch den folgenden Lehrsatz:

Alle bicentrischen Vierecke, welche demselben Kreise umbeschrieben sind und den Diagonalschnittpunkt gemeinschaftlich haben, sind auch einem und demselben Kreise einbeschrieben.

Beweis.

Unter allen möglichen Vierecken, welche den gestellten Bedingungen genügen, nehmen wir eines, etwa das Viereck $ABCD$ heraus. Dasselbe sei dem Kreise M_1 ein- und dem Kreise M umbeschrieben und habe zum Schnittpunkte der Diagonalen den Punkt x. Construiren wir die Polare des Punktes x in Bezug auf den Kreis M_1

so folgt sofort, dass sie mit jener des Punktes x in Bezug auf den Kreis M zusammenfällt.

Dem unendlich fernen Punkt derselben entspricht aber im Kreis M_1 ein Durchmesser, der durch x geht, im Kreise M ein Durchmesser, der ebenfalls durch x geht. Beide müssen aber zusammenfallen, und es liegen demnach die Punkte x, M und M_1 in einer Geraden.

Dem Punkte M_1 entspricht als Polare die unendlich ferne Gerade, welche auch zugleich Polare des Punktes M in Bezug auf den Kreis M ist.

Mögen wir daher statt des bicentrischen Vierecks irgend ein anderes nehmen, welches ebenfalls dem Kreise M_1 umbeschrieben ist, und dessen Diagonalen sich im Punkte x schneiden, so wird dasselbe immer dem Kreise M einbeschrieben sein. Wir gelangen daher zu dem Lehrsatze:

Alle Sehnen-Tangentenvierecke, welche demselben Kreise umgeschrieben sind und den Diagonalschnittpunkt gemeinsam haben, sind auch ein und demselben Kreise eingeschrieben. Der Diagonalschnittpunkt liegt auf der Centrale der beiden Kreise.

Sind umgekehrt zwei Kreise so gegeben, dass der eine ganz innerhalb des andern gelegen ist, so ist es im allgemeinen nicht möglich, ein Viereck zu construiren, welches dem einen Kreise umgeschrieben, und dem andern Kreise eingeschrieben ist.

Wenn aber ein solches Viereck existirt, dann giebt es unendlich viele. Dieser Satz wurde schon von Jakobi für Kegelschnitte bewiesen. Hieraus folgt weiter der Satz:

Alle Sehnenvierecke, welche demselben Kreise eingeschrieben sind, und in welchen die Berührungssehnen, die alle durch einen Punkt gehen, auf einander senkrecht stehen, sind zugleich einem und demselben Kreise umschrieben.

Veränderung der Lage des Punktes x.

Für weitere Untersuchungen unseres bicentrischen Vierecks kann uns die Veränderung der Lage des Punktes x dienen.

Denken wir uns den Kreis M fest und den Punkt x in der ganzen Kreisebene herumwandern, so erhalten wir für jede Lage eine unendliche Anzahl von Sehnen-Tangentenvierecke, die immer demselben Kreise umschrieben sind, und von denen eines die Eigenschaft

hat, dass seine Berührungssehnen zu jenen eines gegebenen parallel sind.

Sei x_1 ein zweiter Diagonalschnittpunkt, durch welchen wir das zu ac, bd parallele Sehnenpaar a_1c_1, b_1d_1 ziehen.

Nun ist der Pol von b_1d_1 der Schnitt der Tangenten A_1D_1 und B_1C_1, der Pol von ac der Schnitt der Tangenten AB und CD. Da aber $ac \parallel b_1d_1$, muss die Polare des Schnittpunktes von b_1d_1 und ac in Bezug auf den Kreis M notwendig ein Durchmesser sein, der

1) durch den Schnitt von A_1D_1 und B_1C_1 und AB und CD geht und

2) zu den Sehnen a_1c_1 und bd parallel ist.

Mögen wir nun das eine Sehnenpaar, wohin wir auch wollen verschieben, so bleibt dieser Durchmesser immer derselbe.

Aus demselben Grunde ist die Polare des Schnittpunktes der Sehnen bd und a_1c_1 ebenfalls ein Durchmesser des Kreises M, der notwendig auf dem zuerst erhaltenen senkrecht steht. Wir gelangen daher zu dem folgenden Satze:

Alle Sehnen-Tangentenvierecke, derenhomologe Berührsehnen parallel sind, und welche demselben Kreise umschrieben sind, haben die Eigenschaft, dassihre gegenüberliegenden Seiten sich auf zwei zu einander senkrechten Durchmessern des Kreises, den sie gemeinschaftlich berühren, schneiden.

Nun schneidet das Sehnenpaar a_1c_1 und b_1d_1 das zweite Sehnenpaar ac und bd in 4 im Endlichen und 2 im Unendlichen gelegenen Punkten, von denen jeder Anlass zur Bildung eines Sehnen-Tangentenvierecks giebt. Die 4 im Endlichen gelegenen Diagonalschnittpunkte liefern Sehnenvierecke, von denen je zwei den Schnittpunkt gegenüber liegender Seiten gemeinschaftlich haben. Es ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt der Pol jener Seite, in deren Endpunkten die Seiten des Vierecks den Kreis M berühren.

Halten wir das eine Sehnenpaar fest, und verschieben gleichzeitig eine Sehne parallel, so erhalten wir lauter Sehnen-Tangentenvierecke, von welchen ein Paar Gegenseiten sich im Pole der festen Sehne schneiden, während der Schnittpunkt der beiden andern Gegenseiten auf einem zur festen Sehne senkrechten Durchmesser der Kreise M fortrückt.

Hieraus folgt, dass die Schnitte von

$(A_1B_1,\ B_1C_1)$	$(B_1C_1,\ C_1D_1)$	$(C_1D_1,\ A_1D_1)$	$(A_1D_1,\ A_1B_1)$
$(A\,D,\ A_1D_1)$	$(A_1D_1,\ B\,C)$	$(B_1C_1,\ B\,C)$	$(A\,D,\ B_1C_1)$
$(A\,D,\ B\,C)$	$(A\,B,\ B\,C)$	$(B\,C,\ C\,D)$	$(C\,D,\ A\,D)$
$(D\,C,\ D_1C_1)$	$(D\,C,\ A_1B_1)$	$(A_1B_1,\ A\,B)$	$(A\,B,\ D_1C_1)$

c. wiederum auf einem Kreise liegen.

Mittelst dieser Betrachtung können wir sämtliche bicentrischen ierecke in Classen teilen.

Wir ziehen in einem Kreise M eine beliebige Sehne und erchten in jedem ihrer Punkte eine zu ihr senkrechte Sehne.

Auf bekannte Weise können wir dann ein Sehnen-Tangenten- iereck construiren. Jedes so erhaltene Tangentenviereck hat die igenschaft, dass zwei seiner Seiten sich im Pole der festen Sehne hneiden, während der Schnittpunkt der beiden übrigen Seiten auf nem zur festen Sehne senkrechten Durchmesser fortrückt.

An diese Untersuchungen reihen wir einige Constructionsaufaben:

Von einem Sehnen-Tangentenviereck ist gegeben

1) der Diagonalschnittpunkt, die durch ihn gehende Berührsehne nd der ihm eingeschriebene Kreis.

2) der Schnittpunkt zweier gegenüberliegender Seiten, der Beührungspunkt auf einer derselben und der Diagonalschnittpunkt x.

3) die Schnittpunkte zweier gegenüberliegender Seiten und der erührpunkt auf einer Seite.

4) 3 Berührpunkte.

Rein Euklidische Untersuchungen über das Sehnen-Tangentenviereck.

Jedes Sehnen-Tangentenviereck liefert ein Berührungs-Sehnen- iereck, das der Hälfte des Rechtecks seiner Diagonalen ist.

Ziehen wir die Diagonalen a_1c_1 und b_1d_1, so gehen dieselben urch X und stehen in x auf einander senkrecht.

Nun ist

$$1)\quad a_1x \,.\, b_1x = 2\varDelta a_1xb_1$$
$$2)\quad a_1x_1 \,.\, d_1x = 2\varDelta a_1xd_1$$

$$3)\quad c_1x_1 . d_1x = 2\Delta c_1xd_1$$
$$4)\quad c_1x_1 . b_1x = 2\Delta b_1xc_1$$

Durch Addition von 1) und 2) erhält man:

$$\text{I.}\quad a_1x . b_1d_1 = 2(\Delta a_1xb_1 + \Delta a_1xd_1) = 2\Delta a_1b_1d_1$$

" " " 3 und 4 "

$$\text{II.}\quad c_1x . b_1d_1 = 2(\Delta c_1xd_1 + \Delta b_1xc_1) = 2\Delta b_1c_1d_1$$

$$\text{I.} + \text{II.}\qquad a_1c_1 . b_1d_1 = 2a_1b_1c_1d_1$$

Oder

$$b_1d_1 . a_1x = 2\Delta a_1b_1d_1$$
$$b_1d_1 . c_1x = 2\Delta b_1c_1d_1$$

folglich

$$b_1d_1 . a_1c_1 = 2 \text{ Viereck } a_1b_1c_1d_1$$

d. h. das Product der Berührsehnen eines Sehnen-Tangentenvierecks ist gleich dem doppelten Inhalt des Berührungspunktenvierecks.

Es folgt ferner sofort:

Verbindet man den Mittelpunkt des einem Sehnen-Tangentenvierecke eingeschriebenen Kreises mit den Berührpunkten, so erhält man 4 Sehnenvierecke, von denen je zwei gegenüberliegende einander ähnlich sind.

Aus dieser Aehnlichkeit folgt:

$$a_1B : \varrho = \varrho : d_1D$$
$$\varrho^2 = a_1B . d_1D.$$

Diese ähnlichen Sehnenvierecke haben demnach noch die weitere Eigenschaft, dass das Rechteck aus nicht homologen Seiten dem Quadrate des Radius gleich ist; ferner sind sie auch Sehnen-Tangentenvierecke; daher der Satz:

In jedem Sehnen-Tangentenvierecke liefern die Verbindungslinien des eingeschriebenen Kreismittelpunktes mit den Berührungspunkten 4 Sehnen-Tangentenvierecke, von denen je zwei gegenüberliegende ähnlich sind, und aus denen das ganze Sehnen-Tangentenviereck sich zusammensetzt.

In jedem Sehnen-Tangentenviereck berührt der eingeschriebene Kreis zwei gegenüberliegende Seiten derart, dass das Rechteck der an der nämlichen Diagonale liegenden durch den Kreis auf gegenüberliegenden Seiten gemachten Abschnitte dem Quadrate des Radius inhaltsgleich ist.

Aus

$$\varrho^2 = a_1 B . d_1 D$$

nd analog

$$\varrho^2 = a_1 A . c_1 C$$

lgt

$$a_1 B : a_1 A = c_1 C : d_1 D$$

. h. Die Abschnitte, welche der einem Sehnen-Tangentenvierecke ngeschriebene Kreis auf gegenüberliegenden Seiten macht, stehen . Proportion.

Gehen wir auf das Berührungssehnenviereck zurück, so finden ir noch eine Eigenschaft, die später verwertet werden kann.

Es ist im Dreieck $d_1 a_1 x$ der Winkel

$$\text{Wkl. } d_1 a_1 x = \frac{B}{2}$$

$$\text{Wkl. } M a_1 b_1 = \frac{B}{2}.$$

aher der Satz:

In dem Berührungssehnenviereck, das wir auch Polarenviereck s Sehnen-Tangentenvierecks heissen könnten, sind dessen Diagolen und die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Kreismittelnkte, welche in derselben Ecke zusammenstossen, gegen die Behrsehne, mit welchen sie einen Punkt gemeinschaftlich haben, gleich neigt. Oder: Die Winkelhalbirende des von einer Diagonale und nem Radius, welche sich in derselben Ecke treffen, gebildeten inkels, halbirt auch den Winkel des Polarenvierecks an dieser cke.

Hieraus folgt die Aehnlichkeit der Dreiecke

$$a_1 M p \quad \text{und} \quad a_1 d_1 x$$

s verhält sich daher

$$a_1 d_1 : a_1 x = \varrho : \frac{a_1 b_1}{2}$$

$$a_1 x = \frac{a_1 b_1 . a_1 d_1}{2\varrho}$$

. h. der Diagonaldurchschnitt x teilt die Berührsehne gegenüberegender Berührpunkte des Sehnen-Tangentenvierecks in Abschnitte, on denen jeder die 4 Proportionale zu dem Durchmesser des eineschriebenen Kreises und den beiden ihm anliegenden Berührehnen ist.

Man könnte nun vermuten, dass die Winkelhalbirenden des Porenvierecks sich in einem Punkte von MX träfen.

Würde dies z. B. von den Winkelhalbirenden bei a_1 und b_1 der Fall sein, so beständen die Proportionen, wenn r Schnittpunkt auf MX ist

$$\varrho : a_1x = Mr : rX$$

analog

$$\varrho : b_1x = Mr : rX$$

d. h.

$$\varrho : a_1x = \varrho : b_1x$$

d. h.

$$a_1x = b_1x$$

Dies würde voraussetzen, dass das Dreieck a_1xb_1 ein gleichschenkliges wäre, was aber nicht der Fall ist, da

$$\text{Wkl. } xa_1b_1 = \frac{A}{2}$$

und

$$\text{Wkl. } xb_1a_1 = 90^0 - \frac{A}{2}.$$

Aus der Gleichheit beider Winkel folgt

$$\text{Wkl. } A = 90^0.$$

Daher erhalten wir hieraus den neuen Satz:

In jedem Sehnen-Tangentenviereck, in welchem eine Diagonale ein Durchmesser des ihm umschriebenen Kreises ist, bilden die Berührungspunkte ein Sehnenviereck, welches zugleich Tangentenviereck ist, und für welches der Mittelpunkt des ihm eingeschriebenen Kreises mit dem Halbirungspunkte der Strecke MX zusammenfällt (dass auch die Halbirungslinien der Winkel bei d_1 und c_1 sich in demselben Punkte treffen müssen, ergiebt sich auf dieselbe Weise).

Ganz analog folgt, dass $d_1x = c_1x$ ist unter der Voraussetzung

$$\text{Wkl. } A = 90^0.$$

Hieraus folgt aber zugleich, dass die Dreiecke d_1xc_1 und a_1xb_1 gleichschenklig rechtwinklige sein müssen, und die Winkelhalbirenden von a_1, b_1, c_1, d_1 in einem Punkte von MX sich schneiden; denn es ist

$$\frac{a_1x}{d_1x} = \frac{c_1x}{b_1x}$$

oder

$$\frac{a_1x : \varrho}{d_1x : \varrho} = \frac{c_1x : \varrho}{b_1x : \varrho}$$

$$\frac{xr : rm}{xr_1 : r_1m} = \frac{xr_1 : r_1m}{xr : rm}$$

oder

$$\frac{xr}{rm} = \frac{xr_1}{r_1 m}$$

h. der Punkt r und r_1 müssen zusammenfallen.

D. h. Die Berührungssehnen eines Sehnen-Tangenvierecks, welhes einen rechten Winkel enthält, bilden selbst wieder ein Sehnen-Tangentenviereck.

Wir wenden uns nun zu einer andern Figur, die wir aus dem egebenen Sehnen-Tangentenviereck erhalten, wenn wir dessen Aussen-inkel halbiren. Dieselbe ist von ganz besonderem Interesse für nser gegebenes Viereck, weil wir durch dasselbe vielfache Eigen-haften wieder finden werden, die sich nicht auf dem gewöhnlichen ege so einfach ergeben.

Die Halbirungslinien der Aussenwinkel des gegebenen Vierecks lden selbst wieder ein Sehnenviereck, dessen Seiten zu den Seiten es Polarvierecks parallel sind.

Diese Eigenschaft ergiebt sich sofort aus der Construction.

Wir bezeichnen die Ecken des neuen Sehnenvierecks mit $a_2b_2c_2d_2$

Von Herrn Consentius wurde bereits nachgewiesen, dass dieses iereck und alle analog erhaltenen dem Polarvierecke ähnlich sind. on einer Recapitulation des Beweises, der sich sofort ergiebt, sehe h hier ab.

Da nun die Seiten des Vierecks entsprechend parallel sind und ie Vierecke $a_2b_2c_2d_2$ und $a_1b_1c_1d_1$ selbst ähnlich sind, müssen die erbindungslinien analoger Ecken beider Vierecke durch einen Punkt, en Aehnlichkeitspunkt, laufen.

Ferner können alle Eigenschaften des einen auf das andere irect übertragen werden.

Vom Vierecke $a_2b_2c_2d_2$ gilt:

1) Die Diagonalen stehen auf einander senkrecht.

2) Alle Kreise, welche die Seiten zu Durchmessern haben, schnei-en sich in einem Punkte, dem Diagonalschnittpunkte.

Es lässt sich nun einfach nachweisen, dass der Diagonalschnitt-unkt dieses Vierecks und der Mittelpunkt des dem Vierecke $ABCD$ ingeschriebenen Kreises ein und derselbe ist; denn ziehen wir d_2M nd c_2M, so folgt, dass

Wkl. d_2Mc_2

in Rechter ist (nach dem vorhergehenden Lehrsatze), weil

$$Md_2c_2 = \frac{A}{2}$$

und

$$Mc_2d_2 = 90^0 - \frac{A}{2};$$

mithin

$$\text{Wkl. } d_2Mc_2 = 90^0.$$

Es müssen also die Linien a_2M und c_2M notwendig zusammenfallen, weil ja daraus sich auch ergiebt, dass

$$\text{Wkl. } d_2Ma_2 + b_2Ma_2 = 2\text{R}.$$

Dieser Lehrsatz lässt nun einige sehr interessante Folgerungen zu:

1) Die Diagonalen des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$ halbiren den Diagonalen des Vierecks $a_1b_1c_1d_1$.

Es ist $a_2c_2 \parallel a_1c_1$; b_2d_2 geht aber durch M und steht auf a_2c_2 mithin auch auf a_1c_1 senkrecht; es muss daher a_1c_1 durch b_2d_2 halbirt werden.

2) Die Diagonalen schneiden den Kreis in den Eckpunkten eines Quadrates, von dessen Beziehungen zu den übrigen Polarsehnenvierecken später die Rede sein wird.

Den Untersuchungen der Vierecke hinsichtlich ihres Aehnlichkeitspunktes geben ebenfalls zu einigen interessanten Sätzen Anlass.

Denken wir uns den Punkt x, — O soll der Aehnlichkeitspunkt künftig heissen, — dem Polarviereck $a_1b_1c_1d_1$ angehörig, so entspricht ihm im Vierecke $a_2b_2c_2d_2$ der Punkt M, und diesem als dem Viereck $a_1b_1c_1d_1$ angehörig entspricht in $a_2b_2c_2d_2$ der Mittelpunkt jenes Kreises, der durch die 4 Ecken a_2, b_2, c_2, d_2 geht. Derselbe sei M_2.

Die Punkte M_2, M, x, O müssen demzufolge auf einer Geraden liegen, auf der noch alle jene Punkte gelegen sind, welche diesen Punkten in jenen Vierecken entsprechen, welche man erhält, wenn man von $a_2b_2c_2d_2$ in derselben Weise Vierecke construirt, wie dieses aus $a_1b_1c_1d_1$ hervorgegangen ist.

Die Gerade M_2MXO halbirt die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Diagonalen a_2c_2 und b_2d_2, a_1c_1 und b_1d_1; denn die Mittelpunkte von a_2c_2 und b_2d_2, die Punkte M_2 und M, bilden ein Rechteck, von welchem MM_2 die Diagonale ist.

Der Kreis, welcher dem Viereck $ABCD$ umschrieben ist, schneidet die Seiten des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$ ausser in den Punkten A, B, C, D

ch in 4 andern Punkten, die sowol hinsichtlich ihrer Lage in Be-
g aufeinander wie auch in Bezug auf die Seiten des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$
n ganz besonderem Interesse sind.

In a_2 treffen sich die Seiten a_2b_2 und a_2d_2, welche vom Kreis
a $ABCD$ in den Punkten Q und T geschnitten werden mögen.

Es ist vermöge der constanten Potenz

$$a_2Q \, . \, a_2B = a_2T \, . \, a_2A$$

ler

$$a_2Q : a_2T = a_2A : a_2B$$

Da die beiden Dreiecke Aa_2B und Ta_2Q den Winkel bei a_2
sserdem noch gemeinschaftlich haben, so folgt, dass dieselben ein-
ader ähnlich sind.

Es ist demnach

$$\text{Wkl. } TQa_2 = a_2AB = 90^0 - \frac{A}{2}.$$

Auf dieselbe Weise lässt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke
BC und b_2QR nachweisen, weshalb die andere Gleichung

$$\text{Wkl. } b_2QR = BCb_2 = \frac{A}{2}$$

steht. Durch Addition resultirt

$$\text{Wkl. } TQa_2 + b_2QR = 90^0$$

. h.

$$\text{Wkl. } TQR = 90^0.$$

Da nun Wkl. $Ma_2b_2 = \frac{A}{2}$ ist, so folgt weiter, dass die Sehne
T auf der Diagonale a_2c_2 senkrecht steht. Wir erhalten somit den
ehrsatz:

„Halbirt man die Aussenwinkel eines Sehnen-Tangentenvierecks,
so bilden die Halbirungslinien ein neues Sehnenviereck, dessen
Seiten von dem dem Viereck $ABCD$ umschriebenen Kreise in 4
Punkten getroffen werden, die die Ecken eines Rechtecks bilden.
Die Seiten dieses Rechtecks sind den Berührsehnen, welche Punkte
gegenüberliegender Viereckseiten verbinden, parallel."

„Da das Rechteck dem Kreise M_1, welcher dem Viereck $ABCD$
umschrieben ist, einbeschrieben ist, so schneiden sich seine Diago-
nalen im Mittelpunkte dieses Kreises (M_1)."

Verbinden wir weiter die Ecke B mit M und verlängern BM
is zum Schnittpunkte mit dem Kreise M_1, so geht diese Verbindungs-

linie durch die der Ecke Q des Rechtecks gegenüberliegende Ecke S; denn die Linie QS ist ein Durchmesser und Wkl. QBS ein Rechter, weil er über dem Durchmesser QS steht. Errichten wir nun in B auf a_2b_2 ein Lot, so muss dieses notwendig durch den Kreismittelpunkt M gehen, weil es den Winkel bei B halbirt. Daher der Satz:

Verbindet man die Ecken eines bicentrischen Vierecks mit dem Mittelpunkte des ihm einbeschriebenen Kreises, und verlängert man diese Verbindungslinien bis zum Schnitte des dem Sehnen-Tangentenvierecke umschriebenen Kreises, so bilden die 4 Schnittpunkte die Ecken eines Rechteckes. Oder:

Die Ecke eines bicentrischen Vierecks, der Mittelpunkt des ihm einbeschriebenen Kreises und eine Ecke des Rechtecks $QRST$ liegen auf einer Geraden.

Ferner lässt sich leicht der folgende Satz ableiten:

Die Diagonalen dieses Rechtecks erscheinen vom Mittelpunkte M aus unter demselben Winkel wie die Diagonalen des Sehnen-Tangentenvierecks von demselben Punkte aus.

Es ist nun leicht einzusehen, dass die Ecken des Rechtecks mit den Mittelpunkten der Seiten des Sehnenvierecks zusammenfallen; denn die Seiten des Rechtecks sind || zu den Diagonalen a_2c_2 und b_2d_2 und gleich der Hälfte derselben; infolge hievon ist

$$MQ = a_2Q = b_2Q.$$

Es halbirt somit jede Rechtecksseite die Diagonalabschnitte der Diagonalen des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$.

Sei nun P_2 der Mittelpunkt der Diagonale a_2c_2 und Q_2 der Mittelpunkt von b_2d_2; ziehen wir nun P_2R und Q_2T, so besteht die Gleichung

$$P_2R = Q_2T$$

denn P_2R gleich und parallel $\frac{1}{2}a_2b_2$ und Q_2T ist ebenfalls gleich und parallel a_2b_2; folglich ist das Viereck

$$TP_2RQ_2$$

ein Parallelogramm; der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Parallelogrammes ist der Punkt M_1. Es folgt aus dieser Betrachtung, dass die Mittelpunkte der Diagonalen a_2c_2, b_2d_2 und der Mittelpunkt des dem Sehnen-Tangentenvierecke umschriebenen Kreises in einer geraden Linie liegen.

Verbindet man nun M_2 mit P_2 und Q_2, so entsteht das Rechteck $M_2 Q_2$, dessen eine Diagonale $P_2 Q_2$, während die andere MM_2 ist. st also M_1 in der Mitte der Strecke MM_2 gelegen.

Wir folgern hieraus den bereits in früheren Betrachtungen ab- iteten Lehrsatz:

„Der Aehnlichkeitspunkt O, die Kreismittelpunkte M, M_1, M_2 n auf einer Geraden, und zwar so, dass der Punkt M_1 die cke MM_2 halbirt.“

Aus dem Parallelogramm TP_2RQ_2 folgt weiter:

Die Mittelpunkte der Diagonalen a_2c_2 und b_2d_2 sind von den elpunkten je zweier gegenüberliegender entsprechender Seiten Vierecks $a_2b_2c_2d_2$ gleich weit entfernt. Es ist

$$P_2 Q = Q_2 S$$

$$P_2 T = Q_2 R \text{ etc.}$$

Dieselben Betrachtungen können wir auf das Sehnenviereck c_1d_1 übertragen.

Die Mittelpunkte der Seiten dieses Vierecks bilden die Ecken s Rechtecks, dessen Diagonalschnittpunkt mit dem Halbirungs- t der Strecke MX zusammenfällt.

Da

$$MQ = Qb_2$$

$$QR \perp b_2d_2,$$

albirt QR den Winkel DQb_2, mithin auch den Bogen BRD. Lot, welches man von M_1 auf die Diagonale BD des Sehnen- gentenvierecks fällt, halbirt ebenfalls den Bogen BRD; es fällt t dieses Lot mit der Diagonale M_1R des Rechtecks zusammen. erhalten daher den Satz:

Die Diagonalen des Rechtecks halbiren die Diagonalen des en-Tangentenvierecks und stehen auf denselben senkrecht. Oder:

Der Mittelpunkt des dem bicentrischen Viereck umschriebenen ses, der Mittelpunkt einer seiner Diagonalen und zwei gegenüber- nde Ecken des Rechtecks $QRST$ liegen auf einer Geraden.

Wir wollen nun noch beweisen, dass auch die Mittelpunkte der onalen des Sehnen-Tangentenvierecks und der Kreismittelpunkt n einer Geraden liegen. Der Mittelpunkt von BD sei y und von AC sei u.

Wir haben bewiesen, dass die Dreiecke

$$QMS \text{ und } MBD$$

ähnlich sind, woraus folgt, dass auch die beiden Dreiecke

$$M_1MS \text{ und } yMD$$

ähnlich sein müssen. Die Aehnlichkeit derselben führt zu der Gleichung

$$\text{Wkl. } SM_1M = \text{Wkl. } DyM;$$

ferner ist das Viereck M_1yxu ein Sehnenviereck. Ziehen wir in demselben die Diagonalen yu und M_1x, so müssen sie sich im M schneiden; denn die Winkel SM_1M und uyx sind gleich, weil sie auf demselben Bogen stehen. Es muss demnach uy durch den Kreismittelpunkt M gehen. Wir erhalten daher den Satz:

In jedem Sehnen-Tangentenvierecke liegen die Mittelpunkte seiner 3 Diagonalen und der Mittelpunkt des ihm einbeschriebenen Kreises auf einer Geraden.

Metrische Beziehungen im bicentrischen Viereck.

Wir gehen von einer Gleichung für das Quadrat des dem Viereck einbeschriebenen Kreises vom Radius ϱ aus. Wir fanden

$$\varrho^2 = a_1B \,.\, d_1D$$
$$\varrho^2 = a_1A \,.\, b_1C.$$

Hieraus folgt die Proportion

$$a_1B : a_1A = b_1C : d_1D = c_1C : c_1D$$
$$AB : DC = a_1B : b_1C$$
$$AB + DC : DC = a_1B + b_1C : b_1C$$
$$AB + DC : DC = BC : b_1C$$

d. h. $b_1C = \dfrac{BC \,.\, DC}{AB + DC}$; ist nun s der Umfang von $ABCD$ und $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, so erhält die vorstehende Gleichung die Form

$$b_1C = \frac{2bc}{s};$$

analog ergiebt sich

$$a_1A = \frac{2ad}{s}$$

$$b_1B = \frac{2ab}{s}$$

$$c_1D = \frac{2cd}{s}$$

Indem wir die Werte aus diesen Gleichungen in

$$\varrho^2 = a_1B.d_1D$$

ntragen, erhalten wir

$$\varrho^2 = \frac{4AB.BC.CD.DA}{s^2}$$

$$\varrho = \frac{2}{s}\sqrt{AB.BC.CD.DA}$$

Bekanntlich ist aber der Inhalt eines Sehnen-Tangentenvierecks geben durch

$$I = \sqrt{AB.BC.CD.AA};$$

ithin

$$\varrho = \frac{2I}{s}$$

ler, indem wir I daraus berechnen, erhalten wir eine Gleichung,

$$I = \frac{\varrho s}{2}$$

ie auch direct erhalten werden kann.

Bezeichnen wir in dem Sehnen-Tangentenvierecke die Berührhnen mit e_1 und f_1, so gilt der leicht zu beweisende Satz:

Das Product der Berührsehnen ist = dem doppelten Inhalt des ehnenvierecks, dessen Inhalt = I_1 sei

$$e_1f_1 = 2I_1 = 2\varrho^2(\sin A + \sin B)$$

Bezeichnen wir mit a_1, b_1, c_1, d_1 die Grössen

$$a_1b_1 = a_1, \; b_1c_1 = b_1; \quad c_1d_1 = c_1, \; d_1a_1 = d;$$

ann bestehen die Gleichungen

$$a_1 = 2\varrho\cos\frac{B}{2}; \quad c_1 = 2\varrho\sin\frac{B}{2}$$

$$b_1 = 2\varrho\sin\frac{A}{2}; \quad d_1 = 2\varrho\cos\frac{A}{2}$$

Für die Diagonalen dieses Vierecks resultirt sofort

$$a_1c_1 = e_1 = 2\varrho\cos\frac{A-B}{2}$$

$$b_1d_1 \quad \frac{+B}{}$$

Wir wenden uns zur Betrachtung jenes Sehnenvierecks $a_2b_2c_2d_2$, dessen Seiten auf den Winkelhalbirenden des Sehnen-Tangentenvierecks senkrecht stehen.

Zunächst verweisen wir auf den Lehrsatz, dass dessen Diagonalen durch den Kreismittelpunkt gehen und auf einander senkrecht stehen müssen. Dieselben schneiden demnach den Kreis um M in den Punkten eines Quadrates, dessen Inhalt $= 2\varrho^2$ ist.

Nun fanden wir für das Berührungssehnenviereck $a_1b_1c_1d_1$

$$a_1b_1c_1d_1 = 2\varrho^2 (\sin A + \sin B),$$

woraus folgt, dass $a_1b_1c_1d_1$ zu diesem Quadrate in dem Verhältnisse

$$\sin A + \sin B : 1$$

steht.

Bezeichnen wir den Radius des dem Sehnenviereck $a_2b_2c_2d_2$ umschriebenen Kreises mit R und den Mittelpunkt dieses Kreises mit M_2. Fällen wir nun von M_2 ein Lot auf a_2c_2 und verbinden a_2 mit M_2, dann ergiebt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck M_2a_2P

$$M_2P = R \sin \frac{A-B}{2}$$

und analog aus dem rechtwinkligen M_2b_2Q

$$M_2Q = R \cos \frac{A+B}{2}$$

Da aber

$$MM_2^2 = M_2P^2 + M_2Q^2$$

ist, so folgt

$$MM_2^2 = R^2\left(\sin^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= R^2 (1 - \sin A \sin B)$$

$$MM_2 = R\sqrt{1 - \sin A \sin B}$$

Wiewol dieser Ausdruck schon abgeleitet wurde, allerdings nicht in der Abhängigkeit von dem Radius R, so glaubte ich ihn noch einmal erwähnen zu müssen, da die Herleitung an ein anderes Gebilde anknüpft.

Dem Viereck $a_2b_2c_2d_2$ entspricht das ähnliche Viereck $a_1b_1c_1d_1$. Der in letzterem zum Punkte M_2 homologe Punkt ist der Punkt M; dem Punkte M aber entspricht, insofern er dem Viereck $a_2b_2c_2d_2$ angehörig angesehen wird, der Punkt x im Viereck $a_1b_1c_1d_1$. Aus dieser Betrachtung folgt daher unmittelbar

$$Mx = \varrho \sqrt{1 - \sin A \sin B}.$$

)er Punkt M teilt somit die Strecke M_2x in dem Verhältnisse $R:\varrho$.

Wir verbinden nun den Aehnlichkeitspunkt der beiden Vierecke $b_2c_2d_2$ und $a_1b_1c_1d_1$, den wir mit Q bezeichneten, mit einer Ecke ines dieser Vierecke; diese Verbindungslinie muss dann auch durch ie homologe Ecke des andern Vierecks gehen. Wir erhalten die leichungen

$$OB_1 : OB_2 = \varrho : R$$
$$Ox : OM = \varrho : R$$

iit denen wir die beiden andern verbinden

$$MM_2 : Mx = R : \varrho$$
$$Mx : MM_2 = \varrho : R$$

lglich

$$Mx : MM_2 = Ox : OM$$

. h. der Punkt M teilt die Strecke xM_2 in demselben Verhältniss ie der Punkt O die Strecke Mx. Gleichzeitig folgt aber weiter us der Proportion

$$Mx : Ox = MM_2 : OM$$

. h. der Punkt x teilt die Strecke OM in demselben Verhältniss, ie der Punkt M die Strecke OM_2. Diese Eigenschaft war direct inzusehen, weil ja der Punkt x im Viereck $a_1b_1c_1d_1$ dem Punkt M n Viereck $a_2b_2c_2d_2$ entspricht.

Wir wollen nun einige Beziehungen zwischen den Radien der ier in Betracht kommenden Kreise ableiten.

Wir bezeichneten den Radius des Kreises M_2 mit R, jenen des reises M mit ϱ; der Radius des Kreises M_1 sei r.

Zunächst ist

$$2r = \sqrt{IQ^2 + QR^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{b_2d_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2c_2}{2}\right)^2}$$

$$b_2d_2 = 2R \sin \frac{A+B}{2}; \quad a_2c_2 = 2R \cos \frac{A-B}{2};$$

$$2r = \sqrt{R^2\left(\sin^2 \frac{A+B}{2} + \cos^2 \frac{A-B}{2}\right)} = R\sqrt{1 + \sin A \sin B}$$

$$r = \frac{R}{2}\sqrt{1 + \sin A \sin B}$$

Aus dem Dreieck MQB folgt weiter, da Wkl. MQB = Wkl. A[illegible]A:

$$MQ \sin A = MB$$

$$a_2 b_2 \sin A = 2MB$$

$$2R \cos\frac{B}{2} \sin A = 2\frac{\varrho}{\sin\frac{B}{2}}$$

oder

$$2\varrho = R \sin A \sin B$$

Wir sind somit zu den 3 Gleichungen gelangt:

$$2r = R\sqrt{1 + \sin A \sin B}$$

$$2\varrho = R \sin A \sin B,$$

aus denen sich ergibt

$$r = \varrho \frac{\sqrt{1 + \sin A \sin B}}{\sin A \sin B}$$

Nun lässt sich auch eine sehr einfache Relation zwischen den Inhalten der 3 Vierecke

$$a_2 b_2 c_2 d_2,\ ABCD \text{ und } a_1 b_1 c_1 d_1$$

aufstellen:

Der Inhalt des Vierecks $a_2 b_2 c_2 d_2$ ist, wie früher gefunden wurde,

$$a_2 b_2 c_2 d_2 = 2R^2 \sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2}$$

Der Inhalt des Vierecks $ABCD$ ist

$$\frac{4\varrho^2}{\sin A \sin B} \sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2} = R^2 \sin A \sin B \sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2}$$

Der Inhalt des Vierecks $a_1 b_1 c_1 d_1$

$$a_1 b_1 c_1 d_1 = 2\varrho^2 \sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2}$$

$$= \frac{R^2}{2} \sin^2 A \sin^2 B \sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2}$$

Setzen wir die 3 Inhalte in Proportion und bezeichnen wir dieselben mit I_1, I_2, I_3, so resultirt:

$$I_1 : I_2 : I_3 = 1 : \tfrac{1}{2} \sin A \sin B : \tfrac{1}{4} \sin^2 A \sin^2 B$$

d. h. die Inhalte aller dieser und ähnlich gebildeter Sehnenvierecke stehen in geometrischer Proportion und man findet den Inhalt eines jeden derselben, wenn man den Inhalt von $a_2 b_2 c_2 d_2$ mit einer Potenz [illegible] $A \sin B$ multiplicirt.

Wir gelangen in unserer Betrachtung zu dem rechnerischen achweis, dass der Punkt M_1 die Strecke MM_2 halbirt.

Wir finden aus dem Dreieck M_1M_2Q, dass

$$M_1M_2 = \frac{R}{2}\sqrt{1 - \sin A \sin B}$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem früher gefundenen

$$MM_2 = R\sqrt{1 - \sin A \sin B},$$

resultirt auf's neue das bereits geometrisch nachgewiesene Reltat, dass

$$M_1M_2 = \tfrac{1}{2}\, MM_2$$

Wir gehen nun zur Ableitung einiger Relationen zwischen den adien der dem Sehnen-Tangentenviereck angeschriebenen Kreise über.

Die Mittelpunkte dieser Kreise sind offenbar die Ecken des ierecks $a_2b_2c_2d_2$.

Die Kreise haben die Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ϱ_d.

Nun ist

$$MD \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = d_2D$$

$$MD \cos\frac{B}{2} = \varrho,$$

lglich

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = d_2D$$

$$d_2D \sin\frac{B}{2} = \varrho_d$$

lso

$$\varrho_d = \varrho \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{cotg}\frac{A}{2};$$

nalog

$$\varrho_a = \varrho \operatorname{cotg}\frac{B}{2} \operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

$$\varrho_b = \varrho \operatorname{cotg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

ϱ_c

Hieraus ergeben sich einige Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \varrho_a . \varrho_c = \varrho^2 \\ 2)\ \varrho_b . \varrho_d = \varrho^2 \end{array}\right\} \varrho_a : \varrho_b = \varrho_d : \varrho_c$$

Nun war

$$\varrho = \frac{2I}{s}$$

mithin

$$I = \frac{s}{2}\sqrt{\varrho_a \varrho_c} = \frac{s}{2}\sqrt{\varrho_b \varrho_d};$$

also auch

$$I = \frac{s}{2}\sqrt[4]{\varrho_a\varrho_b\varrho_c\varrho_d}$$

Wir schliessen unsere Betrachtung in der Hoffnung, dass diese reingeometrischen Untersuchungen dem Fachschulmanne eine reiche Ausbeute von Lehrsätzen liefern, die dem Schüler neue Liebe zu dem geometrischen Studium einflössen.

Traunstein, im Juni 1884.

XVIII.

Trigonometrische Sätze.

Von

Herrn **A. H. Anglin**, M. A., LL. B., F. R. S.
in Edinburg.

Der Satz, dass

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 + \ldots \operatorname{arc\,tg} a_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots}{1 - c_2 + c_4 - \ldots} \qquad (1)$$

wo a_1, a_2 ... a_n die Wurzeln der Gleichung

$$x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \ldots c_n = 0$$

sind, soll bewiesen und dadurch die wolbekannte Formel

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n) = \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots}{1 - c_2 + c_4 - \ldots} \qquad (2)$$

wo c_r die Summe der Producte zu r Factoren (jeden einmal genommen) von $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, ... $\operatorname{tg}\alpha_n$ bezeichnet, ohne Anwendung des Moivre'schen Satzes begründet werden.

1. Da

$$\operatorname{arc\,tg} A + \operatorname{arc\,tg} B = \operatorname{arc\,tg} \frac{A+B}{1-AB}$$

ist, so haben wir:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{p_1}{1-p_2}$$

wo a_1, a_2 die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - p_1 x + p$$

sind. Addirt man auf beiden Seiten

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 + \operatorname{arc\,tg} a_3 = \operatorname{arc\,tg} \frac{(p_1 + a_3) - p_2 a_3}{1 - (p_2 + p_1 a_3)}$$

Aber a_1, a_2, a_3 sind die Wurzeln von

$$(x^2 - p_1 x + p_2)(x - a_3) = 0$$

das ist von

$$x^3 - (p_1 + a_3)x^2 + (p_2 + p_1 a_3)x - p_2 a_3 = 0$$

folglich

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 + \operatorname{arc\,tg} a_3 = \frac{q_1 - q_3}{1 - q_2}$$

wo a_1, a_2, a_3 die Wurzeln von

$$x^3 - q_1 x^2 + q_2 x - q_3 = 0$$

sind. Und wenn wir mit diesem Resultat ebenso verfahren, so finden wir:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 + \operatorname{arc\,tg} a_3 + \operatorname{arc\,tg} a_4 = \operatorname{arc\,tg} \frac{r_1 - r_3}{1 - r_2 + r_4}$$

wo a_1, a_2, a_3, a_4 die Wurzeln sind von

$$x_4 - r_1 x^3 + r_2 x^2 - r_3 x + r_4 = 0$$

Nehmen wir jetzt die Richtigkeit der Gl. (1) für irgend ein n an. Hier wird es notwendig sein die Fälle zu unterscheiden, wo n gerade und wo n ungerade ist.

(1) Ist n gerade, so ist der letzte Term im Zähler der rechten Seite der Gleichung $(-1)^{\frac{n}{2}-1} c_{n-1}$ und im Nenner $(-1)^{\frac{n}{2}} c_n$. Nach Addition von $\operatorname{arc\,tg} a_{n+1}$ erhält man also:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \ldots \operatorname{arc\,tg} a_{n+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{A}{B}$$

wo

$$A \equiv (c_1 + a_{n+1}) - (c_3 + c_2 a_{n+1}) + (c_5 + c_4 a_{n+1}) - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} c_n a_{n+1}$$

$$B \equiv 1 - (c_2 + c_1 a_{n+1}) + (c_4 + c_3 a_{n+1}) - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} (c_n + c_{n-1} a_{n+1})$$

und zwar sind a_1, a_2, $\ldots$ a_{n+1} die Wurzeln von

$$(x^n - c_1 x^{n-1} + \ldots c_n)(x - a_{n+1}) = 0$$

das ist

$$x^{n+1} - (c_1 + a_{n+1}) x^n + \ldots c_n a_{n+1} = 0$$

Demnach, da n gerade ist:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \ldots \operatorname{arc\,tg} a_{n+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{t_1 - t_3 \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} t_{n+1}}{1 - t_2 + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} t_n}$$

wo $a_1, a_2 \dots a_{n+1}$ die Wurzeln sind von

$$x^{n+1} - t_1 x^n + t_2 x^{n-1} - \dots - t_{n+1} = 0$$

(2) Ist n ungerade, so ist der letzte Term im oben genannten Zähler $(-1)^{\frac{n-1}{2}} c_n$, im Nenner $(-1)^{\frac{n-1}{2}} c_{n-1}$. Verfährt man wie vorher, so findet man:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \dots \operatorname{arc\,tg} a_{n+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{C}{D}$$

wo

$$C = (c_1 - a_{n+1}) - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} (c_n + c_{n-1} a_{n+1})$$

$$D = 1 - (c_2 + c_1 a_{n+1}) + \dots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} c_n a_{n+1}$$

und zwar sind $a_1, \dots a^{n+1}$ die Wurzeln von

$$x^{n+1} - (c_1 + a_{n+1}) x^n + \dots + c_n a_{n+1} = 0$$

Da n ungerade ist, so folgt:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \dots \operatorname{arc\,tg} a_{n+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{t_1 - t_3 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} t_n}{1 - t_2 + \dots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} t_{n+1}}$$

wo $a_1, \dots a_{n+1}$ die Wurzeln sind von

$$x^{n+1} - t_1 x^n + \dots + t_{n+1} = 0$$

Somit ist der Satz vollständig bewiesen.

Setzt man $a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$, etc. so ergibt sich als Corollar die anfänglich genannte trigonometrische Formel.

2. Folgende Deductionen aus dem vorstehenden allgemeinen Satze sind bemerkenswert.

(1) Ist $a_1 = a_2 = \dots a_n = x$, so wird

$$n \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{c_1 x - c_3 x^3 + c_5 x^5 - \dots}{1 - c_2 x^2 + c_4 x^4 - \dots}$$

wo c_r die Anzahl der Combinationen von r unter n Elementen bezeichnet, mithin

$$c_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ist; und, wenn $x = \operatorname{tg} \Theta$

$$\operatorname{tg} n\Theta = \frac{c_1 \operatorname{tg} \Theta - c_3 \operatorname{tg}^3 \Theta + \dots}{1 - c_2 \operatorname{tg}^2 \Theta + \dots}$$

(2) Ferner erhält man für $x = 1$:

$$\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4} = \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots}{1 - c_2 + c_4 - \ldots} \tag{3}$$

das ist $= 0,\ 1,\ \infty,\ -1$, jenachdem

$$n \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3 \pmod{4}$$

daher

$$c_1 - c_3 + \ldots - c_{4m-1} = 0 \quad (n = 4m)$$
$$1 - c_2 + \ldots - c_{4m+2} = 0 \quad (n = 4m+2)$$

3. Ein zweiter Satz ähnlicher Natur mit dem vorhergehenden lässt sich hier in angemessener Weise geben. Es soll gezeigt werden, dass

$$\operatorname{arctg} a_1 + \ldots \operatorname{arctg} a_n = \operatorname{arctg}\frac{h_1 - h_3 + h_5 - \text{in inf.}}{1 - h_2 + h_4 - \text{in inf.}}$$

wo h_r die Summe der homogenen Producte aus je r der Elemente $a_1, a_2, \ldots a_n$, mit Wiederholung, bezeichnet:

Man hat:

$$(1 - a_1x)^{-1}(1 - a_2x)^{-1} \ldots (1 - a_nx)^{-1} =$$
$$1 + h_1x + h_2x^2 + \ldots + h_rx^r + \ldots \text{ in inf.} \tag{4}$$

Setzt man nach einander $x = i$ und $-i$ und dividirt die Differenz beider Gleichungen durch ihre Summe, so kommt:

$$i\frac{h_1 - h_3 + h_5 - \ldots \text{ in inf.}}{1 - h_2 + h_4 - \ldots \text{ in inf.}} =$$
$$\frac{(1 + ia_1)(1 + ia_2)\ldots(1 + ia_n) - (1 - ia_1)(1 - ia_2)\ldots(1 - ia_n)}{(1 + ia_1)(1 + ia_2)\ldots(1 + ia_n) + (1 - ia_1)(1 - ia_2)\ldots(1 - ia_n)}$$

Andrerseits ist:

$$(1 + a_1x)(1 + a_2x) \ldots (1 + a_nx) = 1 + c_1x + c_2x^2 + \ldots c_nx^n$$

wo c_r die Summe jener Producte ohne Wiederholung bezeichnet. Verfährt man mit dieser Gleichung ebenso wie mit Gl. (4), so erscheint zur Rechten derselbe Ausdruck, und es ergibt sich:

$$\frac{h_1 - h_3 + h_5 - \ldots}{1 - h_2 + h_4 - \ldots} = \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots}{1 - c_2 + c_4 - \ldots}$$

Substituirt man in den Formeln (1) und (2) den ersten Ausdruck für den letztern, so ergibt sich das Zubeweisende.

Das gleiche Resultat kann man auch auf folgende Art gewinnen. Man hat:

$$(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)\ldots(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n) = \cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n)$$

Nun ist aber

$$\cos\alpha+i\sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = \frac{\sec\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

daher

$$\frac{\sec\alpha_1\sec\alpha_2\ldots\sec\alpha_n}{(1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha_1)(1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha_2)\ldots(1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha_n)} = \cos(\alpha_1+\ldots\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\ldots\alpha_n)$$

das ist

$$\sec\alpha_1\sec\alpha_2\ldots\sec\alpha_n\{1-h_2+h_4-\ldots+i(h_1-h_3+h_5-\ldots)\} = \cos(\alpha_1+\ldots\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\ldots\alpha_n)$$

mithin einzeln

$$\sin(\alpha_1+\ldots\alpha_n) = \sec\alpha_1\ldots\sec\alpha_n(h_1-h_3+\ldots)$$
$$\cos(\alpha_1+\ldots\alpha_n) = \sec\alpha_1\ldots\sec\alpha_n(1-h_2+\ldots)$$

woraus:

$$\mathrm{tg}(\alpha_1+\ldots\alpha_n) = \frac{h_1-h_3+\ldots}{1-h_2+\ldots}$$

4. Setzt man $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = x$, so folgt:

$$n\,\mathrm{arctg}\,x = \mathrm{arctg}\,\frac{h_1x-h_3x^3+h_5x^5-\ldots}{1-h_2x^2+h_4x^4-\ldots}$$

wo h_r jetzt die Anzahl der homogenen Producte von je r unter n Elementen mit Wiederholung bezeichnet, das ist

$$h_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$$

Ist $x = \mathrm{tg}\Theta$, so wird

$$\mathrm{tg}\,n\Theta = \frac{h_1\,\mathrm{tg}\Theta-h_3\,\mathrm{tg}^3\Theta+\ldots}{1-h_2\,\mathrm{tg}^2\Theta+\ldots}$$

Setzt man $x = 1$, so erhält man:

$$\mathrm{tg}\,\frac{n\pi}{4} = \frac{h_1-h_3+\ldots}{1-h_2+\ldots}$$

mit denselben 4 Werten wie in Gl. (3).

5. Folgende Resultate sind vielle[illegible] [illegible]m Zusammenhange mit dem Vorhergehenden bemerke[illegible]

Man hat:

$$\cos n\Theta+i\sin n[illegible]$$

Nach Entwickelung findet man:

$$\cos n\Theta \sec^n\Theta = B; \quad \sin n\Theta \sec^n\Theta = D$$

wo

$$B = 1 - c_2 \operatorname{tg}^2\Theta + c_4 \operatorname{tg}^4\Theta - \ldots$$
$$D = c_1 \operatorname{tg}\Theta - c_3 \operatorname{tg}^3\Theta + c_5 \operatorname{tg}^5\Theta - \ldots$$

letzter Term, jenachdem n gerade oder ungerade, in B $(-1)^{\frac{n}{2}}\operatorname{tg}^n\Theta$ oder $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n \operatorname{tg}^{n-1}\Theta$, in D $n(-1)^{\frac{n}{2}-1}\operatorname{tg}^{n-1}\Theta$ oder $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{tg}^n\Theta$, und

$$c_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Andrerseits ist

$$\cos n\Theta + i \sin n\Theta = (\cos\Theta - i \sin\Theta)^{-n} = \sec^n\Theta(1 - i \operatorname{tg}\Theta)^{-n}$$

Verfährt man wie vorher, so findet man:

$$\cos n\Theta \cos^n\Theta = 1 - h_2 \operatorname{tg}^2\Theta + h_4 \operatorname{tg}^4\Theta - \ldots = A$$
$$\sin n\Theta \cos^n\Theta = h_1 \operatorname{tg}\Theta - h_3 \operatorname{tg}^3\Theta + \ldots = B$$

wo

$$h_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\, r!}$$

Hieraus folgen die Relationen:

$$AB = \cos^2 n\Theta \qquad (5)$$

$$\frac{A}{B} = (\cos\Theta)^{2n} \qquad (6)$$

$$CD = \sin^2 n\Theta \qquad (7)$$

$$\frac{C}{D} = (\cos\Theta)^{2n} \qquad (8)$$

und hieraus wieder:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \text{oder} \quad AD = BC \qquad (9)$$

$$AB + CD = 1 \qquad (10)$$

$$CD = AB \operatorname{tg}^2 n\Theta$$
$$4ABCD = \sin^2 2n\Theta$$
$$AC = BD \cos^{4n}\Theta.$$

XIX.

Neue Relationen innerhalb eines Orthogonalcoefficientensystems.

Von

R. Hoppe.

Die 3.3 Coefficienten einer Orthogonalsubstitution

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \qquad \text{(A)}$$

deren Determinante $= +1$ angenommen wird, erfüllen zunächst 6 Gleichungen der Form

$$a^2+b^2+c^2 = 1$$

6 Gleichungen der Form

$$aa_1+bb_1+cc_1 = 0$$

und 9 Gleichungen der Form

$$a = b_1 c_2 - c_1 b_2$$

Aus diesen 22 Relationen gehen jedoch manche weitere hervor, die ziemlich einfach und ausserdem durch Anwendung bemerkenswert sind.

Man findet:

$$(b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2 = (b_1{}^2+c_1{}^2)+(b_2{}^2+c_2{}^2)+2(b_1c_2-c_1b_2)$$
$$= (1-a_1{}^2)+(1-a_2{}^2)+2a = 1+a^2+2a$$

also:

$$(b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2=(1+a)^2 \tag{1}$$

woraus durch Zusammensetzung leicht folgt:

$$(1+a+b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2=(1+a)(1+a+b_1+c_2) \tag{1*}$$

ferner:

$$\begin{aligned}(a_1-b)(c-a_2) &= a_1c+ba_2-bc-a_1a_2\\ &= (b_2+ac_1)+(c_1+ab_2)+(b_1c_1+b_2c_2)+(b_1b_2+c_1c_2)\end{aligned}$$

das ist:

$$(a_1-b)(c-a_2)=(b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{2}$$

Lässt man nun c_1-b_2 durch cyklische Substitution nach beiden Richtungen einmal in $b-a_1$, das andremal in a_2-c übergehen, so erhält man aus Gl. (1):

$$\begin{aligned}(a+b_1)^2+(b-a_1)^2 &= (1+c_2)^2\\ (c_2+a)^2+(a_2-c)^2 &= (1+b_1)^2\end{aligned}$$

woraus durch Addition:

$$(a_1-b)^2+(c-a_2)^2=2(1-a)(1+a+b_1+c_2) \tag{3}$$

und durch Subtraction:

$$(a_1-b)^2-(c-a_2)^2=2(c_2-b_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{4}$$

Addirt man zu Gl. (3) die mit 2 multiplicirte Gl. (2), so kommt:

$$(a_1-b+c-a_2)^2=2(1-a+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{5}$$

Endlich gibt die halbe Summe der Gl. (3) (4) zu (2) addirt:

$$(a_1-b)(a_1-b+c-a_2)=(1-a-b_1+c_2+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{6}$$

Jede der Gl. (1) bis (6) repräsentirt eine Anzahl Relationen gleicher Form. Erstens können zwei Reihen des Systems (A) ihre Vorzeichen wechseln. Zweitens können 2 Reihen vertauscht werden, indem zugleich eine Reihe ihre Vorzeichen wechselt. Drittens kann jede cyklische Substitution vollzogen werden.

Durch letztere Operation gehen aus jeder Gleichung neun hervor, die sich nie decken und am leichtesten unmittelbar abgelesen werden können, so dass eine besondere Aufführung nicht nötig sein wird.

Aus Gl. (1) gehen durch Vorzeichenwechsel nur zwei Relationen hervor:

$$\left.\begin{aligned}(b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2 &= (1+a)^2\\ (b_1-c_2)^2-(c_1+b_2)^2 &= (1-a^2\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

die sich auch durch zweite Operationen nicht vermehren.

Für Gl. (2) (3) (4) liefert die erste Operation je 4 Relationen:

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b)(c-a_2) &= (b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\ (a_1-b)(c+a_2) &= (b_2-c_1)(1-a-b_1+c_2)\\ (a_1+b)(c-a_2) &= (b_2-c_1)(1-a+b_1-c_2)\\ (a_1+b)(c+a_2) &= (b_2+c_1)(1+a-b_1-c_2)\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b)^2+(c-a_2)^2 &= 2(1-a)(1+a+b_1+c_2)\\ (a_1-b)^2+(c+a_2)^2 &= 2(1+a)(1-a-b_1+c_2)\\ (a_1+b)^2+(c-a_2)^2 &= 2(1+a)(1-a+b_1-c_2)\\ (a_1+b)^2+(c+a_2)^2 &= 2(1-a)(1+a-b_1-c_2)\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b)^2-(c-a_2)^2 &= 2(c_2-b_1)(1+a+b_1+c_2)\\ (a_1-b)^2-(c+a_2)^2 &= 2(c_2+b_1)(1-a-b_1+c_2)\\ (a_1+b)^2-(c-a_2)^2 &= 2(-c_2+b_1)(1-a+b_1-c_2)\\ (a_1+b)^2-(c+a_2)^2 &= 2(-c_2-b_1)(1+a-b_1-c_2\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Durch die zweite Operation geht die Hauptdiagonalrichtung ab_1c_2 in die transversale a_2b_1c über. Die dadurch erzeugten Formeln können wegen des letzten Factors die Urformeln nicht decken. Man findet:

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b_2)(c_2+a) &= (c_1-b)(1+a_2+b_1-c)\\ -(a_1+b_2)(c_2+a) &= (c_1+b)(1-a_2+b_1+c)\\ (a_1+b_2)(c_2-a) &= (c_1-b)(1+a_2-b_1+c)\\ (a_1-b_2)(-c_2+a) &= (c_1+b)(1-a_2-b_1-c)\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b_2)^2+(c_2+a)^2 &= 2(1-a_2)(1+a_2+b_1-c)\\ (a_1-b_2)^2+(c_2-a)^2 &= 2(1+a_2)(1-a_2-b_1-c)\\ (a_1+b_2)^2+(c_2+a)^2 &= 2(1+a_2)(1-a_2+b_1+c)\\ (a_1+b_2)^2+(c_2-a)^2 &= 2(1-a_2)(1+a_2-b_1+c)\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b_2)^2-(c_2+a)^2 &= 2(-c-b_1)(1+a_2+b_1-c)\\ (a_1-b_2)^2-(c_2-a)^2 &= 2(-c+b_1)(1-a_2-b_1-c)\\ (a_1+b_2)^2-(c_2+a)^2 &= 2(c+b_1)(1-a_2+b_1+c)\\ (a_1+b_2)^2-(c_2-a)^2 &= 2(c-b_2)(1+a_2-b_1+c)\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Für die Gl. (5) und (6) liefert die erste Operation je 8 tionen:

$$\left.\begin{aligned}
(a_1-b+c-a_2)^2 &= 2(1-a+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1-b-c+a_2)^2 &= 2(1-a-b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1+b+c+a_2)^2 &= 2(1-a+b_2+c_1)(1+a-b_1-c_2)\\
(a_1+b-c-a_2)^2 &= 2(1-a-b_2-c_1)(1+a-b_1-c_2)\\
(a_1-b-c-a_2)^2 &= 2(1+a-b_2+c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1-b+c+a_2)^2 &= 2(1+a+b_2-c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1+b+c-a_2)^2 &= 2(1+a+b_2-c_1)(1-a+b_1-c_2)\\
(a_1+b-c+a_2)^2 &= 2(1+a-b_2+c_1)(1-a+b_1-c_2)
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
(a_1-b)(a_1-b+c-a_2) &= (1-a-b_1+c_2+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1-b)(a_1-b-c+a_2) &= (1-a-b_1+c_2-b_2-c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1-b)(a_1-b-c-a_2) &= (1+a+b_1+c_2-b_2+c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1-b)(a_1-b+c+a_2) &= (1+a+b_1+c_2+b_2-c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b+c-a_2) &= (1+a-b_1-c_2+b_2-c_1)(1-a+b_1-c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b-c+a_2) &= (1+a-b_1-c_2-b_2+c_1)(1-a+b_1-c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b+c+a_2) &= (1-a+b_1-c_2+b_2+c_1)(1+a-b_1-c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b-c-a_2) &= (1-a+b_1-c_2-b_2-c_1)(1+a-b_1-c_2)
\end{aligned}\right\}$$

Gl. (5) bleibt unverändert bei zweiter Operation, denn die Summanden des ersten und zweiten Factors der rechten Seite folgen den 2 Diagonalrichtungen, so dass sie sich dann bloss vertauschen. Gl. (6) hingegen liefert:

$$\left.\begin{aligned}
(a_1-b_2)(a_1-b_2+c_2+a) &= (1-a_2-b_1-c-b+c_1)(1+a_2+b_1-b)\\
(a_1-b_2)(a_1-b_2-c_2-a) &= (1-a_2-b_1-c+b-c_1)(1+a_2+b_1-c)\\
(a_1-b_2)(a_1-b_2-c_2+a) &= (1+a_2+b_1-c+b+c_1)(1-a_2-b_1-c)\\
(a_1-b_2)(a_1-b_2+c_2-a) &= (1+a_2+b_1-c-b-c_1)(1-a_2-b_1-c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2+c_2+a) &= (1+a_2-b_1+c-b-c_1)(1-a_2+b_1+c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2-c_2-a) &= (1+a_2-b_1+c+b+c_1)(1-a_2+b_1+c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2+c_2-a) &= (1-a_2+b_1+c-b+c_1)(1+a_2-b_1+c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2-c_2+a) &= (1-a_2+b_1+c+b-c_1)(1+a_2-b_1+c)
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Demnach vertreten die Gl. (1) 18, (2) (3) (4) (5) 72, (6) 144; alle zusammen 450 neue Relationen.

Auf die vorstehenden Relationen ward ich durch die Untersuchungen geführt, von denen der nächst folgende Aufsatz handelt.

XX.

analytische Consequenzen der Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

§. 1.

analytischen Curventheorie, d. Arch. T. LVI. S. 62
er, Crelle Journal Bd. LX. S. 182. Bd. LXIII. S. 122,
Problem der Darstellung einer Curve aus gegebener
en Krümmungs- und Torsionswinkel auf die lineare
hung 2. Ordnung

$$r'' + i\vartheta r' + \tfrac{1}{4}r = 0 \qquad (7)$$

ırung der imaginären Function r war daselbst eine
ənwärtig wird ihr directer Ausdruck in Raumgrössen
sein.

n f, g, h die Richtungscosinus der Tangente, f', g',
ɔtnormale, l, m, n die der Binormale, τ, ϑ den Krüm-
rsionswinkel, die Accente die Differentiation nach τ.

$$r = e^{\frac{1}{2}\int\frac{f'+il}{1+f}\partial\tau} \qquad (8)$$

ı durch Differentiation:

$$2r' = \frac{f'+il}{1+f}r$$

$$4r'' = \left\{\left(\frac{f'+il}{1+f}\right)^2 + 2\frac{(l-if')\vartheta'-f}{1+f} - 2\frac{f'+il}{(1+f)^2}f'\right\}r$$

$$= \left\{-\frac{f'^2+l^2}{(1+f)^2} + 2\frac{(l-if')\vartheta'-f}{1+f}\right\}r$$

$$= \left\{-\frac{1-f}{1+f} + 2\frac{(l-if')\vartheta'-f}{1+f}\right\}r$$

$$= \left\{-1+2\frac{l-if'}{1+f}\vartheta'\right\}r$$

$$= -r - 4i\vartheta'r'$$

und erkennt, dass Gl. (7) durch den Wert (8) erfüllt wird.

Bezeichnet r_1 den conjugirten Wert zu r, so ist

$$rr_1 = e^{\int\frac{\partial f}{1+f}} = A(1+f)$$

$$4r'r_1' = \frac{1-f}{1+f}rr_1 = A(1-f)$$

woraus:

$$rr_1 + 4r'r_1' = 2A \tag{9}$$

$$rr_1 - 4r'r_1' = 2Af \tag{10}$$

Die Constante A kann man $=1$ machen, indem man $f=0$ zur untern Grenze des Integrals in (8) wählt.

Ferner ist

$$2r_1r' = \frac{f'+il}{1+f}rr_1 = A(f'+il)$$

woraus:

$$r_1r' + rr_1' = Af'; \quad r_1r' - rr_1' = iAl \tag{11}$$

Hiernach sind durch r die Grössen f, f', l, somit die Lage der Curven zur x Axe bestimmt und explicite ausgedrückt.

§. 2.

Man kann nun r einerseits als specielle Lösung der Gl. (7), andrerseits als geknüpft durch Gl. (8) an die specielle Lage der Curve zur x Axe betrachten, und in beiden Eigenschaften zur vollen Allgemeinheit fortschreiten. Dann entsteht die Frage, ob die allgemeinste Lösung der Gl. (7) im ganzen der Curve in allgemeinster Lage und welche Lösung einer beliebig gegebenen Lage entspricht.

Unmittelbar erhellt Folgendes. Da Gl. (7) nur durch den Coef-icienten ϑ' von der Curve abhängt, und dieser für jede Lage die-elbe Grösse ist, so muss Gl. (7) erfüllt bleiben, wenn man die x ıxe beliebig verrückt, oder, was dasselbe ist, für f, f', l eine be-iebige Orthogonalsubstitution einführt. Sind also a, b, c Richtungs-osinus einer beliebigen neuen Geraden gegen die x, y, z, so ist

$$r_2 = e^{\frac{1}{2}\int \frac{af'+bg'+ch'+i(al+bm+cn)}{1+af+bg+ch}\partial\tau} \tag{12}$$

ine Lösung der Gl. (7). Demnach kann Gl. (7) nur entweder gleich llgemein oder allgemeiner sein als dieser Ausdruck.

Andrerseits wissen wir, dass die allgemeinste Lösung der linearen leichung 2. Ordnung (7), die wir vorläufig mit r_3 bezeichnen, durch ie Relation

$$r_3 = r\int\frac{e^{-i\vartheta}\partial\tau}{r^2} \tag{13}$$

uf das Specialintegral zurückgeführt wird. Folglich muss für irgend elche constante untere Grenzen der zwei in r_3 enthaltenen Inte-rale r_2 identisch mit r_3 werden, indem wir a, b, c als beliebig ge-eben, die unbekannten Integralgrenzen als Functionen davon an-ehen. Zur Abkürzung sei

$$\omega = \frac{f'+il}{1+f}; \quad \omega_2 = \frac{af'+\ldots+i(al+\ldots)}{1+af+\ldots} \tag{14}$$

lann hat man hiernach:

$$e^{\frac{1}{2}\int(\omega_2-\omega)\partial\tau} = \int\partial\tau\, e^{-i\vartheta-\int\omega\,\partial\tau}$$

ınd nach Differentiation:

$$\frac{\omega_2-\omega}{2}e^{\frac{1}{2}\int(\omega_2-\omega)\partial\tau} = e^{-i\vartheta-\int\omega\,\partial\tau}$$

der:

$$e^{-\frac{1}{2}\int(\omega_2+\omega)\partial\tau} = \frac{\omega_2-\omega}{2}e^{i\vartheta} \tag{15}$$

§. 3.

Hiervon machen wir erst specielle Anwendung zur algebraischen Darstellung des Integrals im Exponenten von r. Seien b und c un-ndlich klein 1. Ordnung; dann ist $1-a$ unendlich klein 2. Ord-nung. Entwickelt man also $\omega_2-\omega$ bis auf 1. Ordnung, so findet man:

$$\omega_2 - \omega = \frac{(1+f)[b(g'+im)+c(h'+in)]-(f'+il)(bg+ch)}{(1+f)^2}$$

$$= b\frac{g'+im+(fg'-gf')+i(fm-hl)}{(1+f)^2}$$

$$+ c\frac{h'+in+(fh'-hf')+i(fn-hl)}{(1+f)^2}$$

$$= b\frac{g'+n+i(m-h')}{(1+f)^2} + c\frac{h'-m+i(n+g')}{(1+f)^2}$$

$$= (b+ic)\frac{g'+n+i(m-h')}{(1+f)^2}$$

Der constante Factor $b+ic$ verschmilzt mit der untern Integralgrenze. Lässt man also b, c stetig verschwinden, so dass ω_2 in ω übergeht, so erhält man:

$$e^{-\int \frac{f'+il}{1+f}\partial\tau} = \frac{n+g'+i(n-h')}{(1+f)^2}e^{i\vartheta} \qquad (16)$$

für bestimmte untere Integralgrenze, die jedoch noch vom Anfang der ϑ abhängig bleibt.

Sei

$$\varphi = \int \frac{l\,\partial\tau}{1+f} \qquad (17)$$

Nach Multiplication mit

$$e^{\int \frac{f'\partial\tau}{1+f}} = 1+f$$

lautet Gl. (16):

$$e^{-i\varphi} = \frac{n+g'+i(m-h')}{1+f}e^{i\vartheta} \qquad (18)$$

woraus:

$$\cos(\varphi+\vartheta) = \frac{g'+n}{1+f}; \quad \sin(\varphi+\vartheta) = \frac{h'-m}{1+f} \qquad (19)$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{h'-m}{g'+n} - \vartheta \qquad (20)$$

ein Resultat, dass sich durch Differentiation leicht bestätigt. Auf rein analytischem Wege hätte sich dasselbe schwerlich auffinden lassen; es war vielmehr kaum wahrscheinlich, dass ein allgemeiner Ausdruck für das Integral (17) existirte, weil die Grössen f, l, τ Functionen zweier Variabeln sind, die nur durch die Curvengleichung in Relation mit einander stehen.

Die Relation

$$(g'+n)^2+(h'-m)^2=(1+f)^2$$

welche für das Bestehen der Gl. (19) notwendig ist, zeigt sich übereinstimmend mit der Formel (1) im vorigen Artikel.

§. 4.

Jetzt lässt sich die allgemeine Relation (15) algebraisch gestalten. Wir schreiben sie:

$$(\omega_2-\omega)e^{i\vartheta}rr_2 = A \text{ (const.)} \tag{21}$$

Hier ist

$$r=\sqrt{1+f}\,e^{\frac{i\varphi}{2}} \tag{22}$$

Aus den Gl. (19) findet man:

$$\cos\frac{\varphi+\vartheta}{2}=\sqrt{\frac{1+f+g'+n}{2(1+f)}};$$

$$\sin\frac{\varphi+\vartheta}{2}=\frac{h'-m}{\sqrt{2(1+f)(1+f+g'+n)}}$$

daher wird

$$r=\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{2(1+f+g'+n)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}} \tag{23}$$

Durch eine Orthogonalsubstitution geht r über in r_2. Sei also

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

ein constantes Orthogonalcoefficientensystem, und wenn der Index 2 das Resultat der Substitution bezeichnet,

$$\left.\begin{array}{lll} f_2=af+\ldots; & g_2=a_1f+\ldots; & h_2=a_2f+\ldots \\ f_2'=af'+\ldots; & g_2'=a_1f'+\ldots; & h_2'=a_2f'+\ldots \\ l_2=al+\ldots; & m_2=a_1l+\ldots; & n_2=a_2l+\ldots \end{array}\right\} \tag{24}$$

dann wird

$$r_2=\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{\sqrt{2(1+f_2+g_2'+n_2)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}} \tag{25}$$

und nach Einführung in Gl. (21) erhält man:

$$\left(\frac{f_2'+il_2}{1+f_2}-\frac{f'+il}{1+f}\right)\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{1+f+g'+n}}\times$$
$$\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{\sqrt{1+f_2+g_2'+n_2}}=2A \quad (26)$$

Die Constante A muss im Laufe der Curve dieselbe bleiben. also ihren Wert behalten, wenn die Tangente, Hauptnormale, Binormale die Richtungen der x, y, z haben, so dass

$$f=g'=n=1$$

wird. Hier ergibt sich:

$$\frac{b+ic}{1+a}\,\frac{1+a+b_1+c_2+i(b_2-c_1)}{\sqrt{1+a+b_1+c_2}}=A$$

das ist nach Ausführung der Multiplication:

$$A=\frac{b-a_1+i(c-a_2)}{\sqrt{1+a+b_1+c_2}} \quad (27)$$

Den Modul des Zählers zeigt Gl. (3), der gemäss wir setzen können:

$$A=\sqrt{2(1-a)}e^{i\alpha} \quad (28)$$

$$e^{i\alpha}=\frac{b-a_1+i(c-a_2)}{\sqrt{2(1-a)(1+a+b_1+c_2)}} \quad (29)$$

Setzt man ebenso

$$\cos 2\mu=\frac{g'+n}{1+f};\quad \sin 2\mu=\frac{h'-m}{1+f} \quad (30)$$

so lautet Gl. (26):

$$\left(\frac{f_2'+il_2}{1+f_2}-\frac{f'+il}{1+f}\right)\sqrt{(1+f)(1+f_2)}e^{i(\mu+\mu_2)}=\sqrt{2(1-a)}e^{i\alpha} \quad (31)$$

Die Gleichheit der Modulu ist von selbst offenbar; denn das Quadrat des Moduls zur Linken ist:

$$\left\{\left(\frac{f_2'}{1+f_2}-\frac{f'}{1+f}\right)^2+\left(\frac{l_2}{1+f_2}-\frac{l}{1+f}\right)^2\right\}(1+f)(1+f_2)=$$
$$\left\{\frac{f_2'^2+l_2^2}{(1+f_1)^2}+\frac{f'^2+l^2}{(1+f)^2}-2\frac{f'f_2'+ll_2}{(1+f)(1+f_2)}\right\}(1+f)(1+f_2)=$$
$$\left\{\frac{1-f_2}{1+f_2}+\frac{1-f}{1+f}-2\frac{f'f_2'+ll_2}{(1+f)(1+f_2)}\right\}(1+f)(1+f_2)=$$
$$2(1-ff_2-f'f_2'-ll_2)=2(1-a)$$

Die Amplitude des ersten Factors in (31) ist:

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{(1+f)l_2 - l(1+f_2)}{(1+f)f_2' - f'(1+f_2)}$$

die Gleichsetzung der Amplituden gibt:

$$\psi + \mu + \mu_2 = \alpha \tag{32}$$

Entwickelt man f_2, f_2', l_2 nach (24), so kommt:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\psi &= \frac{-l+al+b(m+fm-lg)+c(n+fn-lh)}{-f'+af'+b(g'+fg'-f'g)+c(h'+fh'-f'h)}\\ &= \frac{-(1-a)l+b(m-h')+c(n+g')}{-(1-a)f'+b(g'+n)+c(h'-m)}\end{aligned}$$

Nimmt man hierzu nach Gl. (30):

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{h'-m}{1+f+g'+n}$$

so findet man:

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}(\psi+\mu) = \{(1+f)[-(1-a)l+b(m-h')+c(n+g')]\\ &-(1-a)[l(g'+n)+f'(h'-m)]+c[(g'+n)^2+(h'-m)^2]\}:\{(1+f)[-(1-a)f'\\ &+b(g'+n)+c(h'-m)]+b[(g'+n)^2+(h'-m)^2]\}\end{aligned}$$

Nach Gl. (1) ist aber

$$(g'+n)^2+(h'-m)^2 = (1+f)^2$$

daher

$$\operatorname{tg}(\psi+\mu) = \frac{-(1-a)l - b(h'-m) + c(1+f+g'+n)}{-(1-a)f' + b(1+f+g'+n) + c(h'-m)}$$

Andrerseits ist

$$\operatorname{tg}\mu_2 = \frac{h_2'-m_2}{1+f_2+g_2'+n_2}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{c-a_2}{b-a_1}$$

und nach Gl. (32)

$$\operatorname{tg}(\mu_2 - a) = -\operatorname{tg}(\psi+\mu)$$

folglich

$$\begin{aligned}&\frac{(c-a_2)(1+f_2+g_2'+n_2)-(b-a_1)(h_2'-m_2)}{(b-a_1)(1+f_2+g_2'+n_2)+(c-a_2)(h_2'-m_2)} =\\ &\qquad \frac{-(1-a)l - b(h'-m) + c(1+f+g'+n)}{-(1-a)f' + b(1+f+g'+n) + c(h'-m)}\end{aligned} \tag{33}$$

Demnach hat der Ausdruck zur Linken die Eigenschaft sich nicht zu ändern, wenn entsprechend einer Rotation der Curve um die x Axe $a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2$ variiren.

§. 5.

Wir haben r_2 als jedenfalls begriffen in r_3 nach Gl. (13) d[illegible]arg stellt, wo die Constanten noch nicht bestimmt sind. Seien r un[illegible]nd definirt durch (23) und (25) und

$$B\frac{r_2}{r} = \int e^{-i\vartheta}\frac{\partial\tau}{r^2} + C \qquad ($$

Durch Differentiation folgt:

$$B\frac{\omega_2 - \omega}{2} r r_2 e^{i\vartheta} = 1$$

Dies verglichen mit (21) und (27) gibt:

$$B = \frac{2}{A} = \sqrt{\frac{2}{1-a}}\, e^{-i\alpha} = \frac{b - a_1 + i(c - a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}}$$

Nun ist nach Gl. (22) (19)

$$\frac{e^{-i\vartheta}}{r^2} = \frac{e^{-i(\varphi+\vartheta)}}{1+f} = \frac{g'+n-i(h'-m)}{(1+f)^2}$$

und wir gewinnen aus (34) zunächst die neue Integralformel:

$$S = \int \frac{g'+n-i(h'-m)}{(1+f)^2}\partial\tau = \frac{b-a_1-i(c-a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}} \times$$
$$\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{1+f+g'+n+i(h'-m)}\sqrt{\frac{1+f+g'+n}{1+f_2+g_2'+n_2}} \qquad (35)$$

Für $a = 1$ ist der Ausdruck nicht direct anwendbar. Um auf den Fall stetig überzugehen, sei

$$a = c_2 = \cos\varkappa; \quad b_1 = 1; \quad c = -a_2 = \sin\varkappa$$

und $\varkappa$ unendlich klein. Dann wird bei Entwickelung bis auf 1. Ordnung

$$\frac{b-a_1}{1-a} = 0 \qquad \frac{c-a_2}{1-a} = \frac{4}{\varkappa}$$

$$1+f_2+g_2'+n_2 = 1+f+g'+n+(h-l)\varkappa$$
$$h_2' - m_2 = h' - m - f'\varkappa$$

daher

$$S = -\frac{2i}{\varkappa}\frac{1+f+g'+n+(h-l)\varkappa+i(h'-m-f'\varkappa)}{1+f+g'+n+i(h'-m)} \times$$
$$\left(1 - \frac{h-l}{1+f+g'+n}\frac{\varkappa}{2}\right)$$
$$= -\frac{2i}{\varkappa}\left\{1 + \frac{h-l-if'}{1+f+g'+n+i(h'-m)}\varkappa - \frac{h-l}{1+f+g'+n}\frac{\varkappa}{2}\right\}$$

Nun ist nach Gl. (1*)

$$(1+f+g'+n)^2+(h'-m)^2 = 2(1+f)(1+f+g'+n)$$

folglich

$$S = -\frac{2i}{\varkappa}\left\{1+\frac{(h-l-if')(1+f+g'+n-i(h'-m))-(h-l)(1+f)}{2(1+f)(1+f+g'+n)}\varkappa\right\}$$

$$= -\frac{2i}{\varkappa}\left\{1+\frac{(h-l)(g'+n-i(h'-m))(-if'(1+f+g'+n)-f'(h'-m)}{2(1+f)(1+f+g'+n)}\varkappa\right\}$$

Es ist aber

$$(h-l)(g'+n)-f'(h'-m) = h(g'+n)+(f'm-g'l)-(ln+f'h')$$
$$= h(1+f+g'+n)$$

und nach Gl. (2)

$$(h-l)(h'-m) = -(f'+g)(1+f+g'+n)$$

daher

$$S = -\frac{2i}{\varkappa}\left(1+\frac{h+ig}{1+f}\frac{\varkappa}{2}\right) = \frac{g-ih}{1+f} + \text{const}$$

In einfachster Gestalt hat man also:

$$\int \frac{g'+n}{(1+f)^2}\partial\tau = \frac{g}{1+f}; \quad \int \frac{h'-m}{(1+f)^2}\partial\tau = \frac{h}{1+f}$$

wie sich auch durch Differentiation leicht bestätigt.

§. 6.

Jetzt ist für irgend einen Wert von C, welcher vom Coefficientensystem abhängt, längs der Curve

$$\frac{b_1-a_1-i(c-a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}}\,\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{1+f+g'+n+i(h'-m)}\sqrt{\frac{1+f+g'+n}{1+f_2+g_2'+n_2}}$$
$$+C = \frac{g-ih}{1+f}$$

Da man eine momentane Stellung der Tangente, Haupt- und Binormale für x, y und z Richtung wählen kann, so ist es gestattet das Wertsystem

$$f = g' = n = 1$$

als existirend zu betrachten und in die Gleichung einzuführen. Dann kommt:

$$\frac{b-a_1-i(c-a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}}\,\frac{1+a+b_1+c_2+i(b_2-c_1)}{4}\sqrt{\frac{4}{1+a+b_1+c_2}}+C=0$$

Nun ist nach Gl. (2)

$$(b-a_1)(b_2-c_1) = -(c+a_2)(1+a+b_1+c_2)$$
$$(c-a_2)(b_2-c_1) = (a_1+b)(1+a+b_1+c_2)$$

und die Gleichung reducirt sich auf

$$\frac{b-a_1-i(c-a_2)-i[c+a_2+i(a_1+b)]}{2(1-a)}+C=0$$

oder

$$C=-\frac{b-ic}{1-a}$$

Mit Anwendung von Gl. (1*) können wir das Resultat schreiben:

$$\frac{[b-a_1-i(c-a_2)][1+f+g'+n-i(h'-m)][1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)]}{2(1-a)(1+f)\sqrt{(1+a+b_1+c_2)(1+f+g'+n)(1+f_2+g_2'+n_2)}}$$
$$=\frac{b-ic}{1-a}+\frac{g-ih}{1+f} \tag{36}$$

Diese Formel stellt das Product

$$(1+a+b_1+c_2)(1+f+g'+n)(1+f_2+g_2'+n_2) \tag{37}$$

als Quadrat dar. Die 3.3 darin figurirenden Grössen sind die Richtungscosinus gleichnamiger Axen dreier orthogonaler Axensysteme gegen einander. Das Product bleibt daher ungeändert erstens bei Vertauschnng der 3 Axensysteme, zweitens bei gleichzeitig cyklischer Vertauschung der Axen innerhalb jedes Systems. Die Basis des Quadrats zeigt dagegen nicht dieselbe Symmetrie; daher lässt sie sich in 9 verschiedenen Formen darstellen, welche identisch sein müssen.

§. 7.

Nach dem Vorstehenden ist nun

$$r_2=\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{\sqrt{2(1+f_2+g_2'+n_2)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}}$$
$$\frac{1}{B}\,\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{2(1+f+g'+n)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}}\left(\frac{g-ih}{1+f}-C\right)$$

für

$$\frac{1}{B}=\frac{b-a_1+i(c-a_2)}{2\sqrt{1+a+b_1+c_2}};\quad -C=\frac{b-ic}{1+a} \tag{38}$$

Das allgemeinste Integral r_3 der Gl. (7) muss den gleichen Ausdruck für allgemeine B, C haben. Soll nun r_2 das allgemeinste Integral

repräsentiren, so ist einzige Bedingung, dass für gegebene B, C die Gl. (38) erfüllt werden können. Setzt man

$$\begin{aligned} a &= \cos\varkappa; & b &= \sin\lambda\sin\nu; \quad c = \sin\lambda\cos\nu \\ a_1 &= -\sin\varkappa\sin\mu; & b_1 &= \cos\varkappa\sin\mu\sin\nu + \cos\mu\cos\nu \\ & & c_1 &= \cos\lambda\sin\mu\cos\nu - \cos\mu\sin\nu \\ a_2 &= -\sin\varkappa\cos\mu; & b_2 &= \cos\varkappa\cos\mu\sin\nu - \sin\mu\cos\nu \\ & & c_2 &= \cos\varkappa\cos\mu\cos\nu + \sin\mu\sin\nu \end{aligned}$$

dann wird

$$\frac{1}{B} = i\sin\frac{\varkappa}{2}e^{-i(\mu+\nu)}; \quad C = -i\,\mathrm{tg}\frac{\varkappa}{2}e^{-i\nu} \tag{39}$$

Setzt man

$$\frac{1}{B} = pe^{i\pi}; \quad C = qe^{i\varrho}$$

so erhält man die 4 Bedingungen:

$$\sin\frac{\varkappa}{2} = p; \quad \mu+\nu = 2(\mathrm{R}-\pi) \tag{40}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\varkappa}{2} = q; \quad \nu = -\mathrm{R}-\varrho \tag{41}$$

Die Amplitudengleichungen lassen sich durch μ und ν erfüllen, die Modulgleichungen im allgemeinen nicht. Demnach ist das durch Gl. (25) (24) definirte r_2 nicht gleich allgemein mit r_3. Beide unterscheiden sich durch einen reellen Factor.

Betrachtet man dagegen r_2 als Bestimmungsgrösse der Curve, so zeigen die Gl. (9) (10) (11), dass nicht nur ein reeller, sondern ein beliebig complexer Factor von jedem r, mithin auch von r_2 aus den Werten von f, f', l herausfällt, so dass die erste Gl. (39) zur Bestimmung der Curve nicht mitwirkt. Hier fallen die Gl. (40) weg; nur die Gl. (41) sind notwendig und bestimmen $\varkappa$ und ν, während μ willkürlich bleibt. Erwägt man indes, dass durch $\varkappa$ und ν ebenso wie durch f, f', l die Lage der Curve zur x Axe allein bestimmt wird, während μ nur die willkürliche Rotation um die x Axe ausdrückt, so erkennt man, dass die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung sich vollkommen mit der allgemeinsten Lage einer Curve deckt. Man kann demnach die Differentialgleichung nicht dazu verwenden, aus der, einer speciellen Curve entnommenen Lösung die Bestimmung anderer Curven abzuleiten.

§. 8.

Seien r, r_1, r_2 definirt durch Gl. (23) entsprechend 3 verschiedenen Lagen derselben Curve. Dann muss, weil alle die Gl. (7) erfüllen, eine lineare Relation

$$Ar + A_1 r_1 + A_2 r_2 = 0 \tag{42}$$

zwischen ihnen existiren. Durch Differentiation geht daraus hervor:

$$A\omega r + A_1\omega_1 r_1 + A_2\omega_2 r_2 = 0$$

Aus beiden Gleichungen findet man:

$$A : A_1 : A_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{r} : \frac{\omega_2 - \omega}{r_1} : \frac{\omega - \omega_1}{r_2}$$

Man braucht dann nur ein specielles Wertsystem, bezeichnet durch den Index 0 einzuführen, um die Formel (42) zu einer bestimmten zu machen, nämlich:

$$\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{r}\right)_0 r + \left(\frac{\omega_2 - \omega}{r_1}\right)_0 r_1 + \left(\frac{\omega - \omega_1}{r_2}\right)_0 r_2 = 0$$

das ist einer algebraischen Relation zwischen 3 orthogonalen Systemen.

Zu specieller Anwendung mögen das zweite und dritte Axensystem gegen das erste die Richtungscosinus

0 1 0	0 0 1
0 0 1	1 0 0
1 0 0	0 1 0

haben. Zur Coefficientenbestimmung setzen wir

$$f = g' = n = 1$$

dann werden die ω nach der Reihe 0, 1, i, die r ebenso 2, $1 - i$, $1 + i$; die Coefficienten haben den gemeinsamen Factor $\frac{1}{2}(1-i)$, nach dessen Weglassung sie sind: 1, -1, -1. Die Gleichung lautet:

$$r - r_1 - r_2 = 0 \quad \text{oder:}$$

$$\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{1+f+g'+n}} - \frac{1+g+h'+l+i(f'-n)}{\sqrt{1+g+h'+l}} - \frac{1+h+f'+m+i(g'-l)}{\sqrt{1+h+f'+m}} = 0$$

Macht man die Gleichung rational, so erhält man:

$$2\{(1+f+g'+n)^2 + (1+g+h'+l)^2 + (1+h+f'+m)^2\} = (1+f+g+h+f'+g'+h'+l+m+n)^2.$$

§. 9.

In meiner analytischen Curvantheorie, Arch. T. LVI. S. 62, habe ich gezeigt, dass jeder Lösung r der Gl. (7) als zweite der conjugirte Wert von

$$r'e^{i\vartheta}$$

entspricht. Setzt man den Wert $\frac{1}{4}\omega r$ für r' und für ω, r die Ausdrücke (14) (23), so erhält man folgende Darstellung des allgemeinen Integrals:

$$r_3 = \frac{A\{1+f+g'+n+i(h'-m)\}+B\{f'-g+i(h-l)\}}{\sqrt{1+f+g'+n}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}}$$

Den Differentialquotienten findet man leicht aus

$$(r'e^{i\vartheta})' = (r''+ir'\vartheta')e^{i\vartheta} = -\frac{r}{4}e^{i\vartheta}$$

Setzt man den conjugirten Wert ein, so ergibt sich:

$$r_3' = \frac{A\{f'-g-i(h-l)\}-B(1+f+g'+n-i(h'-m)\}}{2\sqrt{1+f+g'+n}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}}$$

Hiernach muss für irgend welche Constanten A, B sein:

$$\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{\sqrt{1+f_2+g_2'+n_2}} = r_3e^{\frac{i\vartheta}{2}}$$

$$\frac{f_2'-g_2+i(l_2-h_2)}{\sqrt{1+f_2+g_2'+n_2}} = 2r_3'e^{\frac{i\vartheta}{2}}$$

das ist für $f = g' = n = 1$:

$$\frac{1+a+b_1+c_2+i(b_2-c_1)}{\sqrt{1+a+b_1+c_2}} = 2A$$

$$\frac{b-a_1+i(c-a_2)}{\sqrt{1+a+b_1+c_2}} = -2B$$

Dies ergibt 2 neue algebraische Relationen und 2 neue Darstellungen des symmetrischen Products (37).

XXI.

Miscellen.

1.

Eine Gruppe planimetrischer Maxima und Minima.

Es sei ABC ein schiefwinkliges Dreieck mit den Seiten abc und den Winkeln $\alpha\beta\gamma$, h_a Höhe zu a, O der Mittelpunkt des eingeschriebenen, O_a der des der Seite a angeschriebenen Kreises, ϱ und ϱ_a deren Radien und $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$ ihre Berührungspunkte mit der Seite AC, $a+b+c=2s$ und Δ der Inhalt des Dreiecks, so ist bekanntlich

$$A\mathfrak{B} = s - a, \quad A\mathfrak{B}_a = s, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_a, \quad \frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a}\right).$$

$$\Delta = \varrho s = \varrho_a(s-a) = \frac{a h_a}{2}$$

Betrachtet man von den Stücken $\alpha\ a\ s\ \varrho\ \varrho_a\ h_a\ \Delta$ je drei als gegeben, so erhält man eine Reihe von Aufgaben, deren Lösung sich meist durch den blossen Anblick der Figur ergiebt. Nimmt man je zwei Stücke als constant an und denkt im Uebrigen die Figur veränderlich, so ergeben sich ebenso leicht interessante Sätze über Maxima und Minima, die zwar vereinzelt in Aufgabensammlungen zu finden, in diesem Zusammenhange aber und so einfach bewiesen mir nicht bekannt geworden sind. Namentlich bei der Determination der oben angedeuteten Aufgaben dürften dieselben für den Unterricht vorteilhaft Anwendung finden.

Vorbemerkung: Berühren sich die Kreise O und O_a, so ist ABC gleichschenklig, weil die Halbirungslinie AOO_a des Winkels α auf der Basis senkrecht steht. Im folgenden kommt es immer darauf an, die Figur so zu verändern, dass die Kreise O und O_a sich berühren.

1. Es bleibe α und a constant. Mit α ist auch seine Halbirungslinie AO der Richtung nach festgelegt und mit $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ ist die Strecke OO_a unveränderlich. Wird nun $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ so verschoben, dass $A\mathfrak{B}_a = s$ wächst, so wachsen gleichzeitig ϱ, ϱ_a, $\varDelta = \varrho s$ und $h_a = \frac{2\varDelta}{a}$, bis sich O und O_a berühren, folglich gilt der Satz:

> Von allen Dreiecken über derselben Basis a, welche in dem Winkel an der Spitze übereinstimmen, hat das gleichschenklige den grössten Umfang und Inhalt, den grössten eingeschriebenen Kreis und die grösste zur Basis gehörige Höhe.

2. Durch α und s ist das Dreieck $A\mathfrak{B}_a O_a$ gegeben. Lässt man $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ kleiner werden, so wächst ϱ, demnach auch $\varDelta = \varrho s$ und h_a zufolge der Beziehung $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a}\right)$, folglich

> Alle Dreiecke, welche in dem Winkel an der Spitze A und dem Umfang übereinstimmen, haben den der Seite a angeschriebenen Kreis gleich. Das gleichschenklige aber hat beim Minimum der Basis ein Maximum des Inhalts, der Höhe und des eingeschriebenen Kreises.

3. Hält man α und ϱ und damit das Dreieck $A\mathfrak{B}O$ fest, so nehmen mit $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_a = a$ auch $A\mathfrak{B}_a = s$, ϱ_a und $\varDelta = \varrho s$ ab, während h_a wegen $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a}\right)$ wächst, und $A\mathfrak{B} = s - a$ constant bleibt; also

> Alle Dreiecke, welche sich einem gegebenen Kreise so umschreiben lassen, dass sie einen gegebenen Winkel α an der Spitze enthalten, stimmen im Ueberschuss der Schenkelsumme über die Basis überein. Das gleichschenklige aber hat neben der grössten zu α gehörigen Höhe am kleinsten: den Umfang und Inhalt, die Basis und den der letzteren angeschriebenen Kreis.

4. Man schlage mit h_a einen Kreis um A, so ist BC äussere Tangente für denselben und den Kreis O. Bleibt jetzt α und h_a constant, so rückt O auf der festen Linie AO nach A hin, wenn ϱ kleiner wird. Gleichzeitig aber nehmen AB, AC, BC und damit s und $\varDelta = \varrho s$ ab, also

> Von allen Dreiecken, welche in einem Winkel und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, hat das gleichschenklige ein Minimum für Basis, Umfang, Inhalt und eingeschriebenen Kreis.

5. Wenn bei constantem a und $\Delta = \varrho s$ der Umfang s abnimmt, so muss ϱ wachsen, also O und O_a auf der festen Linie AO zusammenrücken, ebenso $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$, bis sich die Kreise O bei wachsendem und O_a bei abnehmendem Radius berühren. D. h.

> Von allen gleich grossen Dreiecken mit demselben Winkel α an der Spitze hat das gleichschenklige den grössten eingeschriebenen und gleichzeitig den kleinsten der Basis angeschriebenen Kreis. Ausserdem ein Minimum der Basis und des Umfangs und ein Maximum der zur Basis gehörigen Höhe.

6. Mit a und s sind die Strecken $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ und $A\mathfrak{B}_a$ und damit die Lote in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$ auf $A\mathfrak{B}_a$ als Oerter für O und O_a gegeben. Mit α wachsen auch ϱ und ϱ_a und daher wegen $\Delta = \varrho s = \frac{a h_a}{2}$ auch Δ und h_a, demnach:

> Von allen Dreiecken, welche in der Basis a und dem Umfang übereinstimmen, hat das gleichschenklige den Winkel an der Spitze, den eingeschriebenen so wie den der Basis angeschriebenen, die zur Basis gehörige Höhe und den Inhalt am grössten.

7. Es sei a und ϱ constant, also auch Dreieck $O\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ und das Lot in $\mathfrak{B}_a$ auf $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ als Ort für O_a. Bewegt sich A nach $\mathfrak{B}$ hin, so wird $s = A\mathfrak{B}_a$ kleiner und damit auch $\Delta = \varrho s$ und $h_a = \frac{2\Delta}{a}$, während ϱ_a und α wachsen, folglich

> Von allen Dreiecken, welche sich einem festen Kreise so umschreiben lassen, dass sie eine gegebene Basis a enthalten, hat das gleichschenklige den grössten Winkel an der Spitze und den grössten der Basis angeschriebenen Kreis, aber den kleinsten Umfang und Inhalt und die kleinste zur Basis gehörige Höhe.

8. Hält man neben a ϱ_a fest, und lässt A sich von $\mathfrak{B}$ fortbewegen, so wächst $s = A\mathfrak{B}_a$ und ϱ und damit $\Delta = \varrho s$ und $h_a = \frac{2\Delta}{a}$. Da stets $\varrho < \varrho_a$ bleibt, so tritt die Berührung der Kreise O und O_a nur dann ein, wenn $a < 2\varrho_a$, folglich

> Von allen Dreiecken, welche die Basis und den derselben angeschriebenen Kreis gleich haben, besitzt das gleichschenklige den kleinsten Winkel an der Spitze, aber den grössten eingeschriebenen Kreis, den grössten Umfang und Inhalt und die grösste zur Basis gehörige Höhe.

9. Mit $a = \mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ sind die Lote in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$ auf $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ festgelegt. Soll dann noch Δ constant bleiben, so muss wegen $\Delta = \varrho s$ s abnehmen, wenn ϱ wächst, dann nehmen aber auch α und ϱ_a zu, während $h_a = \frac{2\Delta}{a}$ constant ist, also

> Von allen gleich grossen Dreiecken von derselben Basis hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang, den grössten ein- und der Basis angeschriebenen Kreis und den grössten Winkel an der Spitze.

10. Durch ϱ und s ist Δ bestimmt. Legt man $A\mathfrak{B}_a = s$ fest und lässt $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ abnehmen, so rücken die Kreise O und O_a zusammen bis zur Berührung, dann ist a ein Minimum $= a_1$. Wächst dagegen a, so bewegt sich das constante $O\mathfrak{B}$ nach A hin, und daher wächst der Winkel α und der Radius ϱ_a bis sich die Kreise zum zweiten Male berühren, dann ist a ein Maximum $= a_2$, d. h.

> Es lassen sich einem Kreise unendlich viele Dreiecke umschreiben, welche alle denselben Umfang und Inhalt haben. Unter diesen ist dasjenige, welches die kleinste Seite und den kleinsten gegenüber liegenden Winkel enthält, gleichschenklig, ebenso dasjenige, welches die grösste Seite und den grössten Winkel an der Spitze hat. Oder: Ein Dreieck lässt sich mit Beibehaltung des Umfangs stets so verwandeln, dass es eine Seite a zwischen zwei Grenzen a_1 und a_2 oder einen Winkel zwischen zwei Grenzen α_1 und α_2 enthält.

Da $3a_1 < 2s$ und $3a_2 > 2s$ ist, so liegt $\frac{2s}{3}$ zwischen a_1 und a_2, und man kann also jedes Dreieck mit Beibehaltung des Umfangs so verwandeln, dass eine Seite $\frac{1}{3}$ des Umfangs wird. Mit Benutzung von 6. ergiebt sich dann:

> Von allen Dreiecken mit demselben Umfang hat das gleichseitige den grössten Inhalt.

Da ferner $3\alpha_1 < 180^0$ und $3\alpha_2 > 180^0$ ist, so liegt 60^0 zwischen α_1 und α_2 und man kann demnach jedes Dreieck mit Beibehaltung des Umfangs so verwandeln, dass es einen Winkel von 60^0 enthält. Aus 5. folgt dann:

> Von allen gleich grossen Dreiecken hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Anmerkung. Die Sätze vom gleichseitigen Dreieck werden gewöhnlich als selbstverständliche Zusätze zu 5. und 6. gegeben, wie in der Planimetrie von Heis und Eschweiler. Steiner, gesammel Werke II 185 führt einen andern Beweis von Lhuilier an und gie einen eigenen, der dem obigen ähnlich ist. Geht man vom gleic schenkligen Dreieck aus, so ergiebt sich die halbe Basis x desselbe als Wurzel der kubischen Gleichung

$$2x^3 - x^2 s + \varrho^2 s = 0$$

und zwar ist $x = \frac{s}{3}$ d. h. Dreieck gleichseitig, sowol wenn ϱ ein Maximum bei gegebenem s, oder s ein Minimum bei gegebenem ϱ ist. Dies sind ebenfalls die obigen Sätze. Siehe Lampe, Geometrische Aufgaben S. 7.

11. s und ϱ_a bestimmen das Dreieck $AO_a\mathfrak{B}_a$ und damit den Winkel α. Nimmt $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ ab, so wächst ϱ und folglich auch $\Delta = \varrho s$ und h_a wegen $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a}\right)$ d. h.

> Alle Dreiecke, welche den Umfang und den der Basis angeschriebenen Kreis gleich haben, stimmen auch im Winkel an der Spitze überein. Das gleichschenklige unter ihnen aber hat die kleinste Basis, die grösste zur Basis gehörige Höhe, den grössten Inhalt und den grössten eingeschriebenen Kreis.

12. Aus $\Delta = \varrho s = \frac{a h_a}{2}$ folgt $\varrho : a = h_a : 2s$. Mit h_a und s ist also das Verhältniss $\varrho : a$ und dadurch die Richtung $O\mathfrak{B}_a$ als Ort für O gegeben, wenn der rechte Winkel $A\mathfrak{B}_a O_a$ festliegt. Mit wachsendem $a = \mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ nehmen auch $\varrho\varrho_a$ und α zu, indem sich AO um A dreht, ebenso $\Delta = \varrho s$:

> Von allen Dreiecken mit demselben Umfang, welche in einer Höhe übereinstimmen, hat das gleichschenklige am grössten: die Basis und den gegenüberliegenden Winkel, den eingeschriebenen, so wie den der Basis angeschriebenen Kreis und den Inhalt.

13. Sollen ϱ und ϱ_a constant sein, so ist dies auch h_a. Mit $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ wird $A\mathfrak{B}_a = s$ und $\Delta = \varrho s$ kleiner und α grösser, also

> Alle Dreiecke, welche sich einem Kreise so umschreiben lassen, dass der der Basis angeschriebene Kreis eine gegebene Grösse hat, stimmen in der Höhe zur Basis überein, das gleichschenklige aber hat die kleinste Basis, den

kleinsten Umfang und Inhalt, dagegen den grössten Winkel an der Spitze.

14. Mit α und ϱ_a ist α und s constant; mit a und h_a auch a nd Δ, mit s und Δ oder ϱ und Δ ebenso s und ϱ, mit ϱ und h_a ler ϱ_a^* und h_a endlich ϱ und ϱ_a gegeben. Diese Fälle sind also dem Obigen miterledigt. Dr. J. Lange.

2.

Ein Dreieckssatz.

P sei ein belieger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC. Soll ne Gerade durch P so gelegt werden, dass ihr von den Dreiecksiten AB, AC begrenzter Teil von P halbirt ist; so zieht man durch eine Parallele zu AC, welche AB in K trifft, und trägt auf AB ie Strecke $KC_a = AK$ auf; C_aP ist die verlangte Gerade.

C_aP treffe AC in B_a. Zu dem Zwecke, zwischen den drei Geden B_aC_a und dem Dreiecke ABC eine Beziehung herzustellen, ichen wir die Gleichung der Geraden B_aC_a

Die trimetrischen Punktcoordinaten von P bezüglich des Urdreikes ABC ($BC = a$) seien $p_a p_b p_c$. Ferner ist:

$$AC \equiv 0 \quad 1 \quad 0$$

er unendlich ferne Punkt dieser Geraden hat die Form:

$$c \quad 0 \quad -a$$

Die Gleichung der durch P zu AC gezogenen Parallelen PK ist emnach:

$$\begin{vmatrix} x_a & p_a & c \\ x_b & p_c & 0 \\ x_c & p_c & -a \end{vmatrix} = 0$$

ie Geraden

$$PK \equiv -ap_b \quad cp_c + ap_a \quad -cp_b$$
$$AB \equiv 0 \quad 0 \quad 1$$

effen sich in

$$k \equiv cp_c + ap_a \quad ap_b \quad 0$$

Bezeichnen wir mit $X(a)$ die Länge der Normale von X auf BC nd mit F den Flächeninhalt des Fundamentaldreiecks, so

$$K(a) = \frac{2F(cp_c + ap_a)}{a\Sigma ap_a}$$

$$K(b) = \frac{2F.ap_b}{a\Sigma ap_a}$$

$$K(c) = 0$$

Nach der angeführten Construction ist K die Mitte von AC_a. Es ist also:

$$K(a) = \frac{A(a) + C_a(a)}{2}$$

$$C_a(a) = 2K(a) - A(a)$$

$$= \frac{2F}{a\Sigma ap_a}(2cp_c + 2ap_a) - \frac{2F}{a}$$

$$= \frac{2F}{a\Sigma ap_a}(cp_c + ap_a - bp_b)$$

Ferner erhalten wir:

$$2K(b) = A(b) + C_a(b)$$

$$C_a(b) = 2ap_b : \frac{2F}{a\Sigma ap_a}$$

$$C_a(c) = 0$$

$$C_a \equiv cp_c + ap_a - bp_b \quad 2ap_b \quad 0$$

$$B_a C_a \equiv PC_a \equiv$$

$$-2ap_bp_c \quad p_c(cp_c + ap_a - bp_b \quad p_b(ap_a + bp_b - cp_c)$$

B_aC_a trifft BC in

$$\mathfrak{A} \equiv 0 \quad -p_b(ap_a + bp_b - cp_c) \quad p_c(cp_c + ap_a - bp_b)$$

Die $\mathfrak{A}$ liegen in der Geraden

$$\mathfrak{G} \equiv p_bp_c(bp_b + cp_c - ap_a)$$

Diese Gerade ist der Harmonikalen des Punktes P parallel.

Es sind nämlich zwei Gerade

$$a_1x_a + b_1x_b + c_1x_c = 0$$
$$a_2x_a + b_2x_b + c_2x_c = 0$$

einander parallel, wenn

$$\Sigma a(b_1c_2 - b_2c_1) = 0$$

Die Harmonikale des Punktes P bezüglich des Urdreiecks i die Gerade p_bp_c. Für die Gerade $\mathfrak{G}$ und die Harmonikale von ist demnach:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_c p_a & p_a p_b \\ p_c p_a (c p_c + a p_a - b p_b) & p_a p_b (a p_a + b p_b - c p_c) \end{vmatrix}$$
$$= 2 p_a^2 p_b p_c (b p_b - c p_c)$$

Es ist aber

$$\Sigma a p_a (b p_b - c p_c) = 0$$

Folglich ist die Gerade $\mathfrak{G}$ der $p_b p_c$ parallel. Wir haben also folgenden Satz:

Die drei durch einen beliebigen Punkt in der Ebene eines Dreiecks gezogenen Geraden, deren von je zwei Dreiecksseiten begrenzten Stücke durch den gewählten Punkt halbirt werden, treffen die Gegenseiten in Punkten einer Geraden, welche der Harmonikalen dieses Punktes parallel ist.

Projiciren wir die Figur, so wird die unendlich ferne Gerade eine Gerade $\mathfrak{G}_1$, welche die BC in A_1 trifft. K ist dann der Schnittpunkt der Geraden AB und PB_1. C_a ist der zu A bezüglich KC_1 vierte harmonische Punkt. Die B_aC_a treffen die BC in Punkten einer Geraden $\mathfrak{G}$, von welcher die Harmonikale von P und die $\mathfrak{G}_1$ in demselben Punkte geschnitten werden. Wir haben also:

P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC. Die Gerade $\mathfrak{G}_1$ treffe BC in A_1. Bezüglich C_1 und des Schnittpunktes der PB_1 mit AB liege C_a zu A harmonisch.

Dann treffen die B_aC_a die BC in Punkten einer Geraden $\mathfrak{G}$; diese Gerade, $\mathfrak{G}_1$ und die Harmonikale von P schneiden sich in einem Punkte. Für $\mathfrak{G}_1 \equiv a_1$ wird

$$\mathfrak{G} \equiv p_b p_c (b_1 p_b + c_1 p_c - a_1 p_a).$$

Wien, December 1884. Emil Hain.

3.

Ein Satz über Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind.

Es möge mir gestattet sein im folgenden die Frage nach dem geometrischen Orte der Mittelpunkte der Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind, und deren Achsenquadratsumme eine gegebene Grösse hat, zu behandeln und daran einige Folgerungen zu schliessen.

ABC sei irgend ein Dreieck, AA_1, BB_1 und CC_1 dessen Höhen und H dessen Höhenschnitt. Wählen wir nun auf AB irgend einen Punkt E und auf AC irgend einen Punkt F und beschreiben über EC und BF als Durchmesser Kreise, so hat der Punkt H in Bezug auf die beiden Kreise die gleichen Potenzen $HC.HC_1$ und $HB.HB_1$, liegt also auf der gemeinsamen Sehne derselben. Sind ferner M und N die Schnittpunkte der beiden Kreise, so werden alle Kegelschnitte, die dem Dreieck einbeschrieben sind, und die die Linie EF berühren, aus diesen Punkten unter rechten Winkeln gesehen. Ist also P der Mittelpunkt eines solchen Kegelschnitts mit den Halbachsen a und b, so muss somit

$$a^2+b^2 = PM^2 = PN^2$$

sein. Andererseits finden wir jedoch, dass in dem gleichschenkligen Dreieck MPN auch die Relation

$$PH^2 = PM^2 + HM.HN$$

giltig ist. Daraus folgt aber sofort die Gleichung

$$HP^2 = a^2+b^2+HA.HA_1.$$

Hiebei haben wir zwar vorausgesetzt, dass die beiden Schnittpunkte M und N der Kreise reell seien. Ist dem jedoch nicht so, so ist doch die letztere Formel giltig, nur erleidet der Gang der Ableitung eine unwesentliche Aenderung.

Aus der entwickelten Relation $HP^2 = a^2+b^2+HA.HA_1$ ergeben sich nun folge Sätze:

1) Ist P der Mittelpunkt eines Kegelschnittes mit den Halbachsen a und b, der einem Dreieck A einbeschrieben ist, so ist stets, wenn H der Höhenschnitt des Dreiecks ist:

$$HP^2 = a^2+b^2+\text{const.}$$

2) Ist der Höhenschnitt eines Dreiecks Mittelpunkt eines Kegelschnitts, der dem Dreieck einbeschrieben ist, so hat derselbe unter allen, dem Dreieck einbeschriebenen, Kegelschnitten die kleinste Achsenquadratsumme.

3) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind und die eine gegebene Achsenquadratsumme haben, ist ein Kreis um den Höhenschnitt des Dreiecks als Mittelpunkt.

Wird ferner $a^2+b^2=0$, so ist der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel und wir finden den bekannten Satz:

4) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen yperbeln, die einem stumpfwinkligen Dreieck einbeschrieben werden önnen, ist ein Kreis um den Höhenschnitt des Dreiecks, der die reise über den Seiten rechtwinklig durchschneidet.

Da ferner unter den Kegelschnitten sich solche befinden, die in ine doppelt zu rechnende Strecke übergehen, deren Endpunkte in ine Ecke und die gegenüber liegende Seite des Dreiecks fallen, eriebt sich der Satz:

5) Wird um den Höhenschnitt eines Dreiecks ABC ein Kreis eschrieben, der die Seiten des Dreiecks der Seitenmitten von ABC ei entsprechender Bezeichnung in α, α_1, β, β_1, γ und γ_1 trifft, so t stets:

$$A\alpha = A\alpha_1 = B\beta = B\beta_1 = C\gamma = C\gamma_1.$$

Da überdies congruente Kegelschnitte gleiche Achsenquadratumme haben, so folgen noch die Sätze:

6) Einem Dreieck lassen sich höchstens 6 Kegelschnitte eineschreiben, welche einem gegebenen Kegelschnitt congruent sind. ie Mittelpunkte desselben liegen auf einem Kreise um den Höhenchnitt des Dreiecks.

7) Einem Kegelschnitt lassen sich höchstens 24 Dreiecke umchreiben, die einem gegebenen Dreieck congruent sind; die Höhen erselben sind vom Mittelpunkt des Kegelschnitts gleich weit entfernt. (Die Sätze 5), 6) und 7)) finden sich in Steiner's g. W. B. II. . 346., jedoch giebt Steiner in letzterem Satze irrtümlich die Zahl , austatt der Zahl 24 an.)

Zum Schlusse wollen wir noch hinzufügen, dass diese Sätze enigstens teilweise noch giltig sind, wenn zwei Seiten des Dreiecks usammenfallen.

Weingarten, im Febr. 1885. B. Sporer.

4.

Körper zwischen zwei Rotationsellipsoiden.

Es liegt zu Grunde das System

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\[2ex] (2) \quad \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Das gemeinschaftliche Flächenstück $JCKHLDMGJ$ stellt sich dar als

$$F_1 = 4ab \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Das Flächenstück $JBMGJ$ stellt sich dar als

$$F_2 = ab \arcsin \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

1. Die beiden Ellipsen rotiren gleichzeitig um die x-Axe.

Es entstehen zwei Rotationsellipsoide, welche ein Körperstück gemeinschaftlich haben. Ausser diesem gemeinschaftlichen Körperstücke entstehen zu beiden Seiten des zweiten Rotationsellipsoids, links und rechts zwei congruente Körperstücke des ersten Rotationsellipsoids und endlich bleibt noch ein wulstförmiges Körperstück vom zweiten Rotationsellipsoide rings um das gemeinschaftliche Körperstück des durch Rotation der Ellipse (2) um die kleine Axe entstanden ist.

Es bezeichne nun

V_1 das Volumen des gemeinschaftlichen Körperstückes, das durch Rotation von $KCJGMDLHK$ entstanden ist;

V_2 das Volumen des Körpers, der durch Rotation von $GJBMG$ oder $HKALH$ um die x-Axe entstanden ist;

V_3 das Volumen des Körpers, der durch Rotation von $KCJE$ oder $LDMF$ um die x-Axe entstanden ist.

Dann ist

$$V_1 = \tfrac{4}{3}ab\pi\left(a - \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);$$

$$V_2 = \tfrac{2}{3}ab\pi\left(b - a + \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);$$

$$V_3 = \tfrac{4}{3}ab\pi \cdot \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Drehen sich beide Ellipsen gleichzeitig um die y-Axe, so entstehen dieselben Körper; blos ihre Lage ist eine andere.

2. **Die beiden Ellipsen rotiren gleichzeitig um ihre kleinen Axen.**

Es entstehen zwei breitgedrückte Rotationsellipsoide.

Denken wir uns in 0 senkrecht auf der xy-Ebene die z-Axe, so erühren sich beide Körper in $z = +a$ und $z = -a$.

Es soll das Volumen des den beiden Rotationsellipsoiden ge- einschaftlichen Körperteiles berechnet werden.

Die Gleichung des Rotationsellipsoides, welches durch Rotation n GEH um GH entsteht, lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

egen wir jetzt eine Schnittebene in der Entfernung $z = p$ von O irch beide Körper, so erhalten wir:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{p^2}{a^2};$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{p^2}{a^2};$$

ler, wenn für p nun wieder z stehen gelassen wird, wir uns aber nken, dass z jetzt constant ist, so können die Gleichungen auch e Form annehmen

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} = 1;$$

$$\frac{x^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} + \frac{y^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} = 1.$$

Diese beiden Schnittfiguren sind wieder nur Ellipsen mit den iden Axen bezüglich $a\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$ und $b\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$.

Das gemeinschaftliche Körperstück V wird sich nun einfach dar- ellen als $\int_{-a}^{+a} f(z)\,dz$, wo unter $f(z)$ das gemeinschaftliche Flächen- ick $JCKHLDMGJ$ zu verstehen ist, und worin jetzt

$$a = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad b = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$$

setzen ist.

Es war

$$f(z) = 4ab \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

folglich wird hier

$$f(z) = 4ab\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

also

$$V = \int_{-a}^{+a} 4ab\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \, . \, dz;$$

oder

$$V = \tfrac{16}{3} a^2 b \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

oder

$$V = \tfrac{4}{3} a . F_1$$

d. h.

Das Volumen des gemeinschaftlichen Körperteiles ist gleich dem vierfachen Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche F_1 und der Höhe a.

Gröbzig, im December 1884.

Dr. Albert Bieler.

5.

Wann stehen die von einem Punkte an eine Kegelschnittslinie gezogenen zwei Tangenten auf einander senkrecht.

Um diese Frage sofort für alle Kegelschnittslinien K beantworten zu können, gehen wir von der sogenannten Scheitelgleichung

$$y^2 = px + qx^2 \qquad 1)$$

aus, welche bekanntlich für $p = 2a$ und $q = -1$ einem Kreise vom Halbmesser a. für $p = \frac{2b^2}{a}$ und $q = -\frac{b^2}{a^2}$ einer Ellipse mit den Halbachsen a und b, für $p = \frac{2b^2}{a}$ und $q = \frac{b^2}{a^2}$ einer Hyperbel mit den Halbachsen a und b, für $q = 0$ einer Parabel mit dem Parameter p entspricht.

Die Tangente T an den Kegelschnitt K hat die Gleichung

$$(\eta - y) = (\xi - x) \frac{p + 2qx}{2\sqrt{px + qx^2}},$$

welche auch auf die Form

$$2\eta y = 2q\xi x + p\xi + px \qquad 2)$$

gebracht werden kann. Die Coordinaten (x, y) der Berührungspunkte müssen den Gleichungen 1) und 2) genügen, können somit berechnet werden. Es ergeben sich, wie bekannt, zwei Berührungspunkte $B_1 \ldots (x_1, y_1)$ und $B_2 \ldots (x_2, y_2)$ und dem entsprechend auch zwei Tangenten

$$T_1 \ldots 2y_1\eta = (p + 2qx_1)\xi + px_1 \text{ und } T_2 \ldots 2y_2\eta = (p + 2qx_2)\xi + px_2.$$

Diese stehen auf einander senkrecht, wenn

$$\frac{p + 2qx_1}{2y_1} = -\frac{2y_2}{p + 2qx_2}$$

ist, oder die Gleichung

$$p^2 + 2pq(x_1 + x_2) + 4q^2x_1x_2 + 4y_1y_2 = 0 \qquad 3)$$

besteht. Wenn wir in die letzte Gleichung die aus 1) und 2) folgenden Wurzelwerte einsetzen, so erhalten wir eine Gleichung 4), in welcher die laufenden Coordinaten (ξ, η) der Tangente T vorkommen. Wählen wir ξ und η so, dass der Gleichung 4) genügt wird, dann sind die vom Punkte $P \ldots (\xi, \eta)$ an K gezogenen Tangenten normal; d. h. die Gleichung 4) ist die Gleichung einer Linie, die alle jene Punkte enthält, von welchen Tangenten an K ausgehen, die auf einander senkrecht stehen. Wie Gleichung 3) zeigt, braucht man die Wurzelwerte selbst nicht, sondern nur $(x_1 + x_2)$, x_1x_2 und y_1y_2. Um dafür Werte zu finden, berechne man y aus 2) und setze es in 1) ein. Man erhält:

$$x^2(p^2 + 4q^2\xi^2 + 4pq\xi - 4q\eta^2) + x(2p^2\xi + 4pq\xi^2 - 4p\eta^2) + p^2\xi^2 = 0,$$

weshalb

$$(x_1 + x_2) = \frac{4p\eta^2 - 2p^2\xi - 4pq\xi^2}{p^2 + 4pq\xi + 4q^2\xi^2 - 4q\eta^2}$$

und

$$x_1x_2 = \frac{p^2\xi^2}{p^2 + 4pq\xi + 4q^2\xi^2 - 4q\eta^2}$$

Berechnet man x aus 2) und setzt es in 1) ein, so ergibt sich die Gleichung:

$$y^2(p^2 + 4pq\xi + 4q^2\xi^2 - 4q\eta^2) - 2p^2\eta y + p^2q\xi^2 + p^3\xi = 0.$$

Es ist also:

$$y_1 y_2 = \frac{p^2\xi(q\xi + p)}{p^2 + 4pq\xi + 4q^2\xi^2 - 4q\eta^2}$$

Werden nun diese Werte in die Gleichung 3) eingeführt, so findet sich nach einfacher Umformung die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \frac{p}{q}\xi + \frac{p^2}{4q} = 0 \qquad 4)$$

d. i. die Gleichung eines Kreises K.

Wir können somit die oben gestellte Frage dahin beantworten: Die vom Punkte $P \ldots (\xi, \eta)$ an die Kegelschnittslinie $K \ldots y^2 = px + qx^2$ gezogenen Tangenten stehen nur dann auf einander senkrecht, wenn der Punkt P auf dem Kreise $K \ldots \xi^2 + \eta^2 + \frac{p}{q}\xi + \frac{p^2}{4q} = 0$ liegt.

Die Gleichungen 1) und 4) zeigen uns auch noch, dass K und k denselben Mittelpunkt $M \ldots (x = -\frac{p}{2q}, y = 0)$ besitzen, und dass der Halbmesser des Kreises k die Grösse $r = \sqrt{\frac{p^2}{4q^2} - \frac{p^2}{4q}}$ hat. Demnach nimmt r den Wert $a\sqrt{2}$ an, wenn K ein Kreis vom Halbmesser a ist; den Wert $\sqrt{a^2 + b^2}$, wenn K eine Ellipse mit den Halbachsen a und b ist; den Wert $\sqrt{a^2 - b^2}$, wenn K eine Hyperbel mit den Halbachsen a und b ist; den Wert ∞ (d. h. k wird eine Gerade) wenn K eine Parabel ist. In letzterem Falle $(q = 0)$ reducirt sich die Gleichung 4) wirklich in die lineare Gleichung:

$$\xi + \frac{p}{4} = 0;$$

k geht also in die Leitlinie der Parabel über.

Die Werte für r lassen auch noch erkennen, dass k bei einem Kreise, einer Ellipse oder einer Parabel K immer reell ist, dass aber k dann in einen Punkt degenerirt, wenn K eine gleichseitige Hyperbel ist, (weil $(r = \sqrt{a^2 - b^2} = 0$ wird) und dass gar keine zu einander senkrechten Tangenten möglich sind, wenn K eine Hyperbel ist, deren Hauptachse kleiner ist als die Nebenachse. $(r = \sqrt{a^2 - b^2}$ wird nämlich in diesem Falle imaginär.)

Pola, am 10. Mai 1885.

Franz Schiffner,
k. k. Prof.

6.

Zur Convergenz der Reihen.

Eine unendliche Reihe

$$t_0+t_1+t_2+\dots+t_k+\dots=T$$

ist convergent, wenn

$$-1<\lim_{k=\infty}\frac{t_{k+1}}{t_k}<+1 \qquad (1)$$

ist.

Wird $\lim\frac{t_{k+1}}{t_k}=+1$, so convergirt die Reihe noch, wenn statthat

$$\lim_{k=\infty} k\left\{\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right\}>+1 \qquad (2)$$

Für den Fall $\lim\frac{t_{k+1}}{t_k}=-1$ soll im Folgenden eine analoge Regel aufgestellt werden.

Betrachten wir die unendliche Reihe

$$U=\frac{1}{1^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\dots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k^n}+(-1)^k\frac{1}{(k+1)^n}+\dots,$$

so ist dieselbe convergent, so lange $n>0$ ist, weil in diesem Falle die absoluten Werte der Glieder fortwährend abnehmen und ausserdem regelmässiger Zeichenwechsel vorhanden ist. Für $n\geqq 1$ ist dies klar. Wird $n<1$, so kann man setzen

$$n=\frac{1}{p};\quad p>1,$$

und die Reihe geht über in

$$\frac{1}{\sqrt[p]{1}}-\frac{1}{\sqrt[p]{2}}+\frac{1}{\sqrt[p]{3}}-\dots,$$

welche aus obigen Gründen ebenfalls convergirt. Für U wird nun

$$\lim\frac{u_{k+1}}{u_k}=\lim\left(-\frac{\frac{1}{(k+1)^n}}{\frac{1}{k^n}}\right)=\lim\left(-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n}\right)=-1;\ n>0.$$

Ist also $\lim\frac{t_{k+1}}{t_k}=-1$, so wird nach einem bekannten Satze die Reihe T noch convergiren, wenn

$$-\frac{t_{k+1}}{t_k} < \left(\frac{k}{k+1}\right)^n; \quad n > 0$$

bleibt. Hieraus folgt:

$$-\frac{t_k}{t_{k+1}} > \left(1+\frac{1}{k}\right)^n.$$

Es ist aber

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^n = 1 + \frac{n}{k} + \frac{1}{k^2} f\left(\frac{1}{k}\right); \quad -1 < \frac{1}{k} < +1.$$

Also muss auch sein

$$k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}} - 1\right) > n + \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k}\right) f\left(\frac{1}{k}\right).$$

Lassen wir jetzt k unendlich werden, so ergiebt sich

$$\lim_{k=\infty} \left\{ k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}} - 1\right) \right\} > n.$$

Da nun $n > 0$ sein muss, so ist die Reihe T für $\lim \frac{t_{k+1}}{t_k} = -1$ noch convergent, wenn

$$\lim_{k=\infty} \left\{ k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}} - 1\right) \right\} > 0 \tag{3}$$

ist.

Diese Regeln wollen wir auf die Binomialformel anwenden. Es ist

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2.3\ldots k}x^k + \ldots$$

Nach (1) erhalten wir zunächst

$$\lim \frac{t_{k+1}}{t_k} = \lim \left\{ \frac{\mu - k}{k+1} x \right\} = \lim \left\{ \frac{\frac{\mu}{k} - 1}{1 + \frac{1}{k}} x \right\} = -x.$$

Es muss demnach

$$-1 < -x < +1 \qquad (-\infty < \mu < +\infty)$$

sein.

Untersuchen wir jetzt die Grenzfälle $x = -1$ und $x = +1$.

I. Für $x = -1$ wird

$$\lim \frac{t_{k+1}}{t_k} = +1:$$

Nach Regel (2) haben wir also zu bilden

$$k\left\{\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right\}=k\left\{-\frac{k-1}{\mu-k}-1\right\}=-\frac{1+\mu}{\frac{\mu}{k}-1}$$

und

$$\operatorname{Lim} k\left\{\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right\}=1+\mu.$$

Für das Stattbaben der Convergenz ist also notwendig

$$1+\mu>1$$

oder

$$+\infty>\mu>+1.$$

II. Ist $x=+1$, so wird

$$\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k}=-1.$$

Nach Regel (3) erhalten wir sodann

$$k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right)=k\left(-\frac{k+1}{\mu-k}-1\right)=-\frac{(1+\mu)}{\frac{\mu}{k}-1}$$

und

$$\operatorname{Lim}\left\{k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right)\right\}=1+\mu.$$

Also muss sein

$$1+\mu>0$$

oder

$$+\infty>\mu>-1.$$

Berlin, März 1884.

Dr. A. Börsch,
Assistent im Königl. geodätischen Institut.

7.

Archimedische Kreisquadratur.

Nimmt man nach Archimedes das Verhältniss des Durchmessers zum Kreise wie 7 zu 22 an, ein Wert der vom wahren nur um 4 Zehntausendtel desselben differirt, so verhält sich der Radius zur Seite eines der Kreisfläche gleichen Quadrats wie 1 zu $\sqrt{\frac{22}{7}}$.

Eine recht einfache Construction dieses Verhältnisses möchte wol manchmal von Anwendung sein.

Man trage auf einer Geraden 4 gleiche Strecken $= a$ ab, deren Grenzpunkte $ABCDE$ seien, errichte in D ein Lot, welches von einem um A durch E geschlagenen Kreisbogen in F getroffen werde, ziehe BF, errichte in B auf BF das Lot $BG = BF$ und verbinde F mit G. Dann ist das Quadrat über FG gleich der Kreisfläche vom Radius DF.

Ist der Radius r gegeben, so mache man $FH = r$ zur Strecke auf FD, ziehe HJ parallel DG, wo J Schnittpunkt auf FG. Dann ist FJ die gesuchte Quadratseite.

Die Werte der einzelnen Strecken, sämtlich Seiten rechtwinkliger Dreiecke, ergeben sich einfach. Aus

$$AF = 4a; \qquad AD = 3a$$

folgt

$$DF = \sqrt{7}.a$$

dies verbunden mit $BD = 2a$ gibt:

$$BF = \sqrt{11}.a = BG$$

woraus wieder:

$$FG = \sqrt{22}.a$$

so dass, wie behauptet war,

$$DF : FG = 1 : \sqrt{\frac{22}{7}}.$$

R. Hoppe.

Litterarischer Bericht
V.

Methode und Principien.

Die Mathematik als Lehrgegenstand des Gymnasiums. Eine pädagogische Untersuchung von Joh. Karl Becker, Professor der Mathematik am Gymnasium zu Bruchsal. Berlin 1883. Weidmann. 99 S.

Von J. K. Becker sind in den litt. Ber. 244. 247. 251. 256 bisher 5 Schriften besprochen worden, deren erste bei systematischer Ausführung die Darstellung didaktischer Grundsätze bezweckt, während die 4 übrigen für den Schulgebrauch bestimmt sind. Diese Schriften zeichnen sich (abgesehen von ihrem eigenen Werte) unter andern mathematischen Schulbüchern und didaktischen Schriften dadurch aus, dass sich in ihnen mehr als gewöhnlich die Idee einer Vervollkommung der Methode durch Austrag der differirenden Grundsätze kund gibt, während andere den allgemeinen Standpunkt der Methode als einen bleibend unfertigen unberührt lassen und jedes für sich nur nach den Ansichten des Verfassers und nach den Bedürfnissen der einzelnen Unterrichtsanstalten die beste Wahl zu treffen sucht. Offenbar bietet eine Erscheinung vom erstern Charakter, sofern sie die Fortbildung der Methode zu einer gemeinsamen Arbeit aller Pädagogen macht und einen dauernden Erfolg für die Zukunft anbahnt, dem Interesse der Fachgenossen mehr dar als eine solche letzterer Art, die im ziellosen Wechsel nur eine auf ihren Kreis und ihre Zeit beschränkte Stellung behauptet. Was man jedoch in andern Dingen von einem Autor, dem der bewusste stetige Fortschritt am Herzen liegt, zu erwarten pflegt, die Berücksichtigung der bisherigen Leistungen und Anknüpfung an dieselben, [illegible] Falle

nicht wol ausführbar; der Grund findet sich auch im 4. Abschnitt der gegenwärtigen Schrift einmal kurz ausgesprochen. Ein systematisch ausgearbeiteter Entwurf war vor allem notwendig; einen solchen fand der Verfasser nicht vor; es blieb ihm daher nur übrig selbst einen Entwurf aufzustellen, und als solcher lassen sich seine Schriften betrachten. Ueber diejenigen Punkte, in welchen derselbe teils vom Gewöhnlichen abweicht, teils über bestehende Differenzen entschied, hat sich der Verfasser ausgesprochen und den Fachgenossen Gelegenheit geboten an seinen Aufstellungen Kritik zu üben. Letzteres ist von mehreren Seiten geschehen. Eine Beantwortung der erfahrenen Beurteilungen ist bereits in der Programmarbeit des Verfassers enthalten: Zur Reform des geometrischen Unterrichts, Beilage zum Jahresbericht des Grossherzoglichen Gymnasiums zu Wertheim für das Schuljahr 1879—1880. Diese Arbeit erscheint jetzt nochmals als Anhang zur gegenwärtigen „pädagogischen Untersuchung". Der Gegenstand letzterer ist die, aus einer Vorbetrachtung über die Stellung und den dieselbe begründenden Wert des mathematischen Unterrichts an Gymnasien sich ergebende Frage: Welche Stellung hat unter den Lehrfächern des Gymnasiums speciell die Mathematik einzunehmen, wenn dieses seinen Zweck vollkommen erreichen soll, ohne die Schüler mehr als nötig zu belasten? Sie wird in 2 Fragen geteilt: 1) Welchen Gewinn für die formale Bildung zieht man aus dem Unterrichte in der Mathematik speciell, und inwieweit ist gerade die Mathematik zur Erzielung dieses Gewinnes unerlässlich oder wenigstens zweckmässiger als andere Disciplinen? 2) Welchen realen Gewinn für die Bildung ziehen wir aus dem Studium der Mathematik, und wieviel ist von dem mathematischen Wissen und Können unerlässlich, wenn wir in dem Verständniss unsrer gegenwärtigen Cultur nicht empfindliche Lücken haben wollen? Die Beantwortung führt auf die weitern Fragen: 3) Welche Disciplinen der Mathematik erweisen sich als unerlässlich oder wenigstens als zweckmässig für den Lehrplan des Gymnasiums; und in welcher Ausdehnung müssen sie gelehrt werden? 4) In welcher Methode müssen diese einzelnen mathematischen Disciplinen gelehrt werden, damit a) der Gewinn für die formale Bildung ein grösstmöglicher, b) der Gewinn an notwendigem mathematischem Wissen und Können ausreichend und fest sei, c) die Belastung der Schüler durch diese Disciplinen im richtigen Verhältnisse stehe zu dem erzielten Gewinne? Und wie sind diese Disciplinen auf die einzelnen Classen zu verteilen? — Der formale Gewinn besteht darin, 1) dass der Schüler lernt, die Dinge selbst, nicht blosse Begriffe, richtig wahrzunehmen, zu vergleichen, zu unterscheiden und zu ordnen; selbst Begriffe auf ihre Realität zu prüfen; 2) dass er beobachten lernt, was um ihn vorgeht, und befähigt wird selbständig aus beobachteten Einzelfällen allgemeine Regeln zu abstrahiren und

andre, welche ihm mitgeteilt werden, auf ihre Richtigkeit zu prüfen; 3) dass er nachdenken lernt. Diese Fähigkeiten, die für das Studium der Naturwissenschaften direct notwendig sind, ergänzen auch, abgesehen von der Bedeutung der Mathematik als Hilfswissenschaft, wesentlich die allgemeine Bildung. Mehr als die Arithmetik ist die Geometrie geeignet sie zu entwickeln, und in dieser mehr die Aufgaben als die Beweise förderlich für das Nachdenken. Der reale Gewinn vom mathematischen Unterrichte auf gegenwärtigem Standpunkte ist nach Ansicht des Verfassers, abgesehen von einigen Berufsarten, gering, würde sogar noch geringer werden, wenn man, wie einige wollen, die Steiner'sche projectivische Geometrie an die Stelle der Euklid'schen setzte. Die Frage, ob er sich erhöhen liesse, führt auf den vierten zu erörternden Punkt. Die dritte Frage wird durch wenig mehr als Aufzählung der zweckmässigen Disciplinen erledigt. Bevor noch der formale Gesichtspunkt zur Geltung gebracht ist, hat der reale, rücksichtlich der elementaren Physik, Erd- und Himmelskunde, denen der Verfasser noch das Versicherungswesen hinzufügt, bereits ziemlich so viel gefordert, als der gewöhnliche Gymnasialcursus enthält. Eine mögliche Beschränkung ergibt sich also nicht. Die vierte Frage betreffend die Methode gibt Anlass zu principiellen Erörterungen, welche zugleich als Rechtfertigung des Verfahrens in den Lehrbüchern des Verfassers dienen. In Betreff der Arithmetik wird zuerst erinnert, dass die algebraischen Operationen mit allgemeinen Zahlen nicht als Auswertungen, sondern als Transformationen mit reciproker Anwendung aufzufassen sind, und dass in diesem Punkte selbst die Einteilung der Aufgaben nicht zur falschen Ansicht verleiten sollte. Gegen diese Lehre ist von keiner Seite ein Einwand erhoben worden; in so vielen Lehrbüchern sie auch unbeachtet bleibt, so scheint doch niemand die entgegenstehende alte Gewohnheit verteidigen zu wollen. Der zweite Punkt betrifft die successive Erweiterung des Zahlbegriffs. Die sich derselben anschliessende Methode, welche nach Th. Wittstein's schematischer Aufstellung von den meisten Lehrbüchern dem Grundgedanken nach adoptirt ist, und die wir für die einzig richtige halten, wird hier ohne ein Wort der Rechtfertigung vorausgesetzt. Ihr zufolge werden, wie es nicht anders sein kann, die Operationen zuerst an positiven ganzen Zahlen erklärt und behandelt. In Bezug auf die Reihenfolge der Erweiterungen pflegt man sich nicht an das Schema der Operationen zu binden. Nach dem Schema würden die Negativen vor den Brüchen einzuführen sein, weil die Division später als die Subtraction gelehrt wird. Es empfiehlt sich aber die Negativen später einzuführen, wodurch ein vexirender mehrmaliger Wechsel der Anschauung vermieden wird. Der Verfasser sagt hier davon, man müsse die Abstraction nicht weiter treiben, als unbedingt notwendig ist, und die Begriffe

erst dann erweitern, wenn der Lehrstoff diese Erweiterung verlangt — mit der ganz unbegreiflichen, durch nichts motivirten Aeusserung, er könne darum von der ihm vom Ref. des Archivs „über diesen Punkt" erteilten Belehrung keinen Gebrauch machen. Das Referat über B. Lehrbuch der Arithmetik steht im 244. litt. Ber. S. 41—44. Darin ist gegen das Obige nichts erinnert worden; welche Belehrung der Verfasser meint, ist schlechthin nicht zu erraten. Dagegen verschweigt er die darin erfahrene Misbilligung seines Verfahrens in andrer Hinsicht, dass er nämlich den Begriff der Negativen, der im Vorhergehenden bereits angebahnt war, davon abspringend auf eine neue Basis, auf die der entgegengesetzten Qualitäten stellt, wodurch der Schüler, der die Identität nicht durchschauen kann, unnötigerweise in eine Complication zweier anscheinend verschiedener Begriffe geführt wird — unnötigerweise, denn wenn er den Begriff der Negativen durch entgegengesetzte Qualitäten verdeutlichen wollte, so stand dem nichts entgegen, nachdem der Begriff aus der Transformation von $a-b$ in $-b+a$ abgeleitet war. Dass er den nicht unwichtigen Punkt der Definition der Negativen hier gar nicht erwähnt, lässt vermuten, dass er sein Verfahren, welches statt des allgemeinen und gleichmässigen Begriffs einen speciellen und von Umständen abhängigen gibt, nicht verteidigen will oder wenigstens keinen Wert darauf legt. Es folgt die Besprechung einiger unbedeutenden Punkte. Mit Recht wird die Forderung abgewiesen, die Multiplication nach sogen. neuer Methode zu lehren, d. h. Rechnungsvorteile in die Erklärung einzumischen, was auf ein mechanisches Einüben mit Vernachlässigung des Verständnisses hinauskommt. Wichtiger ist die nachher besprochene Frage nach dem Begriff der Multiplication mit Brüchen. Der Verfasser verteidigt die längst als falsch verurteilte Definition: „a mit b multipliciren heisst aus der Zahl a ebenso eine neue Zahl bilden, wie b aus der positiven Einheit gebildet wird". Er sagt: ein Schüler auf dieser Stufe könne sie nur so verstehen, wie sie gemeint sei. Das heisst doch, er kann sie entweder gar nicht oder so verstehen, und in der Tat ist es ihm durch die Andeutung leicht gemacht die Begriffsbildung ganz zu unterlassen; denn wenn selbst der Lehrer nicht direct zu sagen weiss, wie die „neue Zahl" zu bilden sei, so wird der Schüler nicht klüger sein wollen; letzterem wird die Schwierigkeit zugeschoben, über welche ersterer nicht hinwegkommen kann. Beifügungen zu dem rätselhaften „wie", die der Verfasser vorschlägt, „direct" oder „unmittelbar" würden dem Mangel nicht abhelfen; denn es handelt sich überhaupt um Verstehen, nicht um Vermeidung eines Misverständnisses. Weiter sagt der Verfasser, er kenne nur 2 präcise Definitionen, und diese seien für Obertertianer nicht fasslich. Auch lässt er zu, dass man auf eine Definition verzichte. Da ihm keine der angeführten Auskünfte annehmbar scheint,

so wird es wol dem Ref. gestattet sein, an das nächstliegende Verfahren zu erinnern, welches Becker gar nicht in Betrachtung zieht. Ist die Definition der Multiplication mit ganzen positivem Zahlen $mB = B + B + B + \ldots$ nicht auch für Brüche ausreichend? In der Tat bedarf es nur zur Anwendung der Zuziehung vorherbekannter Sätze, an welche die Schüler mit Nutzen erinnert werden, und die auch für den erweiterten Begriff unentbehrlich sind: 1) Der Multiplicand B ist beliebig benannt. 2) Der Bruch $\frac{m}{n}$ mit beliebiger Benennung ist gleichbedeutend mit der in Einheiten, deren n die ursprüngliche Einheit geben, gezählten Zahl m. Da nun $\frac{B}{n}$ das Zeichen für eine Zahl ist, deren n die Einheit B geben, so ist $\frac{m}{n}B$ nach gewöhnlichem Begriff dasselbe als $m . \frac{B}{n}$. Eine neue Definition ist demnach ganz überflüssig; es bedarf nur einer Erläuterung, damit das Bekannte richtig angewandt wird; eine solche würde aber nach jeder der genannten Definitionen ohnehin nötig sein, und letztere würden die Orientirung eher erschweren. Auch für die Multiplication der Irrationalen ist keine neue Definition, sondern nur Anleitung zum richtigen Gebrauch des Bekannten erforderlich. Zum Bekannten darf man wol rechnen die Darstellung der Irrationalen durch Decimalbruch bis zum beliebigen Grad der Genauigkeit, d. h. den Begriff der unendlich kleinen Differenz. Determinanten in Anwendung auf die elementare Behandlung der Gleichungen einzuführen verwirft der Verfasser, und dem wird man gewiss gern beistimmen, wenn man die detaillirte Ausführung vor Augen hat. So einfach die Determinantentheorie auf allgemeiner Basis ist, so complicirt und unerquicklich gestaltet sie sich, wenn man vom Speciellen aufsteigen will. Soll sie überhaupt auf Schulen gelehrt werden, so gehört sie ihrer Natur nach zur Combinatorik, mithin in die höhere Classe. Die übrige Mitteilung des Lehrgangs, mag sie auch ganz wesentlich für die betreffende Frage sein, können wir hier nicht wiedergeben. Gründe sind zwar für jede Wahl ausgesprochen; doch erscheinen dieselben nicht als entscheidend, solange der beliebten Methode keine andern gegenübergestellt werden, und dazu hätte der Aufsatz weit länger sein müssen.

In Betreff der Geometrie nehmen wir zu dem Wenigen, was dieses Capitel enthält, sogleich die Programmarbeit hinzu, welche die dazu gehörigen Fragen ausführlicher bespricht. Die erste Frage ist nach der Ursache, warum die Schüler so ungleiche Fortschritte in der Mathematik machen. Der Verfasser ist sehr schnell mit der Antwort

fertig: wenn wir nicht annehmen sollen, dass zum Lernen der Mathematik eine besondere, seltene Begabung gehört (dass würde heissen auf alle Erklärung verzichten), so kann nur die Lehrmethode schuld sein. Er hält also den erstern Fall, dass in einer Eigentümlichkeit der Mathematik ein wesentlicher Grund liegt, gar nicht der Betrachtung für wert, sondern lässt ihn beiseite, weil sein Extrem gewiss von niemandem behauptet wird. Dass freilich nur besonders begabte Schüler fähig sind Mathematik zu lernen, scheint nicht wol glaublich. Ob aber eine gewisse natürliche Geistesrichtung und Neigung, wenn auch nicht vorausgesetzt werden muss, so doch das Lernen sehr erleichtert, ist dadurch nicht entschieden, und umsomehr wert zu untersuchen, weil daraus wesentliche Gesichtspunkte für die Methode entspringen. Wir dürfen die Frage nicht übergehen: Was fordert die Mathematik vom Lernenden verschieden von andern Disciplinen? Es lassen sich sogleich 3 Dinge nennen: 1) Das Verweilen im engsten Ideenkreise; denn wer im Kleinen am Unterschiedlichen achtlos vorbeigeht, wird im Grossen kein Auge dafür haben. 2) Die absolute (vom Gemüt unabhängige) Gerechtigkeitsliebe und Unparteilichkeit, welche sich beim Zuviel sowenig beruhigt als beim Zuwenig. 3) Der Ordnungssinn, der Gesetze entdeckt. In diesen Punkten zeigen die Kinder schon im frühen Alter verschiedene, bisweilen entgegengesetzte Neigung; offenbar werden diejenigen, deren Triebe den 3 Forderungen entsprechen, einen grossen Vorsprung in der Mathematik haben. Hieraus erklären sich hinreichend die ungleichen Fortschritte. Becker erwähnt als specifische Eigenschaft der Mathematik nur die, dass sie abstracte Gegenstände habe. Gerade diese Aussage aber, sooft man sie auch hört, ist unzutreffend, und vermutlich der Ausdruck fehlgegriffen; es ist eben ein unüberlegtes, vom Gefühl eingegebenes Urteil. Abstracte Gegenstände haben alle Disciplinen ausser etwa der Geographie und Naturgeschichte. Mag vielleicht damit gemeint sein, dass die Gegenstände moralisch indifferent sind und dem Leben fern stehen; doch auch dies fällt nur darum auf, weil eben solche eine so minutiöse Sorgfalt beanspruchen.

Ist es nun Sache des Unterrichts auch diejenigen Schüler, welche die günstige Neigung nicht mitbringen, für Mathematik zu befähigen, so ist es jedenfalls unerlässlich, dass derselbe die genannten Forderungen selbst erfüllt. Davon abweichen zu wollen ist wol auch seit Euklid niemandem in den Sinn gekommen, bis die Reformbestrebungen an die Oeffentlichkeit traten, in denen namentlich die erste Forderung vielfach ausser Augen gesetzt ward. Da auch die gegenwärtige Schrift von der Reform des mathematischen Unterrichts handelt, so wird das Vorstehende darauf anzuwenden sein. Nennt

man wie gewöhnlich die vor dem Reformzeitalter herrschende Methode die Euklidische, so müsste es doch die nächste Aufgabe für eine Schrift zugunsten der Reform sein, diese Euklidische Methode soweit zu charakterisiren, dass man daraus erkennt, was daran besserungsbedürftig sei. Dass dies bisher alle solche Schriften unterlassen haben, darauf deutet die Angabe der gegenwärtigen hin, welche als hauptsächliche Vorwürfe, die man jener Methode gemacht hat, die unklarst möglichen Aufstellungen anführt. Der erste lautet: Sie gibt kein „innerlich" zusammenhangendes Ganze, sondern eine Fülle von Sätzen, die nur dadurch „äusserlich" verbunden sind, dass der Beweis für die Richtigkeit eines solchen Satzes die Anerkennung des früheren vorausgesetzt. Ist diese Verkettung der Sätze durch die Beweise kein innerer Zusammenhang, und kann man einer beliebigen Menge von Sätzen äusserlich einen solchen verleihen? Sollte die Aeusserung irgend einen vernünftigen Gedanken bergen, so müsste man doch den Denker bitten sich verständlich auszudrücken. Der zweite Vorwurf lautet: Sie gibt überall nur Erkenntnissgründe, wo man Realgründe sucht; d. h. es wird immer nur gezeigt, „dass" ein Lehrsatz richtig ist, während man nirgends Einsicht in den innern Zusammenhang (schon oben gesagt!) der in den einzelnen Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften der Figuren erhält, durch die uns erst klar wird, „warum" er richtig ist. Was mit Erkenntniss- und Realgrund gemeint sei, bedurfte freilich einer Erläuterung. Soll aber die beigefügte den Sinn geben, so wird man erst recht in die Irre geführt. Jeder Beweis gibt doch zunächst das Warum und erst dadurch vermittelt die Gewissheit, dass der Satz richtig ist.. Beide Vorwürfe, sowie sie ausgesprochen werden, sind also nichtig, das Vermisste ist vorhanden, es abzuleugnen wird nicht gelingen. Man wird nicht fehlgehen, wenn man die ganze Unklarheit des Ausdrucks aus dem Wunsche der Verbesserer herleitet, mehr zu sagen als sie aufweisen können. Dass manche Beweise nicht einfach genug sind, dass es an systematischer Ordnung gefehlt hat, und dass durch diese sowol wie durch mancherlei Beziehungen die Uebersicht gefördert werden könnte, sind Vorwürfe, die man versteht, nur geht daraus keine eigentliche Reformfrage hervor; denn Jeder vollzieht die Besserung selbst. Hierzu anzutreiben beabsichtigte man nicht, man wollte das Alte von Grund aus verwerfen, hatte aber nichts ihm gegenüberzustellen und musste daher zu einem so kläglichen Appell an die Sympathie der Menge seine Zuflucht nehmen. Der Verfasser lässt uns ungewiss, ob die von ihm angeführten 2 Vorwürfe zugleich seine eigenen sind; wollte er sie aber nicht vertreten, so durfte man wol eine Klarstellung oder Abweisung von ihm erwarten. Als Ersatz dafür weist er nun auf das Vorbild der Steiner'schen Methode hin, welche das ganze Gebiet der elementaren Sätze mit einem Blicke überschauen lehrt.

Wenn eine solche Leistung für die projectivische Geometrie möglich sei, so dürfe man nicht daran verzweifeln ein gleiches auch für die Anfänge der Geometrie zu erreichen. Damit also deutet der Verfasser, ohne den Euklidischen Standpunkt charakterisirt zu haben, an, dass sich doch ein höherer Standpunkt der Methode denken lasse. Doch in diesem Gedanken liegt von vorn herein ein Widerspruch. Nehmen wir an, wie in der Tat manche Lehrer aussagen, nach Steiner'schem Vorbild die Anfänger mit bestem Erfolge unterrichtet zu haben, die Schüler seien wirklich ohne Mühe zu einem so umfassenden Ueberblick gelangt; dann werden sie vergleichsweise in der Lage dessen sein, der zum erstenmal einen Fabrikraum betritt und das ganze Getriebe von einem Punkte aus überschaut, der aber, wenn er mit Arbeit und Maschinen nicht vorher im einzelnen bekannt geworden ist, keine Ahnung davon hat, was alles bedeutet. Sie werden unter den vielen Beziehungen die wesentlichen und notwendigen nicht unterscheiden können, manches zur Anwendung erforderliche wol gar nicht kennen lernen. Eben dieses Notwendige und zwar dieses allein gibt die Euklidische Methode und erfüllt damit die erste Forderung, die des Verweilens im engen Ideenkreise. Es ist ein Widerspruch, mit dieser Forderung das Streben, gleich anfangs den Blick zu erweitern, verbinden zu wollen; eins arbeitet dem andern entgegen.

Sehr oft lässt sich die Meinung vernehmen, das Festhalten an der Euklidischen Methode beruhe allein auf dem alten Herkommen. Nun sind aber nach Becker's Rechnung die Reformgedanken bereits 70 Jahre lang tätig. Wie geht es dann zu, dass noch keine wesentlich abweichende Bearbeitung entschiedene Anerkennung gefunden hat? Obgleich längst widerlegt, ist es immer von neuem das genannte Vorurteil, wodurch sich die Reform meistens einzuführen sucht. Jede fängt von neuem mit derselben Lästerung an und schliesst mit demselben Miserfolg. Die Reform würde auf einem weit klarerem Boden stehen und mehr Achtung gewinnen, wenn sie mit der Frage begönne: Welche Eigenschaften der Euklidischen Methode müssen festgehalten werden, damit der mathematische Unterricht seinen Zweck nicht verfehle? Der Verfasser legt sich diese Frage nicht vor, ist vielmehr gleich von Anfang und im allgemeinen und ganzen gegen Euklid eingenommen, zeigt sich aber offen für die Lehren seiner eigenen Erfahrung, welche ihn doch Punkt für Punkt dem Euklid näher führen. Er verteidigt die Darstellungsform, welche den Lehrsatz zu Anfang stellt und den Beweis folgen lässt, und gesteht, dass ihn die Uebereinstimmung in diesem Punkte günstiger für Euklid gestimmt habe. Diese Form ist doch also schon eine Eigenschaft der Methode, von der wir nicht abgehen dürfen. Auch ist dies nicht die einzige Concession: auch seine Erklärung, dass die projectivische

Geometrie nicht an die Stelle der Euklidischen zu setzen ist, zeigt indirect, das letztere manches besitzt, was wir nicht ohne weiteres fallen lassen können. Ein Punkt, und zwar ein wichtiger, ist dagegen im Programm nicht berührt, steht aber in Beziehung zu einer Stelle in der gegenwärtigen Schrift. Diese empfiehlt, den streng wissenschaftlichen geometrischen Unterricht erst in Obertertia zu beginnen und ihm in Quarta und Untertertia einen propädeutischen Unterricht vorhergehen zu lassen, der sich, um es kurz zu sagen, auf äussere Beobachtung beschränkt, die dabei bemerkten Eigenschaften der Figuren nicht beweist. Ob dieses Vorgehen zu einem guten Ziele führt; muss erst die Erfahrung zeigen. Hier ist es jedenfalls sehr einseitig erwogen, indem bloss in Betracht gezogen wird, dass abstracte Gegenstände leichter von ältern Schülern gefasst werden, leitende Gesichtspunkte gar nicht aufgestellt sind, ein Lehrbuch unnötig sein soll, weil ja der nachherige strenge Cursus alles mangelnde ergänze. Was dabei ausser Acht gelassen ist, liegt nahe genug. Werden die Schüler leichter über den Berg hinwegkommen, nachdem sie zwei Jahre lang vor demselben Halt gemacht haben? Werden sie, nachdem sie bereits eine Menge geometrischer Gegenstände kennen gelernt und sich oberflächliche Begriffe angeeignet haben, geneigter und fähiger sein, noch einmal Winkel, Dreieck u. s. w. rücksichtlich logischer Beziehungen anzusehen, ohne dass ein wirklicher realer Zuwachs an Kenntnissen die Mühe lohnt? Keinem Lehrer kann wol die Bemerkung entgehen, dass Schüler in den ersten Jahren des Unterrichts jeden neuen Lehrgegenstand ohne Unterschied was ihnen geboten wird mit gleicher Spannung aufnehmen. Wird diese Zeit mit Verweilen bei den einfachsten Figuren benutzt um sie mit dem zur Folgerung notwendigen Beziehungen vertraut zu machen, so wird man keinem Widerwillen begegnen. Später werden sie wählerischer, der Gegenstand scheint ihnen zu armselig; da ist die zum präcisen Zuwerkegehen erforderliche Geduld für sie eine schwere Aufgabe. Diese wird schon an sich um so abschreckender, je weiter sie ohne Präcision fortgeschritten waren; nun kommt aber noch die Zumutung hinzu, dass sie beim Beweis nicht allein die vorhergehenden Sätze wissen, sondern dieselbe auch von den aus dem propädeutischen Unterricht bekannten Sätzen unterscheiden sollen, die hier keine Geltung haben. Wenn der Verfasser eine Methode des propädeutischen Unterrichts kennt, welche von allen diesen Nachteilen frei ist, so wird er ein neues Problem lösen, indem er davon Rechenschaft und dazu Anleitung gibt. Bis jetzt hat man die Nachteile nur durch äusserste Beschränkung des Umfangs so gut als möglich zu verringern gesucht.

Die Schrift wendet sich nun zu den Recensionen der citirten

Bücher des Verfassers. Die in diesem Archiv enthaltenen sind ziemlich reichlich bedacht worden. Die Hauptstellen sind in extenso mitgeteilt, und die Antwort darauf übergeht keinen Punkt mit Stillschweigen. Gleichwol ist die Behandlung der Fragen nicht der Art, dass sie dem Aufwand entsprechend den Zweck fördern könnte; sie ist mehr darauf gerichtet durch dialektische Kunstgriffe die Entscheidung hinauszuschieben und für diesmal noch dem Urteil zu entgehen als die Sache zu klären. Die erste Antwort beginnt mit einem persönlichen Ausfall gegen den Recensenten, indem sie demselben ein Dogma von vermeintlich unfehlbarer Wahrheit zuschreibt — wol nur um dem zuvorzukommen, dass man vom Verfasser ein gleiches sage. Es handelte sich um die Bedeutung der Axiome der Geometrie. Der Verf. erklärt sie für unmittelbar einleuchtende Sätze; hat aber an einer Stelle geäussert, dass man bei oberflächlicher Betrachtung für einleuchtend halten könne, was nicht einmal wahr sei. Der Ref. glaubt nicht an die Untrüglichkeit jener Divination, welche ohne bewussten, angebbaren Grund Urteile als sicher aufstellt, und hat nach Hinweis auf des Verf.'s eigene Mahnung zur Vorsicht an einem weitern Beispiel aus dessen Lehrbuch (Axiom III.) gezeigt, welcher Täuschung eine solche Divination ausgesetzt ist. Kann man hier von einem Dogma reden, so ist es nicht vom Ref., sondern vom Verf. aufgestellt und ohne Widerlegung des Entgegenstehenden festgehalten worden; der Zweifel daran kann doch kein Dogma sein. Jetzt verkehrt der Verf. zur Verteidigung alle Aussagen in ihr Gegenteil. Zunächst soll die obige Aeusserung nur von Fällen der Unachtsamkeit gelten, und unter „oberflächlich" verstehe er überhaupt „unachtsam". Ob jemand das für gleichbedeutend hält, sei dahingestellt; im Bericht ist beides unterschieden berücksichtigt. Der wörtliche Inhalt des dem Ref. zugeschobenen Dogmas lautet nun: „dass alle unmittelbare Erkenntniss nur oberflächlich sein könne". Dies sagt der Verf., wol zu merken, in seiner abweichenden Wortdeutung. Oberflächlich nennt man aber, wie das Wort selbst sagt, die Urteile, die auf das äussere Anschauen des Nächstliegenden hin ohne eingehendes Studium, ohne gründliche Untersuchung gefällt werden; es schliesst nicht aus, dass dieses Anschauen alles treu aufnimmt, was sich ihm darbietet. Da es nun ein Widerspruch ist, unmittelbar evident zu nennen, was auf gründlicher Untersuchung, ja überhaupt auf Ueberlegungen beruht, so war wol der obige Satz selbstverständlich. Auch war bis dahin dem Ref. durch keinen Einwand dagegen ein Anlass geboten ihn zu verteidigen. Erst jetzt hat der Verf. in der Wortdeutung ein Mittel gefunden ihn anzufechten. Was er von Verketzerung sagt, ist aus der Luft gegriffen; diese Beschuldigung möchte er doch mit Worten des Berichts belegen. Doch trotz jener Umdeutung und gerade durch die Verkehrung der Auf-

stellungen verfällt er weiterhin in den genannten Widerspruch, dem er durch erstere entgehen wollte. Ref. hatte vom Axiom III. ausgesprochen, dass es bei oberflächlicher Betrachtung für evident gehalten werden könnte. Der Verf. erwidert jetzt: allerdings könnte es bei oberflächlicher Betrachtung bezweifelt (!) werden, doch nach gewissen Ueberlegungen — es werden deren eine längere Reihe aufgeführt, die schwerlich der Schüler von selbst anstellt, und deren jede wieder neue Fragen hervorrufen würde — würde die Richtigkeit des Axioms einleuchten. Ist nach allen diesen Ueberlegungen das Axiom noch unmittelbar evident?

Das übrige bedarf wol nur kurzer Antwort. In Betreff der Bemerkung über kürzeste Distanz (welche keiner Ansicht des Verf. entgegentritt) sei gern eingeräumt, dass sie an unrechter Stelle angebracht war und wol deshalb nicht verstanden worden ist. Das Wort „mithin" mag nicht als folgernd gemeint sein; liess es sich aber nicht entbehren, um so schlimmer. Die Auffassung der Axiome als Hypothesen verwirft der Verfasser in der Besorgniss, dass dadurch den Schülern die Lust zu weiterer Forschung geraubt würde. Sie sollen ihre „anschaulich evidente Erkenntniss" solange für zuverlässig halten, bis ihnen die Möglichkeit des Irrtums gezeigt wird. Sollte man meinen, dass in unsern Zeiten, wo die Erfolge der auf wissentlich fehlbare Hypothesen bauenden Forschung, die auf keiner aprioristischen Basis zu gewinnen waren, bekannt sind, sich jenes alte Vorurteil noch könnte hören lassen! Wenn der Verf. meint, über der Controverse sei der übrige Inhalt seiner Schrift übersehen worden, so ist das ein Irrtum; das Vielteilige eignet sich einmal weniger zur Besprechung, und einzelne Punkte, auf dier er besonders Wert legte, hatte der Verf. nicht hervorgehoben. Hoppe.

Vermischte Schriften.

American Journal of Mathematics. J. J. Sylvester, Editor. Thomas Craig, ph. Dr., Assistant Editor. Published under the Auspices of the Johns Hopkins University. Volume VI. Baltimore 1884.

Der Inhalt des 6. Bandes ist:

A. Cayley: Note über eine Teilungsreihe.

Th. Craig: Ueber vierfache Thetafunctionen. — Ueber gewisse Gruppen von Relationen, denen jene genügen. — Ueber Thetafunctionen mit complexen Charakteristiken.

A. L. Daniels: Zwei Noten über Weierstrass' Theorie der elliptischen Functionen.

G. S. Ely: Die graphische Methode angewandt auf zusammengesetzte Teilungen.

Dr. F. Franklin: Note über die Entwickelung eines algebraischen Bruches.

A. S. Hathaway: Einige Aufsätze über die Zahlentheorie.

M. Hermite: Ueber eine Formel bezüglich auf die Theorie der Functionen einer Variabeln.

G. W. Hill: Ueber gewisse mögliche Kürzungen in der Berechnung der langperiodischen Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes infolge directer Einwirkung der Planeten.

E. W. Hyde: Rechnung der Richtung und Lage.

M. Jenkins: Beweis eines Satzes über Teilungen. — Fernere Liste der Correctionen zu Prof. Sylvester's constructiver Theorie der Teilungen.

W. W. Johnson: Die imaginäre Periode der elliptischen Functionen.

E. McClintock: Ueber die Lösungen der Gleichungen 5. Grades.

P. A. Mac Mahon: Semivarianten und symmetrische Functionen. — Note über die Entwickelung eines algebraischen Bruches. — Symmetrische Functionen der Wurzeln einer Gleichung 13. Grades.

H. A. Rowland: Ueber die Fortpflanzung einer beliebigen elektromagnetischen Störung, über sphärische Lichtwellen und die dynamische Theorie der Diffraction.

Ch. H. Smith: Eine graphische Methode der Lösung sphärischer Dreiecke.

W. E. Story: Ueber die absolute Classification der quadratischen Oerter und ihre Schnitte mit einander und mit linearen Oertern.

J. J. Sylvester: Vorlesungen über die Principien der allgemeinen Algebra.

C. A. van Velzer: Zusammengesetzte Determinanten.

G. P. Young: Principien der Lösung von Gleichungen höhern Grades, nebst Anwendungen. — Lösung lösbarer Gleichungen 5. Grades. H.

Acta Mathematica, Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 4. Stockholm 1884. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der Inhalt des 4. Bandes ist:

P. Appell: Ueber die Functionen dreier reeller Variabeln, die der Differentialgleichung $\Delta F = 0$ genügen.

C. A. Bjerknes: Hydrodynamische Untersuchungen. 1. Die hydrodynamischen Gleichungen und die ergänzenden Relationen.

G. Cantor: Von der Mächtigkeit vollkommener Gesamtheiten von Punkten.

G. Darboux: Ueber die partielle Differentialgleichung 3. Ordnung der orthogonalen Systeme.

E. Goursat: Beweis des Cauchy'schen Satzes.

Ch. Hermite und L. Fuchs: Ueber eine Entwickelung in Kettenbruch.

Sophie Kowalevski: Ueber die Reduction einer bestimmten Classe Abel'scher Integrale 3. Ranges auf elliptische Integrale.

E. Laguerre: Ueber einige Punkte der Theorie der numerischen Gleichungen.

L. Matthiessen: Untersuchungen über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels gegen einander und gegen einen Hauptstrahl.

G. Mittag-Leffler: Ueber die analytische Darstellung der monogenen einförmigen Functionen einer unabhängigen Variabeln. — Neuer Beweis des Laurent'schen Satzes.

H. Poincaré: **Ueber die Gruppen der linearen Gleichungen.**

L. Scheffler: **Beweis des Laurent'schen Satzes.**

N. Sonine: **Ueber die Verallgemeinerung einer Formel von Abel.**

Chr. Zeller: **Zu Euler's Recursionsformel für die Divisorensummen.**

H.

Litterarischer Bericht
VI.

Physik.

Die Physik im Dienste der Wissenschaft, der Kunst und des praktischen Lebens. Unter Mitwirkung von Dr. J. von Bebber, Abteilungsvorstand auf der deutschen Seewarte in Hamburg; C. Grahwinkel, kais. Postrat in Frankfurt a. M.; Dr. E. Hartwig, Assistent an der Univ. Sternwarte in Strassburg; Dr. E. Lommel, Professor an der Univ. Erlangen; Dr. F. Melde, Prof. an d. Univ. Marburg; Dr. J. Rosenthal, Prof. an d. Univ. Erlangen; Th. Schwartze, Ingenieur in Leipzig; Dr. A. v. Urbanitzky, Assistent an d. techn. Hochschule zu Wien; Dr. H. W. Vogel, Prof. an d. techn. Hochschule zu Berlin; Dr. J. H. Wallentin, Prof. am Obergymnasium im IX. Bezirk in Wien; herausgegeben von Dr. G. Krebs, Oberlehrer an der Musterschule (Realgymnasium) zu Frankfurt a. M. Stuttgart 1883. Ferdinand Enke.

Das Werk behandelt eine Anzahl solcher physikalischer Entdeckungen, welche in neuerer Zeit durch die ausgedehnteste Anwendung bekannt geworden sind. Es gibt in den folgenden 13 Aufsätzen deren Erfindungs- und Fortbildungsgeschichte und so viel von der Theorie und Technik, als zum Verständniss des Zusammenhangs erforderlich ist, mit einigen eingelegten Holzschnitten. Die Titel der Aufsätze sind: Vogel: Im photographischen Atelier. Lommel: Spectrum und Spectralanalyse. Krebs: Eine meteorologische Station. Bebber: Auf der deutschen Seewarte. Rosenthal: Heizung und Ventilation. Melde: Die Akustik in ihren Hauptbeziehungen [illegible]schen Instrumenten. Schwartze: Die Motoren des

Kleingewerbes. Urbanitzky: Die elektrischen Maschinen. Wallentin: Kerzen und Lampen. Urbanitzky: Der Kampf des elektrischen Lichtes mit dem Gaslichte. Wallentin: In der galvanoplastischen Werkstätte. Grahwinkel: Die Telephonie und ihre Verwendung im Verkehrsleben der Gegenwart. Hartwig: Auf der Sternwarte.

H.

Die Spannungs-Elektricität, ihre Gesetze, Wirkungen und technischen Anwendungen. Von K. W. Zenger, o. ö. Professor der Physik an der k. k. böhm. techn. Hochschule in Prag. Mit 86 Abbildungen. Pest, Leipzig (1884). A. Hartleben. 252 S.

Das Buch gibt genau das, was der Titel sagt. Es eignet sich zur Selbstbelehrung ohne Rücksicht auf Studium und Beruf. Der Inhalt ist selbstverständlich.

H.

Die Generatoren hochgespannter Elektricität mit vorwiegender Berücksichtigung der Elektrisirmaschinen im engeren Sinne. Von Dr. Ignaz G. Wallentin, k. k. Professor. Mit 75 Abbildungen. Wien. Pest, Leipzig (1884). A. Hartleben. 271 S.

Auch dieses Buch ist, wie das vorige, zur Selbstbelehrung ohne Rücksicht auf Studium und Beruf eingerichtet. Seine Aufgabe besteht darin, die Apparate in erforderlicher Vollständigkeit zu beschreiben und ihre Wirkungsweise darzulegen. Unter diesen werden nach einander behandelt: die Reibungselektrisirmaschinen, die Elektrisirmaschinen, welche auf den Principien der Influenz und des Transportes der Ladungen beruhen, Apparate nach dem Princip der Metallinductoren, Inductionsapparate als Generatoren hochgespannter Elektricität, Accumulatoren, die rheostatische Maschine. Hierbei werden keine Kenntnisse des Gegenstandes vorausgesetzt, sondern die zum Verständniss erforderlichen Begriffe vorher erläutert, weiterhin auch das zur Messung der Kräfte gehörige Verfahren gelehrt.

H.

Die physikalischen Grundsätze der elektrischen Kraftübertragung. Eine Einleitung in das Studium der Elektrotechnik. Von Josef Popper, Mit einer Figurentafel. Wien, Pest. Leipzig (1884). A. Hartleben. 55 S.

In dieser Arbeit war der Verfasser bestrebt, das theoretisch so interessante und praktisch so wichtige Problem der elektrischen Kraftübertragung in seiner grössten Allgemeinheit als elektrischen

Transport von Energie überhaupt — in gründlicher und systematischer Weise zu behandeln, um dem Physiker, Elektrotechniker, wie auch dem Unternehmer die Kenntniss aller jener Factoren zu verschaffen, die bei diesem Problem massgebend sind. Um diesen Zweck zu erreichen, wird zuerst eine allgemeine Uebersicht über die verschiedenen Arten von Kraftübertragung überhaupt gegeben, sodann gezeigt, welche Grössen speciell bei dem elektrischen Transport von Arbeit gemessen werden müssen, und welche physikalische Bedeutung denselben zu Grunde liegt; dabei wird der allgemeine Arbeitsbegriff und der sonst so schwierig zu erfassende Begriff des Potentials in leichtfasslicher Weise von der elementaren Mechanik angefangen bis hinein in das Capitel der statischen und dynamischen Elektricität gleichartig durchgeführt und hiedurch auch die Bedeutung der elektrischen Maassmethoden principiell klargelegt. Gegen Schluss der Arbeit werden die für den Elektrotechniker und Unternehmer wichtigen Betrachtungen über die Oekonomie des Betriebes, Ausnützung des Anlagecapitals, Einfluss der Distanzen, der Spannungen u. s. w. in conciser Weise zusammengefasst, so dass sich Jedermann auch von Fall zu Fall ein Urteil zu bilden vermag über jene Umstände, von welchen das Ergebniss einer elektrischen Kraftübertragung abhängt, und welche näheren Detailstudien stets zu machen sind, um eine solche Anlage geschäftlich calculiren zu können. Zur noch grösseren Erleichterung des Verständnisses wird schliesslich der bisher am vollständigsten studirte und gemessene Fall einer elektrischen Kraftübertragung durchgeführt und unter Zugrundelegung des Diagrammes dazu benützt, jede einzelne der conventionell bezeichneten Grössen vor das Auge zu führen und die allgemeinen Begriffe und Betrachtungen an einem speciellen Falle zu illustriren. Nach dem Studium dieser Arbeit wird wohl Jeder eine gründliche Einsicht in das Problem der elektrischen Kraftübertragung gewonnen haben und mit Leichtigkeit im Stande sein, dessen weitere Entwicklung mit selbständigen Urteil zu verfolgen

A. Hartleben's Verlag.

Diesem Urteile treten wir vollkommen bei.

Die Redaction.

Analytische Theorie der Wärme. Von M. Fourier. Deutsche Ausgabe von Dr. B. Weinstein. Mit 21 in den Text gedruckten Holzschnitten. Berlin 1884. Julius Springer. 476 S.

Die Uebersetzung der „Théorie de la chaleur" vertritt zugleich mit dem in Breslau erschienenen unveränderten Abdruck eine neue Ausgabe des Werks, welche lange Zeit gefehlt hat, besitzt aber vor

dieser den Vorzug, dass darin nach sorgfältiger Revision der analytischen Rechnungen die zahlreichen Druckfehler des Originals beseitigt sind. In der Abfassung ist nichts geändert, nur haben einige Hinzufügungen stattgefunden: die kleinern Teile haben Ueberschriften erhalten, hin und wieder ist der Calcul des leichtern Verständnisses wegen erweitert, und den Reihenentwickelungen sind überall die Grenzen der Gültigkeit hinzugeschrieben. Anmerkungen sind selten; die Litteratur ist am Schlusse zusammengestellt. Das Originalwerk ist bekannt als bahnbrechend für mathematische Behandlung der Physik, es hat die dazu dienenden Mittel der Analysis bedeutend vermehrt durch die Theorie der trigonometrischen Reihen. Es behandelt die Bewegung der Wärme, hauptsächlich in festen Körpern nebst Ein- und Austritt unter äusseren Einflüssen. Die Hauptabschnitte sind folgende. Nach einer Einleitung, welche die analytische Gestaltung der physikalischen Gesetze vollzieht, kommt: Gleichungen für die Verbreitung der Wärme; Verbreitung in einer unendlichen rechteckigen Halbplatte; variirende Bewegung in einem Ringe; radiale Verbreitung in einer Kugel; desgl. in einem unendlich langen Cylinder; stationäre Bewegung in einem einseitig unendlich langen rechteckigen Prisma; Bewegung in einem Würfel; Diffusion der Wärme; allgemeine analytische Ergebnisse über Integration von Differentialgleichungen und Darstellung von Functionen; Analyse und Grundlage der Wärmetheorie. H.

Das internationale elektrische Maasssystem im Zusammenhange mit anderen Maasssystemen dargestellt von F. Uppenborn, Ingenieur, Redacteur des Centralblattes für Elektrotechnik. (Enthält die Beschlüsse der beiden Pariser Congresse (1881 und 1884) nebst genauer Erläuterung von deren Consequenzen.) 2. Auflage. München und Leipzig 1884. R. Oldenbourg. 26 S.

Das elektrische Masssystem beruht auf dem mechanischen. Obwol man diese Grundlage als bekannt und feststehend zu betrachten pflegt, so war es doch nicht überflüssig eine eingehende Erörterung derselben vorausgehen zu lassen. Einesteils lässt die Wahl der Einheiten Verschiedenheit zu, über welche Entscheidung und Definition erfordert wird: andernteils kommen auch Zweifel über Begriffe vor. Der Umstand, dass das Gewicht meistens auf eine Frage nach der Masse antwortet, verleitet sehr stark dazu den Urbegriff des Gewichts als einer Kraft preiszugeben. Dem ist hier vorgebeugt durch Hinweis auf die Erklärung des Congresses, welche das Grammgewicht als Kraft bezeichnet und die es repräsentirende Masse Grammmasse nennt. Die fundamentalen Einheiten sind nun Centimeter C, Gramm-

masse G und Secunde S. Auf sie werden die fernern mechanischen Einheiten der Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, der Arbeit und des Effectes reducirt. Die davon abweichenden technischen Einheiten sind dann aufgeführt. Von den elektrischen Masssystemen werden das elektrostatische und elektromagnetische behandelt. Die Masseneinheit der Elektricität wird durch das Coulomb'sche Gesetz bestimmt, die Stromeinheit aus Faraday's Relation hergeleitet. Ausführliche Erklärung bedurfte die Einheit der elektromotorischen Kraft. Zu diesen kommen für das elektromagnetische Masssystem hinzu die Widerstandseinheit und die Einheit der Capacität. Das Fernere handelt von den gesetzlichen Bestimmungen und Congressbeschlüssen. H.

Zeitschrift zur Förderung des physikalischen Unterrichts. Herausgegeben und redigirt vom Physikalisch-technischen Institut, Lisser u. Benecke. Erster Jahrgang 1884. Berlin 1884. Lisser u. Benecke.

Diese neue Zeitschrift, welche seit October v. J. in monatlichen Heften erscheint, hat sich vor allem zur Aufgabe gemacht Apparate zu Demonstrationszwecken, deren Verfertiger die Herausgeber selbst sind, und demonstrative Experimente anzugeben. Solche sind auch die Gegenstände der Aufsätze, mit welchen sich eine Anzahl Physiker, besonders Lehrer der Physik an dem Unternehmen beteiligt haben. H.

Vermischte Schriften.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Udgivet af Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars. II. III. IV. V. VI. VII. Bind. Kristiania 1877—1882. Alb. Cammermeyer.

Ueber den Anfang dieser Zeitschrift s. litt. Ber. 243. S. 37. Der 2. bis 7. Band enthält an mathematischen Abhandlungen:

S. Lie: Neue Integrationstheorie der Monge-Ampère'schen Gleichung. — Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen. — Eine Eigenschaft der Steiner'schen Fläche 3. Classe und 4. Ordnung. — Ueber reelle algebraische Minimalflächen. — Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen. I. Ueber reelle algebraische Minimalflächen. — Theorie des Pfaff'schen Problems 2. — Kleiner Beitrag zur Theorie der Steiner'schen Fläche. — Theorie der Transformationsgru[illegible] IV. V. 3. 4. — Sätze über Minimal-

flächen, II. III. 3. — Bestimmung aller in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung $s = 0$. 4. — Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. 4. 5. — Weitere Untersuchungen über Minimalflächen. 4. — Ueber Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind. 4. — Bestimmung aller Flächen constanter Krümmung. 5. — Discussion der Differentialgleichung $s = F(z)$. 6. — Transformationstheorie einer partiellen Differentialgleichung. 6. — Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Classe linearer partieller Differentialgleichungen. 6. — Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen. 6. — Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden. 7. — Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten. 7. — Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. 7.

S. A. Sexe: Wie man die imaginäre Grösse vermeidet. 4. — Sollte sich nicht ein reeller mathematischer Ausdruck finden lassen, der die Rolle der imaginären Grössen übernehmen und dieselben Dienste leisten könnte wie diese Grössen? 7. —

H. Geelmuyden: Die konische Pendelbewegung. 5. — Bemerkungen über die Theorie des Zodiakallichtes. 7.

Elling Holst: Ueber algebraische cykloidische Curven. 6. — Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Curven. 7. — Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes. 7. — Ein Par synthetische Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen. 7.

J. J. Åstrand: Ueber eine neue Methode zur Lösung trinomischer Gleichungen $n$ten Grades. 6. H.

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. Francesco Gomes Teixeira, Professor de mathematica na Universidade de Coimbra, Socio correspondente da Academia Real das sciencias de Lisboa e da Sociedade de sciencias physicas e naturaes de Bordeaux. Volume III. IV. Coimbra 1881—1883. Imprensa da Universidade.

Der 3. und 4. Band enthalten folgende Abhandlungen.

A. Schiappa Monteiro: Ueber eine im Journal de mathématiques élémentaires (herausgeg. zu Paris von Bourget u. Koehler) gestellte Aufgabe. — Lösung der Aufgabe 17. — Note bezüglich auf descriptive Geometrie über den Schnitt der Flächen 2. Grades. — Lösung der Aufgabe 16. — Note über die Strictionslinie des Hyperboloids. — Lösung der Aufgaben 15. 14. — Ueber die Teilung

der Geraden und des Kreises in gleiche Teile, bezüglich auf eine Aufgabe von Marecas Ferreira. — Note über die Erzeugung eines Kegelschnitts mittelst des Kreises oder eines andern Kegelschnitts und über andere geometrische Untersuchungen.

L. F. Marrecas Ferreira: Ueber ein geometrisches Problem.

J. A. Martins da Silva: Ueber die Transformation der Legendre'schen Function X_n in ein bestimmtes Integral. — Ueber die directe Reduction einer Classe vielfacher bestimmter Integrale. — Beweis eines Satzes von Besge. — Note über die Transformation eines bestimmten Integrals. — Ueber einige neue Formeln bezüglich auf die Wurzeln der algebraischen Gleichungen. — Lösung der Aufgabe 21.

F. Gomes Teixeira: Vorlesungen über die Principien der Infinitesimalrechnung. — Ueber die Multiplication der Determinanten.

Pedro Gomes Teixeira: Ueber einige arithmetische Sätze.

A. F. Rocha Peixoto: Ueber einen Satz bezüglich auf ebene Schnitte des Ratationskegels.

J. M. Rodrigues: Ueber eine Formel von Wronski. — Ueber die Theorie der Facultäten. — Ueber eine Formel von Euler. — Ueber eine Formel von Lagrange.

Breusing: Ueber die Geschichte des Nonius.

M. Birger Hansted: Verallgemeinerung der Legendre'schen Function X_n.

F. da Ponte Horta: Einige Eigenschaften der Kegelschnitte.

Duarte Leite Pereira da Silva: Ueber einige unbestimmte Integrale. — Derivirte beliebiger Ordnung von y nach x für $f(x, y) = 0$.

J. C. O'Neil de Medeiros: Ueber ein Problem der elementaren Algebra.

Ausserdem sind 7 neue Aufgaben, Nr. 18—24., gestellt, und einige Nachrichten über erschienenen Bücher gegeben. H.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XI. Amsterdam 1884. J. F. Sikken.

Der Inhalt des 11. Bandes an Abhandlungen ist folgender.

L. Janse Bz: Ueber die graphische Auflösung der sphärischen Dreiecke und darauf gegründete nautische und astronomische Aufgaben.

P. van Geer: Die Methode von Roberval.

D. Bierens de Haan: Zwei seltene Werke von Benedictus Spinoza. — Ein äusserst seltenes Werk von Albert Girard, „Invention nouvelle en l'algèbre."

F. J. van den Berg: Ueber die geometrische Verbindung zwischen den Wurzelpunkten einer Gleichung und denen ihrer derivirten.

Ferner sind mitgeteilt ein Beweis des Ptolemäischen Satzes, welchen ein Schüler 4. Classe der höhern Bürgerschule in Tiel gefunden hat; ein Beweis der Formel für die Anzahl der Combinationen, von W. Mantel; und die in den Winterversammlungen der Wiskundig Genootschap in Amsterdam verhandelten Themata.

H.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Correspondent de l'Académie royale de Belgique, etc. et J. Neuberg, Professeur à l'Université de Liége, Membre de la Société royale des sciences de Liége, etc avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Tome quatrième, année 1884. Gand 1884. Ad. Hoste. Paris, Gauthier Villars.

Der 4. Band enthält folgende Abhandlungen.

P. Mansion: Abriss der Theorie der hyperbolischen Functionen. — Aus dem Leben von W. Snel. — Der 200ste Jahrestag der Erfindung der Differentialrechnung. — Curven mit Verzweigungspunkt. — Erfindung der Differentialrechnung.

Barbarin: Sätze über die Ellipse. — Aufgaben über die Kugel

E. Catalan: Ueber einen Satz von Abel.

Angelo Genocchi: Zusammenstellung verschiedener Untersuchungen über die Ovalen von Descartes und einige andre Curven.

De Rocquigny: Arithmetische Aufgaben.

Gelin: Algebraische Aufgaben.

M. d'Ocagne: Ueber die centralen Transformationen der ebenen Curven.

J. Mister: Schwerpunkt einer abgestumpften dreiseitigen Pyramide. — Schwerpunkt des schräg abgeschnittenen Prismas und Parallelepipeds.

E. Césaro: Untersuchung über Transversalen. — Wahrscheinlichkeit gewisser arithmetischer Facta. — Ueber die innere Gleichung der Curven.

H. Brocard: Aufgaben. — Geometrische Eigenschaft einer gewissen Gruppe von 2 Systemen concentrischer Kreise.

H. Schoentjes: Ueber die Erzeugungsart der Conchoide.

Radicke: Ueber die Summen der gleichhohen Potenzen einer Reihe von Cosinus.

E. Lemoine: Verschiedene Sätze über die Antiparallelen der Seiten eines Dreiecks.

Weill: Ueber ein Zweieck und ein Dreieck aus Kreisbogen gebildet.

Boije af Gennäs: Aufgabe der unbestimmten Analytik.

Ausserdem enthält der 4. Band Lösungen vieler in den vorhergehenden gestellten Aufgaben und 100 neue Aufgaben, Nr. 301 bis 400. Von diesen gesondert sind Examenaufgaben. H.

Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Nr. 3. 4. 1883. 1884. — 18 + 39 S.

Aus den Vorträgen sind folgende Gegenstände von Interesse hervorzuheben.

F. H. Reitz: Ueber die ins Werk gesetzte Verbindung der Dreiecksnetze von Spanien und Algier.

Ahlborn: Ueber Connexe und Coincidenzcurven.

E. Liebenthal: Untersuchungen über die Attraction zweier homogenen Körper.

Plath: Ueber die Wiederauffindung des Planeten Sylvia. Hierbei die Zusammenstellung der von 1687 bis 1881 erhaltenen 20 Werte für die Masse des Jupiter.

F. H. Reitz: Ueber den Hohmann-Coradi'schen Flächenintegrator.

J. F. Bubendey: Ueber die Constantenbestimmung der Functionen durch Wahrscheinlichkeitsrechnung bei stark abweichenden Einzelwerten.

P. Jaerisch: Ueber die Kritik der Anwendbarkeit der Gleichungen der Elasticitätstheorie. — Ueber anomale Dispersion.

Reitz: Ueber das Periheliotrop, Instrument zur Erleichterung des Auffindens neuer Dreieckspunkte durch Sonnenlichtblitze.

Schubert: Ueber die Ausdehnung des Begriffs der 7 arithmetischen Operationen von höherer als 3. Stufe.

Ahlborn: Ueber die Beziehung der elliptischen Functionen zur Geometrie.

Wagner: Ueber die Abbildung ebener Curven und Flächenstücke.

Krüss: Ueber die Verwertung der Resultate photometrischer Messungen.

Bock: Ueber die Entwickelung von Functionen in unendliche Producte.

Ahlborn: Ueber die Bedeutung der Zahl p in den Abel'schen Functionen und ihre Beziehung zur Geometrie.

H. Schubert: Ueber eine gewisse Familie von Configurationen. — Die $n$dimensionalen Verallgemeinerungen des 3dimensionalen Satzes, dass es 2 Strahlen gibt, welche 4 gegebene Strahlen schneiden.

P. Jaerisch: Lösungen der Elasticitätsgleichungen von der Form

$$f(t, x, y, z) \cos(at + a_1 x + a_2 y + a_3 z)$$ H.

Association Française pour l'avancement des sciences. Congrès de Lille 1884. Congrès de la Rochelle 1882. Paris, au secrétariat de l'Association.

Wie aus einem Auszug aus den Statuten zu ersehen, ist die Association Française eine dauernd bestehende Gesellschaft, der Jeder durch Anmeldung bei dem Conseil beitreten kann, mit einem Capital in Teilen zu 500 Francs. Sie unterscheidet Gründer, die wenigstens einen solchen Teil zeichnen, und Mitglieder mit jährlichem Beitrag von 20 francs. Ueber die Congresse in den einzelnen Städten Frankreichs und die aus denselben hervorgehenden Publicationen sind keine nähern Angaben gemacht. Zwei solche Publicationen liegen dem Ref. vor; eine dritte aus dem Congress zu Algier 1881 ist bereits im 275. litt. Bericht besprochen. Die gegenwärtigen sind verfasst von M. E, Lemoine, Ingénieur civil, Ancien élève de l'École polytechnique. Die erste behandelt die Peaucellier'sche Vorrichtung, welche mittelst eines lenkbaren Gestänges bei Führung eines Punkts im Kreise einen andern Punkt in gerader Linie bewegt, ein Princip welches im Auslande mehr bekannt sei als in Frankreich. Die zweite, bestehend aus 2 Arbeiten, leitet 17 neue Dreieckssätze her.

H.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 3me série, t. I.—V. 1881—1883. Bruxelles, F. Hayez.

Die 5 ersten Bände der 3. Reihe enthalten folgende mathematische Arbeiten nebst Referaten über dieselben.

C. Le Paige: Note über die Theorie der Polaren. — Ueber gewisse Covarianten. 1. — Ueber die Curven 3. Ordnung. 1. 3. 4. — Ueber die Theorie der binären Formen für mehrere Reihen von Variabeln. 2. — Ueber die geometrische Darstellung zweier einförmigen Transformationen. 3. — Ueber einige einförmige geometrische Transformationen. 4. — Note über die Homographie 3. Ordnung. — Ueber die Flächen 2. Ordnung. 5.

P. Samuel: Note über ein Instrument zur Beschreibung von Ellipsen. 1. 2.

Folie (gemeinsam mit Le Paige): Ueber die Curven 3. Ordnung. 1. 3.

Catalan: Ueber die Legendre'schen Functionen X_n. — Magisches Quadrat von la Villa Albani (Rom). 2. — Ueber die Addition der ellliptischen Functionen 1. Gattung. — Einige Sätze der elementaren Geometrie. 4. — Note über die Theorie der Kettenbrüche und gewisse Reihen. — Ueber eine Doppelreihe. 5.

Dernyts: Note über die algebraischen Flächen mit mittlerer Krümmung null. 2.

Gomes Teixeira: Ueber eine Classe von Gleichungen mit partiellen Differentialquotienten 2. Ordnung. 2. — Integration einer Classe von Gleichungen mit partiellen Differentialquotienten 2. Ordnung. 3.

Mansion: Fundamentales Princip betreffend die Berührung von Flächen, welche eine gemeinsame Erzeugende haben. 3. — Ueber einen Punkt der Theorie der Fourier'schen Reihen. 5.

E. **Weyr:** Ueber die Involutionsflächen. 4.

Boblin: Teilung eines Winkels oder Bogens in 3 progressive und proportionale Teile. 4. — Ueber die Verdoppelung des Kubus. 5.

Genocchi: Ueber die Functionen von Prym und Hermite. 4. 5.

Sautreaux: Versuch der Anwendung der Geometrie mit polygonalen und polyedrischen Coordinaten auf die Lösung der Gleichungen 3. und 4. Grades. 4.

Ronkar: Versuch der Bestimmung der Trägheitsmomente des Erdsphäroids. 5.

De Tilly: Ueber den Satz von Chasles bezüglich auf Centralaxen. 5.

Wilmart: Lösung des Euklid'schen Postulats. 5. H.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling natuurkunde. Tweede reeks. Achttiende deel. Amsterdam 1883. Johannes Müller.

Der 18. Teil enthält folgende mathematische Abhandlungen.

Ch. M. **Schols:** Berechnung des Abstandes und Azimuts aus Länge und Breite. — Ueber den Anschluss eines Dreiecksnetzes von niederer Lage an 3 Punkte eines höhern.

W. **Kapteyn:** Einige Bemerkungen über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen.

D. **Bierens de Haan:** Baustoffe für die Geschichte der mathematischen und Natur-Wissenschaften in den Niederlanden.

J. **Bueno de Mesquita:** Allgemeine Gleichungen für ein centrirtes Linsensystem.

D. J. **Korteweg:** Allgemeine Sätze betreffend die stationäre Bewegung einer incompressibeln, reibenden Flüssigkeit. H.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures and condition of the Institution for the year 1881.—1882. Washington 1883—1884.

Der Report enthält unter der Ueberschrift: „Record of recent scientific progress" einen übersichtlichen Bericht über die jährlichen extensiven Fortschritte in der Erforschung der materiellen Tatsachen. Dieser Teil des Buchs umfasst etwa die Hälfte des Raumes. Der Bericht erstreckt sich auf folgende Wissenschaften: Astronomie, Meteorologie, Physik, Chemie, Botanik, Zoologie und Anthropologie. Die Theorie wird in keiner derselben berührt, daher ist auch die Mathematik gänzlich ausgeschlossen. Es handelt sich allein um neue Beobachtungen und deren Mittel. H.

Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Vol. IV. V. Published by the co-operation of the Smithsonian Institution. Washington 1881. 1883.

Aus dem Namen „philosophische Gesellschaft" würde man geneigt sein zu entnehmen, dass dieselbe der Pflege der ideellen, theoretischen Wissenschaft gewidmet sei, daher der Mathematik eine vorwaltende Stelle eingeräumt werden müsse. Die Statuten sprechen überhaupt nicht vom Zwecke der Gesellschaft, sondern nur von der Verwaltung, sie beschränken die Gegenstände der Verhandlungen und Publicationen durch keine Festsetzung, nicht einmal auf wissenschaftliche. Die Verhandlungen deuten auf ein gleiches Interesse für ideelle und reale Wissenschaft; das ideelle Interesse lassen die einleitenden Fragen erkennen, auch tritt es in dem ehrenvollen Andenken an den ihr zugehörenden Mathematiker Peirce hervor. Wenn nun gleichwol die Resultate aller publicirten Vorträge auf blosse Ausdehnung materieller Kenntnisse gerichtet sind, so leitet eine Aeusserung von S. Newcomb in einem Vortrag „über die Beziehung der wissenschaftlichen Methode zum socialen Fortschritt" auf eine Erklärung des Umstandes. Er findet, dass in Amerika eine weit grössere Trennung zwischen Wissenschaft und praktischem Leben als in der übrigen civilisirten Welt gemacht wird, nur schreibt er die geschilderte Ansicht dem gemeinen Manne, nicht dem Gelehrten zu. Ohne Zweifel ist aber auch letzterer nicht von diesem Einflusse frei. In Amerika findet die Realwissenschaft auf ihrem bekannten Standpunkt ohne theoretische Vertiefung so viel Verwertung, dass das ideelle Studium nicht daran denkt etwas nützliches zu schaffen und sich sorglos beliebigen Speculationen hingibt. Im vorliegenden Falle kommt weiter hinzu, dass die grosse Ausdehnung des bearbeiteten Feldes jede Concentration unmöglich macht. In den am je zweiten Sonnabend stattfindenden Sitzungen würde ein theoretischer Vortrag ganz vereinzelt bleiben. H.

Atti della R. Accademia dei Lincei anno CCLXXXI. 1883—84. Serie terza. Transunti. Volume VIII. Roma 1884.

In diesem Bande sind folgende mathematische Abhandlungen oder deren Analysen enthalten.

A. Violi: Die Moleculargeschwindigkeiten der luftförmigen Körper.

S. Robert Paolo: Warum die Gletscher zurückgehen.

G. Trattini: Ueber einige Sätze in der Theorie der Substitutionen. — Die Gruppen zu k Dimensionen.

Ascoli: Die Grenzcurven einer Varietät von Curven.

P. Blaserna: Ueber die der Eisperiode entsprechende Temperatur.

A. Capelli: Ueber die Zusammensetzung der Substitutionsgruppen.

F. Brioschi: Ueber eine Classe von Curven 4. Ordnung.

A. Lugli: Ueber die barometrische Höhenmessung.

C. Segre: Ueber die Theorie der Classification der Homographien in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen.

V. Volterra: Ueber das Gleichgewicht der biegsamen und nicht dehnbaren Flächen. — Ueber ein elektrostatisches Problem.

F. Bonatelli: Von einigen psychologischen Schwierigkeiten, die sich mittelst des Begriffs des Unendlichen lösen.

G. Mengarini: Methode der Bestimmung des Ohm in absolutem Masse. H.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen herausgegeben von Dr. Otto Böklen, Rektor der Realanstalt in Reutlingen. Heft I. 1884. Tübingen 1884. Franz Fues. 94 S.

Diese neue Zeitschrift ist zum Organ der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Reallehrerversammlung bestimmt. Jährlich erscheint ein Heft in gleichem Umfange. Das erste enthält 13 Aufsätze, welche zum grössten Teil der reinen Mathematik ohne Beziehung zur Schule angehören; zum Schluss einen litterarischen Bericht mit kurzer Besprechung neu erschienener Werke. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

VI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, M., üb. d. sogenannten Seqt. d. aegypt. Mathematiker. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

Methode und Principien.

Harms, F., Metaphysik. Hrsg. v. H. Wiese. Breslau, Köhler. 2 Mk. 40 Pf.

Secchi, A., die Einheit d. Naturkräfte. Ein Beitr. z. Naturphilosophie. Uebers. v. R. L. Schulze. 2. Afl. 5. Lfg. Leipzig, Frohberg. 2 Mk.

Siemens, Sir W., üb. d. Erhaltung der Sonnen-Energie. Uebers. v. C. E. Worms. Berlin, Springer. 4 Mk.

Weyrauch, J. J., das Princip v. der Erhaltg. d. Energie seit Mayer. Zur Orientirung. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Sammlungen.

Dölp, H., Aufgaben zur Differential- u. Integralrechnung. 4. Afl. Giessen, Ricker. 3 Mk. 40 Pf.

Heis, E., Sammlg. v. Beispielen u. Aufg. aus d. allg. Arithmetik u. Algebra. 66. Afl. Köln, DuMont-Schauberg. 3 Mk.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Sammlg. a. allen Zweigen der Rechenkunst etc. 141–155. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Kraft, F., Sammlg. v. Problemen d. analyt. Mechanik. 5. u. 6. Lfg. Stuttgart, Metzler's Verl. à 2 Mk.

Lieber, H. u. F. v. Lühmann, geometr. Konstructions-Aufgaben. 7. Afl. Berlin, Simion. 2 Mk. 70 Pf.

Litterarischer Bericht
VII.

Methode und Principien.

Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Von Dr. G. Frege, a. o. Professor an der Universität Jena. Breslau 1884. Wilhelm Koebner. 119 S.

Der Hauptinhalt der Schrift ist Kritik von Meinungen. Sie ist nicht nur die vorzüglichste Leistung, sondern auf ihr wurzelt auch alles übrige. In ihr offenbart sich die seltene Begabung des Verfassers, in durchweg verständlicher Sprache strenge und gründliche Prüfung darzulegen, und das von den äussern logischen Formen freie, auf die Natur des Gegenstands gerichtete Urteil; hier begegnet man auch häufig genug Bemerkungen von Interesse. Wenn sich von der Entwickelung der eigenen Ansicht d.s Verfassers nicht ein gleiches sagen lässt, so ergeht es ihm, wie vielen andern Schriftstellern. Die eigene Ansicht ist nicht das Ergebniss einer unabhängigen Untersuchung, sondern nimmt nur das Plätzchen ein, welches der Verfasser nach Verwerfung einer Reihe fremder Urteile als intact hat ausfindig machen können. Gehen wir jetzt das Einzelne durch. In der Einleitung rechtfertigt der Verfasser das Unternehmen, über das Wesen der Zahl eine Untersuchung anzustellen, und zwar dadurch, dass Gelehrte darüber abweichend urteilen. Der Grund möchte wol nicht ausreichend sein, denn dasselbe geschieht oft, wo die Frage schon völlig erledigt ist; überdies kommt es darauf an, ob sie notwendig ist oder doch zur Klärung beiträgt. Letztere Untersel kennt die Schrift nicht; bei aller Schärfe der hier geübt

steht dieselbe noch auf dem Standpunkte, wo ihr die Fähigkeit zu urteilen als Endziel der Erkenntniss erscheint, unbekümmert darum, ob uns das Urteil einen Schritt weiter bringt, wo insbesondere von einer Definition nur gefordert wird, dass die irgend woher zusammengesuchten und ausprobirten Bedingungen alles unter den Begriff fallende ein-, alles andere ausschliessen, gleichviel ob sie mit der Bedeutung des Begriffes etwas zu tun haben oder ihr fremd sind. Der Begriff ist einem solchen Logiker nicht eine Errungenschaft, sondern ein vorgefundenes Stück, das er in Arbeit nimmt, wie der Chemiker das Fossil oder den Meteorstein. Bezeichnend in dieser Beziehung ist die Auslassung der Einleitung auf Seite III. Der Verfasser nennt es betrübend und entmutigend, dass schon errungene Erkenntnisse wieder verloren gehen, weil sich die Schuldoctrin mit ihrer „rohen" Auffassung des Zahlbegriffs begnügt und die von Herbart gegebene Richtigstellung als überflüssig bei Seite lässt, ein Schicksal das hiernach wol auch sein Untersuchungsergebniss treffen werde. Da der Verfasser dem Gedanken nicht Raum giebt, dass die angeblichen Verbesserer die Schuld ganz oder zum Teil selbst tragen, so muss hier an Folgendes erinnert werden, was die Erscheinung wol genügend erklären wird. In der Entwickelungsgeschichte der exacten Begriffe, die der Verfasser gänzlich ignorirt, lassen sich 3 Stadien unterscheiden: 1) bis zur objectiven Gestaltung der Vorstellungen und Begriffe, 2) bis zur Gewinnung exacter Fundamentalbegriffe, 3) von da an die Theorie bis zum heutigen Standpunkte umfassend. Jedes Stadium schliesst mit einer deutlichen, entschiedenen Leistung, die mit der Elimination aller der Merkmale verbunden ist, die im neuen Stadium ausser Anwendung kommen. Als hervorragende Beispiele mögen genannt werden im ersten Stadium die Elimination der ophthalmocentrischen Data bei Bildung des Körper- und Raumbegriffs, im zweiten die Elimination der individuellen Unterschiede bei Bildung des Gattungs- und Zahlbegriffes, durch welchen die articulirte Sprache bedingt ist, im dritten die Elimination des Grössenursprungs in Zahl und Ausdehnung bei Bildung der Begriffe der Analysis. Die Mathematik der Schule bewegt sich im dritten Stadium und setzt die Erzeugnisse des zweiten voraus, wenn auch der Unterricht vielleicht propädeutisch auf das zweite zurückgreift und in Definitionen und Axiomen das Erworbene formulirt. Was eliminirt ist, hat auf den Fortgang der zu lehrenden Theorie keinen Einfluss. Der Anfänger weiss, dass er Aepfel und Glockenschläge mit Hülfe derselben Begriffe (der abstracten 1, 2, 3, etc.) zählen kann, und begegnet beim Erlernen der Arithmetik keiner fundamentalen Lücke seines Wissens. Wenn nun Frege von ihm eine befriedigende Antwort auf die Fragen, was Einheit und was Zahl sei, verlangt, so sind wir doch gewiss ebenso berechtigt ihn zu fragen, was die von ihm geforderten

Urteile über Einheit und Zahl, wie er und Herbart sie geben, zur Bildung beitragen. Wenn Frege geltend macht, dass wir keine blossen mechanischen Rechner ausbilden wollen, so ist doch hinzuzufügen: auch keine Conversationslexika. Nicht bloss richtig, sondern auch instructiv müssten die Urteile sein sie müssten einen Schritt zum Ziele der Erkenntniss, nämlich dem Ziele, das Gegebene im Geiste zu beherrschen, enthalten, wenn der Tadel begründet sein sollte, dass die Schule — oder, um dem Verfasser nicht eine ihm ganz fremde Specialbeziehung zuzuschreiben — die intelligente Menschheit dargebotene Erkenntniss von sich weise und die Forschung vergeblich mache. Treten wir der Sache näher, so wird sich zeigen, dass der Verbesserer Punkt für Punkt, indem er eine vulgäre Vernachlässigung rügt, sich selbst einer weniger verzeihlichen schuldig macht. Die Frage, warum wir es nicht dabei bewenden lassen können, die Bedingungen des Fortschritts einer Fachwissenschaft, wie hier der Arithmetik, zu erfüllen, lässt er unberührt, obwol seine Ansicht darüber nicht so ganz gleichgültig sein würde. Es genügt wol anzuführen, dass die Theorie nicht den Inhalt des Geisteslebens ausmacht, und die Beziehungen der Wissenschaftszweige unter einander und zum Leben eine rückgängige Untersuchung ihrer Principien und damit das Studium der Erkenntniss überhaupt fordern. In diesem Sinne mag die Auffassung der Zahl, welche von der allgemeinen Erkenntnisslehre keine Notiz nimmt, eine rohe genannt werden. Indes verleihen doch der Beschränkung auf das dritte Stadium die unausgesetzten Erfolge eine gewisse Rechtfertigung. Der Logiker dagegen, welcher jene Vernachlässigung rügt und es betrübend und entmutigend nennt, nirgends Sinn für principielle Revision zu finden, und doch, wo es eben auf Gründlichkeit ankäme, seinerseits wieder das erste Stadium ignorirt, indem er nur den objectiven, fertigen Begriff, nicht aber seine Entwickelung und seinen Zweck der Betrachtung für wert hält, möchte schwerlich irgend welche Erfolge seiner logischen Doctrin aufweisen, die ihm keine Zeit liessen über die Grenzen des zweiten Stadiums weiter zurück zu gehen. Im Gegenteil hat diese doctrinäre Logik, deren Sätze aus roher Empirie hervorgehen, aber vom Autor für ewige Denkgesetze ausgegeben werden, weil er nicht anders denken kann, die also aus dem Unvermögen, statt auf ihre Incompetenz, auf die Gewissheit schliesst, nur mehr und mehr Schwierigkeiten gehäuft, statt sie zu lösen — vergl. das etwa 6 Seiten lange Resultat, welches Baumann aus seiner Zusammenstellung der Lehren der Philosophen über Raum und Zeit zieht. In der Tat nimmt sie den ungünstigsten Standpunkt ein, wo sie sich nach unten und nach oben den Blick verschliesst, und darum aller Orientirung entbehrt. Fand also der Verfasser in der Bestimmung des Zahlbegriffs eine Schwierigkeit, so war es zu-

nächst die, sich im Finstern nicht zu stossen. Der Arithmetiker empfindet sie nicht, weil er der Frage den Rücken zukehrt. Aber auch der begegnet keiner Schwierigkeit, welcher die Entwickelung des Begriffs von Anfang an verfolgt. Jedenfalls ist es sehr begreiflich, dass von keiner Seite eine Nachfrage nach der angeblichen Lösung stattfindet, wo sie von der einen leicht entbehrt, von der andern leicht vollständig gegeben werden kann.

Folgende Stelle der Einleitung p. V. scheint auf das Vorstehende Bezug zu haben. „— — Eine gründliche Untersuchung des Zahlbegriffs wird immer etwas philosophisch ausfallen müssen. Diese Aufgabe ist der Mathematik und Philosophie gemeinsam. Wenn das Zusammenarbeiten dieser Wissenschaften trotz mancher Anläufe von beiden Seiten nicht ein so gedeihliches ist, wie es zu wünschen und wol auch möglich wäre, so liegt das, wie mir scheint, an dem Ueberwiegen psychologischer Betrachtungsweisen in der Philosophie, die selbst in die Logik eindringen. Mit dieser Richtung hat die Mathematik gar keine Berührungspunkte, und daraus erklärt sich leicht die Abneigung vieler Mathematiker gegen philosophische Betrachtungen.“ Dies bestätigt zum Teil direct das Gesagte: der Mangel an Erfolgen der philosophischen Mitwirkung wird eingeräumt. Dass der behauptete Grund davon gerade der entgegengesetzte ist, legt jene unklare Begriffsmischung der doctrinären Logiker an den Tag, welche Mittel und Wege der Erkenntniss von ihrem Product nicht unterscheiden können. Allerdings hat die Mathematik als fertiges Product mit psychologischer Betrachtungsweise nichts zu tun; denn dass dasselbe vollkommen objectiv sei, ist eben die Forderung der Wissenschaft. Aber die ganze Arbeit, welche das Product schafft, die Wahl der Transformationen, die Bildung geeigneter Begriffe, die Beweise, überhaupt alles, was einen Zweck verfolgt, sind ihrer Natur nach psychische Vorgänge; wer darüber principiell und allgemein urteilen will, darf gegen die psychische Natur des Gegenstandes nicht blind sein, und das ist es doch, was der Verfasser mit der Abweisung der psychologischen Betrachtung schlechthin fordert. Der doctrinäre Logiker pflegt in der Täuschung befangen zu sein, er könne der Ueberzeugungskraft der Beweise bestimmte Formen der Schlüsse unterlegen. Er wird aber nicht gewahr, dass er sich auf das Allersubjectivste und noch dazu das Unwissenschaftlichste stützt: auf den Glauben an die unverstandene Wunderkraft der Schlussformen und auf seine eigene Unfähigkeit anders zu denken. Hat nun der Verfasser richtig bemerkt, dass die logischen Fragen in neuerer Zeit mehr und mehr psychologisch in Angriff genommen werden, so kann man wol zugeben, dass dies Untersuchungsgebiet dem rein theoretischen Arithmetiker ferner liegt als das der formalen Logik; nur er-

klärt der Umstand nicht, wie die dahin einschlagenden Arbeiten einem gedeihlichen Zusammenwirken hätten im Wege stehen können, wenn die formale Logik sich zu annehmbaren Leistungen fähig gezeigt hätte. Die Schuld an deren Unvermögen schiebt der Verfasser auf die, welche gar nicht daran beteiligt sind.

Nach der Einleitung beginnt die Schrift, nochmals einleitend, mit einer Erörterung der Begriffe „analytisch, synthetisch, apriori, aposteriori". Es ist dies ein Thema, welches gewohnheitsmässig vor jeder logischen Untersuchung behandelt zu werden pflegt, obgleich leicht zu bemerken ist, dass die betreffenden Fragen müssig aufgeworfen werden, indem im weiteren nichts darauf Bezug hat. Im Vorliegenden ist nur eine charakteristische Aeusserung zu erwähnen; zuerst die sehr richtige und sonst wenig beachtete Bemerkung: „Aus einzelnen Tatsachen folgt nichts". Hieraus aber schliesst der Verfasser: „Wenn man überhaupt allgemeine Wahrheiten (poetischer Ausdruck statt: richtige Sätze) anerkennt, so muss man auch zugeben, dass es solche Urgesetze gibt, die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind". Wie defect dieser Schluss ist, liegt am Tage: es fehlt jeder Grund der Ausschliessung weiterer Möglichkeiten. Was dem Bauer unbegreifliches begegnet, muss sein Kobold getan haben. Ebenso stellt sich die obige Aeusserung dar: die Urgesetze sind nur ein Name, der substituirt wird, wo die Erklärung fehlt. Was eine ganz einfache Betrachtung des Zugrundeliegenden ergibt, ist folgendes. Da der Mensch, ohne Wissen geboren, zu allgemeinen Erkenntnissen gelangt, und aus den erlebten Tatsachen nichts folgt, so muss es andre intellectuelle Tätigkeiten geben ausser dem Schliessen. Diese sind denn auch leicht aufzuweisen und bekannt genug: Ordnen, Scheiden, Combiniren, Setzen von Merkzeichen u. s. w. Sie behaupten nichts, sind daher unbestreitbar und bedürfen keines Beweises, führen aber zur Entdeckung ausschliessender Gegensätze, der Basis sicherer Schlüsse, zu der Orientirung, die vor Irrtum mehr schützt als alles andre. Wem es an Orientirung fehlt, dem ist selbst der Identitätssatz eine Quelle von Irrtümern.

Jetzt folgt die Kritik von Meinungen einiger Schriftsteller, zuerst über die Natur der arithmetischen Sätze. Hier, wo sich der Verfasser in der günstigen Lage befindet, ohne Verbindlichkeit für Berichtigung und Lösung nur Mängel fremder Versuche anzeigen zu müssen, zeigt er sich in den engen Grenzen der formulirten Fragen gut orientirt und lässt weder formell noch substantiell den gehörigen Einblick vermissen. Ein Zweifel bleibt nur, ob nicht eben diese Beschränkung eine Misdeutung des Autors enthält. Die erste Frage ist: Sind die Zahlformeln beweisbar? Dass der Beweis für $3+2=5$,

auf blosse recurrente Definition von 2, 3, 5 gestützt, eine Lücke enthält, wird keiner Einwendung begegnen. Wenn hingegen der Verfasser der Behauptung Mill's, dass die Definitionen der Arithmetik beobachtete Tatsachen enthalten, mit der Frage entgegentritt: welche beobachtete Tatsache in der Definition der Zahl 777864 behauptet wird; wenn er ferner es misslich nennt, einen grundsätzlichen Unterschied zwischen kleinen und grossen Zahlen zu machen, so scheint doch alles Verständniss für empirische Erkenntniss zu fehlen. Nehmen wir den Fall, jemand lese eine unendliche Reihe, welche wie oft geschieht durch Angabe der Anfangsglieder ausgedrückt ist; dann wird er in der Tat das millionste Glied auf Grund einer Beobachtung erkennen, aber nicht wie der Verfasser meint der analogen Beobachtung eben dieses Gliedes, sondern etwa des 2ten und 3ten Gliedes, so viele deren genügen das Gesetz des Fortschritts daraus zu entnehmen. Hier ist wirklich ein Unterschied zwischen kleinen und grossen Zahlen vorhanden; die Theorie ist davon frei, aber für ihre Basis ist dieses psychische Element unentbehrlich. Ebenso genügt die Beobachtung an kleinen, vorstellbaren Zahlen zur Entdeckung, dass zur recurrenten Begriffsbestimmung die Specialität der Zahl nicht mitwirkt, mithin zur Gewinnung eines Begriffs von unbegrenzter Ausdehnung. Da Frege, wie aus vielen Aeusserungen hervorgeht, kein Werden der Begriffe kennt, so ist ihm erklärlicherweise der Fall nicht in den Sinn gekommen, dass bei Bildung eines homogenen Begriffs zwischen Anfang und Vollendung ein heterogener Geistesact als notwendiges Glied eintreten, der einfache Begriff auf zusammengesetztem Boden stehen könne, obwol dieser Fall, wie z. B. bei der Function a^x, bekannt genug ist. Frege nennt es ein Vorurteil von Mill, dass alles Wissen empirisch sei. Nach seiner Logik ist es also ein Vorurteil, dass man erklären kann, was er als auf einem Urwissen beruhend unerklärt lässt: analog ist es dann auch ein Vorurteil der Baumeister, dass man Häuser bauen kann! Gewöhnlich aber spricht man von Vorurteil, wo eine Meinung der Erkenntniss hinderlich ist, und das trifft gewiss zu bei Frege's Meinung über die empirischen Wissenschaften, deren wesentliches logisches Organ er irrigerweise im Inductionsschluss sieht, denn diese hindert ihn von der erfolgreichen Logik der Empirie Kenntniss zu nehmen. Aus dem Mitgeteilten lässt sich nicht beurteilen, ob Mill eine richtigere Auffassung der Empirie besass; denn das Wesentliche darin würde doch bei der Wiedergabe unbeachtet geblieben sein. Dass Mill für jede Zahl eine besondere Beobahtung fordere, ist nur Frege's Conjectur aus unzureichenden Gründen, von Mill nicht ausgesprochen.

Die ferneren Fragen sind folgende: Sind die Gesetze der Arith-

merk [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible]: [illegible] Fragen über [illegible] [illegible]
schaft der äusseren Dinge? Ist sie etwas subjectives? [illegible]
und Eins: Drückt das Zahlwort [illegible] eine Eigenschaft von [illegible]
ständen aus? Sind die Einheiten einander gleich? Ueberall [illegible]
Untersuchung bei aller Vielseitigkeit an demselben Mangel, an dem
Ausseracktlassen der Genesis. Aus vielen Argumenten kommt
heraus, dass die Anzahl, soviel sie auch subjective Seiten [illegible]
doch objectiv sei. Das war nun eigentlich durch die [illegible] der
Arithmetik vorher bekannt. Vermischt man aber mit diesem auf das
dritte Stadium bezüglichen Urteile solche aus den früheren Stadien,
so darf man sich nicht wundern, wenn manches [illegible]
kommt. Ein Fall derart liegt vor, wo der Verfasser bei Abschluss
der Kritik fremder Meinungen die restirende Schwierigkeit findet,
wir müssten denselben zufolge den Einheiten zwei widersprechende
Eigenschaften beilegen: die Gleichheit und die Verschiedenheit. In
der Tat ist die Verschiedenheit im ersten Stadium [illegible]
Motiv zum Zählen, im dritten die Gleichheit der Einheiten [illegible] Ge-
genstand der Theorie; die Verschiedenheit ist im [illegible] Be-
griff climinirt, ein Widerspruch weder da noch hier [illegible]
der Ueberschrift: „Lösung der Schwierigkeit [illegible]
folgende Urteile über die Zahl [illegible]
vorhergeh[illegible] [illegible] [illegible]
Weise wie Farbe. [illegible]
in dem [illegible]
sikal[illegible]
steht [illegible]
Viel[illegible]
[illegible]

schlechthin eine Lösung versprochen hat. Aber diese Erklärung folgt nicht, sie scheint vergessen zu sein; denn nachdem die Schrift in Betrachtungen und Erwägungen noch einige Seiten fortgefahren hat, ist einmal, dann öfters von der Ansicht des Verfassers, als wenn sie vorher ausgesprochen wäre, die Rede. Soviel sich nun aus dem, was zu ihrer Verteidigung gesagt wird, entnehmen lässt, besteht die gedachte Ansicht darin, dass die Zahl als Merkmal am Gattungsbegriff haftet, so dass z. B. die Begriffe Jupitersmond, Angehöriger des deutschen Reichs sich verändern, wenn bzhw. ein fünfter entdeckt, ein neuer geboren wird — Beispiele die der Schrift entlehnt sind. Für diese Ansicht werden allerhand Bestätigungen zusammengesucht, ohne auch nur das Allerbekannteste zu erwähnen, womit sie im Widerstreit steht. Schon aus der Grammatik, wenn sie auf die logischen Verhältnisse etwas näher eingeht, ist bekannt, dass Gattung und Zahl zwei sich einander ergänzende Begriffe sind, deren Leistung durch ihre Sonderung, durch die Fähigkeit unabhängig von einander zu variiren bedingt ist. Dasselbe lehrt der gewöhnliche Gebrauch. In der Isolirung der Bestandteile, welche einzeln variiren können, liegt der Fortschritt der Erkenntniss, indem daraus der constante Bestandteil, der sich als dauernder Begriff festhalten lässt, gewonnen wird. Diesen Forschritt, und damit die ganze Bedeutung der Begriffe Gattung und Zahl macht der vorliegende Versuch zunichte. Erwähnt mag noch sein, dass der Verfasser die Null als diejenige Zahl definirt, welche einem in der Wirklichkeit nicht repräsentirten, vielleicht sogar unsinnigen Begriffe als Merkmal zugehört. Das Genannte wird wol zur Genüge gezeigt haben, dass der Verfasser sehr mit Unrecht die Arithmetiker getadelt hat, welche von seiner Belehrung keinen Gebrauch machen. Hoppe.

Der Grenzbegriff in der Elementar-Mathematik. Von Heinrich Vogt, Programm des Königl. Friedrichs-Gymnasiums zu Breslau 1885. 53 S.

In der Einleitung sagt der Verfasser, das Vorhandensein von Axiomen sei für die Elementarmathematik keine Schwierigkeit; denn der Anfänger könne begreifen, warum sie notwendig sind. Dagegen gebe es Schwierigkeiten in den Grundbegriffen, namentlich im Begriff der Grenze. Es ist schon auffällig, dass er den Doppelsinn dieses Wortes nicht gleich bei erster Nennung hebt, noch mehr aber, dass er wirklich in beiderlei Sinne von Grenze spricht, als ob es dieselbe Sache wäre, so dass man kaum umhin kann anzunehmen, das ihn der gleiche Terminus dazu verführt hat zwei ganz unähnliche Begriffe zu mischen. Dieser Umstand allein würde ihm Grund genug

[illegible] können, Schwierigkeiten da zu finden, wo keine sind. Doch kommen weitere Denkfehler hinzu, die auch bei gehöriger Scheidung bestehen bleiben. In der Einleitung ist mit Grenze offenbar die Gegenwart gemeint. Gleich im Anfang des 1. Abschnitts: „Die geometrischen Grundbegriffe" — handelt es sich um die Fläche als Grenze zwischen zwei Raumteilen. Der Verfasser versucht zu beweisen, dass die Grenzfläche undenkbar sei, begeht aber dabei einen so groben logischen Fehler, dass auch nicht ein Schein von Bündigkeit entsteht. Er fragt: Gehört die Grenze einem von beiden Raumteilen oder beiden oder keinem von beiden zu? — überflüssigerweise, denn dass sie beiden zugehört, ist jedermann geläufig; die andern Fälle sind wol nur zur Ablenkung der Aufmerksamkeit herbeigezogen. Beiden, sagt er, könnte die Grenze nicht angehören, denn als verschiedene Raumteile könnten sie nicht etwas gemeinschaftliches haben. Wie will der Verfasser das jemandem einreden? Haben nicht zwei Brüder ihren Vater, zwei Löffel in einem Kasten diesen Kasten gemeinschaftlich? Hiernach scheint es, als ob der Verfasser Haben und Sein verwechselt. Oder sollen wir vielleicht Unausgesprochenes ergänzen? Hat er etwa mit Zugehören gemeint: als Teil zugehören? Dann würde man sogleich antworten: Die Fläche ist kein Teil eines Raumes; wer ihren Begriff erklären will, darf ihn nicht subsumiren wollen, denn wenn das gienge, so wäre der Flächenbegriff unnütz, und das widerlegt die Geometrie. Um den Eindruck der angeblichen Schwierigkeit noch zu erhöhen, wird weiterhin angeführt, dass die Fläche 2 Seiten hat. Wahrscheinlich verwechselt hier der Verfasser Haben mit In-sich-enthalten; denn sonst sieht man nicht, welche Schwierigkeit er meinen kann. Nachdem sich nun der Verfasser aus einfachen und leicht vorstellbaren Begriffen durch allerhand Vermischungen und Verwechselungen ein recht trübes Medium geschaffen hat, nimmt er Anlass, die scheinbare Oberfläche der aus getrennten Atomen bestehenden Körper im Vergleich mit der ideellen Fläche zu besprechen. [illegible]

H. Krey: Einige Anzahlen für Kegelflächen.

E. Goursat: Ueber eine Classe von Doppelintegralen.

E. Picard: Ueber die unbestimmten ternären quadratischen Formen zu conjugirten unbestimmten und über die entsprechenden hyperfuchsischen Functionen.

C. Le Paige: Neue Untersuchungen über die Flächen 3. Ordnung.

H. G. Zeuthen: Ueber die einer kubischen Fläche eingeschriebenen Pentaeder.

H. Schroeter: Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.

H. Poincaré: Abhandlung über die zetafuchsichen Functionen.

Ch. Hermite: Ueber einige arithmetische Folgerungen aus den Formeln der Theorie der elliptischen Functionen.

W. Fiedler: Ueber die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen. H.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Naturkunde. Tweede reeks. Negentiende, twintigste deel. Amsterdam 1884. Johannes Müller. 441 + 452 S.

Der 19. und 20. Teil enthalten folgende mathematische Abhandlungen:

T. J. Stieltjes: Ueber die quadratische Zerlegung von Primzahlen der Form $3n+1$. (19).

C. le Paige: Ueber die Flächen 3. Ordnung. (19).

F. de Boer: Erweiterung des Satzes von Rolle. (19). — Discussion der allgemeinen Gleichung 4. Grades. (20).

P. H. Schoute: Ueber eine specielle Curve 4. Grades mit 3 Doppelpunkten. (19).

J. A. C. Oudemans: Das Problem des Snellius aufgelöst von Ptolemaeus. (19).

D. J. Korteweg: Ueber die Bahnen beschrieben unter dem Einfluss einer centralen Kraft. (20).

G. J. Michaëlis: Ueber die Theorie der Federkraft-Nachwirkung. (20).

D. Bierens de Haan: Baustoffe für die Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften in den Niederlanden. (19. 20.). H.

Litterarischer Bericht
VIII.

Lehrbücher.

Leitfaden zum Unterrichte in der Arithmetik und Algebra an Gymnasien und verwandten Anstalten. Von Dr. Joh. Chr. Walberer, Professor am königlichen Gymnasium in Amberg. Zweite, durchgesehene und mit Uebungsaufgaben versehene Auflage. München 1884. Theodor Ackermann. 152 S.

Die erste Auflage ist im 241. litt. Bericht, S. 4. besprochen. Das Buch steht auch noch jetzt auf dem niedrigsten didaktischen Standpunkt. Die Sätze der Arithmetik werden nur als Auswertungsregeln aufgefasst, und selbst in diesem Sinne bleiben die Erklärungen defect. Die Division ist nur als Messung durch wiederholte Subtraction, nicht aber als Teilung erklärt. Sollte man nach der gegebenen Regel 4 Meter durch 4 dividiren, so hätte man die abstracte 4 so oft davon zu subtrahiren bis kein Rest bleibt. Dass auch sinnlose Aufstellungen, wie $\frac{a}{0} = \infty$, vorkommen, kann kaum auffallen, wo die ganze Behandlungsweise auf gedankenloses Rechnen abzielt.

H.

Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Arithmetik an höheren Lehranstalten. Von Prof. H. Köstler, Oberlehrer am Domgymnasium zu Naumburg a. S. Zweite, vermehrte und teilweise umgearbeitete Auflage. Halle a. S. 1885. Louis Nebert. 42 S.

Der Leitfaden enthält auf 15 Seiten diejenigen Sätze, welche der Anfänger erlernen muss, um mit den 4 Species der Buchstabenrechnung vertraut zu werden, nebst Andeutung der Beweise. Die

Formulirung ist deutlich und correct. Was die Grenzen des Lehrstoffs betrifft, so ist die Bedeutung der Buchstaben auf positive ganze Zahlen beschränkt, die algebraische Division nicht zugezogen. Dagegen ist die Rechnung mit algebraischen Summen nicht, wie im Vorwort angegeben, ausgeschlossen, vielmehr + und — als Operations- und Vorzeichen eingeführt, und alles dafür nötige erklärt und in Uebung gebracht. Auch die Addition der Brüche fehlt nicht, und ist in einem Anhang zur Bildung der Generalnenner Anleitung gegeben. Ein zweiter Anhang betrifft die Decimalbrüche. Unrichtig ist in dem Buche nur die anfängliche Definition des Begriffs Rechnen, die mit allem was folgt im Widerspruch steht. Aus zwei oder mehrern Zahlen nach gewissen Regeln eine neue bilden nennt in praxi niemand rechnen, auch im folgenden der Verfasser nie. Vielmehr entsteht durch diesen Act erst ein Rechnungsausdruck, enthaltend eine Rechnungsaufgabe, die unter Umständen ausgeführt werden soll oder kann. Das letztere heisst hier stets ausrechnen, und ein anderes Rechnen kommt nicht vor. Den noch grössern übrigen Teil des Buchs bildet eine Zusammenstellung von 357 Aufgaben zur Einübung der vorher behandelten Rechnungsweisen, nach diesen geordnet.

H.

Vorschule der Geometrie. Von Prof. H. Köstler, Oberlehrer am Domgymnasium zu Naumburg a. S. Dritte, vermehrte und teilweise umgearbeitete, und vierte, verbesserte Auflage. Mit 49 in den Text gedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1884. 1885. Louis Nebert. 24, 21 S.

Diese Vorschule besteht aus 2 Teilen, der Formenlehre und der Constructionslehre. Der actuellen Abfassung nach stellen sich beide als Auswahl aus dem Lehrstoff der elementaren Geometrie ohne merklich verschiedene Gestaltung dar. Die Formenlehre macht den Schülern mit den Gegenständen der Doctrin, also mit den einfachen Gebilden und den gebräuchlichen Festsetzungen bekannt, wendet dazu jedoch auch nur die gleichen Definitionen und Worterklärungen an. Der Verfasser betrachtet als Aufgabe der Formenlehre, den Schüler von der sinnlichen Anschauung zur Abstraction der begrifflichen Erklärung emporzuführen, die Aufstellungen des Buchs als die blossen Resultate, deren Erreichung dem Lehrer überlassen bleibt. Sowol die zu befolgende Methode als auch die Art der Tätigkeit der Schüler wird unbestimmt gelassen. In der Constructionslehre ist letztere von selbst deutlich. Sie soll den Gebrauch von Lineal und Zirkel einüben, es sind zu diesem Zwecke die einfachsten Elementaraufgaben ausgewählt. Am Schluss werden zur Formenlehre Fragen, zur Constructionslehre Aufgaben gestellt. H.

Lehrbuch der ebenen Geometrie. Von **Julius Hoch**, Lehrer für Mathematik an der von Grossheim'schen Realschule in Lübeck. I. Teil: Linien, Winkel, Kongruenz und Gleichheit der Figuren. Mit 126 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Halle 1884. H. W. Schmidt. 164 S.

Oberster Gesichtspunkt der Abfassung und Motiv zur Herausgabe eines neuen Lehrbuchs ist erklärtermassen die systematische Anordnung des Lehrstoffs. Diese tritt auch in der Tat in einer weiter als gewöhnlich gehenden Gliederung, Nebenstellung der sich ausschliessenden Gegenstände und stufenweisen Folge der einzelnen, jedesmal ganz erledigten Themata deutlich an den Tag. Ob es nun Ansicht des Verfassers sei, dass der Unterricht nach einem so bearbeiteten Lehrbuche, mit Hintansetzung anderer Gesichtspunkte, namentlich der logischen Verknüpfung, dem pädagogischen Zwecke genüge, ist im Vorwort nicht ausgesprochen; doch darf man wol annehmen, dass er sein Buch nicht zu blosser Ergänzung anderer Lehrbücher hat herausgeben wollen. Eine Geringschätzung des logischen Gesichtspunkts ist hier freilich am aufgewandten Fleisse nicht zu bemerken: die Beweise sind stets in extenso und in vorschriftsmässiger Form gegeben; dagegen steht ein principieller Mangel dem logischen Verständniss im Wege. Es ist gesagt, dass der Winkel zur Bestimmung des Richtungsunterschiedes dient, aber nicht, wie dies geschieht. Vom Zusammenlegen der Winkel, ihrer Addition und Messung, von der Vergleichung der Richtungen bei verschiedenem Ausgangspunkt ist nirgends die Rede. Das auf dem Winkelbegriff ruhende Dunkel zieht sich dann durch alle Sätze, die mit Winkeln zu tun haben, fort, und der logische Faden lässt sich nirgends verfolgen. Die Anordnung der Gegenstände ist folgende: zuerst nach den Gebilden: Linien, Winkel, Figuren. Die 2 Hauptabschnitte über die Figuren behandeln die Congruenz und die Gleichheit, ersterer nach der Reihe das Dreieck, das Viereck, das Vieleck, den Kreis, letzterer das Dreieck, Parallelogramm und Trapez nach Höhe und Grundseite, bei Uebereinstimmung in beiden, in einem und in keinem, die Summe, die Verwandlung und Teilung, die Flächenmessung. Dann folgen Uebungssätze, Aufgaben und Constructionen. H.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von Dr. E. **Glinzer**, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Erster Theil: Planimetrie mit 185 Figuren und einer Sammlung von 250 Aufgaben. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Hamburg 1884. F. H. Nestler u. Melle. 111 S.

Die erste Auflage ist im 258. litt. Bericht S. 19. besprochen. In der zweiten kom[illegible] ein Anhang über harmonische Teilung.

Die Uebungssätze und Aufgaben sind vermehrt und insbesondere dafür gesorgt, die schwierigeren Aufgaben durch leichtere vorzubereiten. Ferner unterscheidet sich die neue Auflage durch manche Zusätze und Erweiterungen. In der Proportionslehre wird der Fall der Incommensurabilität erwähnt, und die Gültigkeit eines Satzes für denselben in einem Zusatz ohne Beweis ausgesprochen, doch findet er weder verständliche Erörterung noch theoretische Berücksichtigung.

H.

Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten. Von Dr. F. W. Fischer, Oberlehrer am Gymnasium zu Kempen. Erster Teil: Planimetrie. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Freiburg i. Br. 1884. Herder. 184 S.

Der Inhalt des Buches ist kein abgeschlossener. Obgleich der Lehrgang von seiner Aufgabe der Entwickelung der Grundlagen der Doctrin nie abweicht, so begrenzt er sich doch nach keiner Seite hin auf ein bestimmtes Quantum des Notwendigen, sondern zieht im weitern Fortschritt mehr und mehr Themata und Fragen nach dem Gesichtspunkt des Interesses der Schüler in den Kreis der Betrachtung. Besonders zu nennen sind etwa die Transversalenlehre, Fragen über Maxima, Pol und Polare am Kreise, harmonische Teilung u. a. Die Methode steht auf Euklidischem Boden. Die Darstellung ist ausführlich und darauf eingerichtet dem Schüler als Muster zu dienen. Nicht ausführlich genug ist der Anfang der Lehre von den Winkeln. Der Winkel war durch seine Entstehung erklärt. Zur exacten Auffassung mussten die Consequenzen der Erklärung für die fertig vorliegenden Winkel, d. h. die Sätze über Addition und Grössenvergleichung der Winkel ausgesprochen werden. Unter dem Parallelensatz steht ganz unzutreffend: „Beweis" — denn es folgt dann nur die wiederholte Behauptung des Satzes in anderer Form. Die Elementaraufgaben sind von den Lehrsätzen getrennt. Ausser ihnen folgen auf jeden Abschnitt viele Aufgaben und Sätze zur Uebung.

H.

Leitfaden für den Unterricht in der Stereometrie mit den Elementen der Projektionslehre. Von Dr. Carl Gusserow, Oberlehrer am Dorotheenstädtischen Realgymnasium in Berlin. Berlin 1885. Julius Springer. 96 S.

Die Lehrmethode dieses Leitfadens ist durchaus originell. Sie unterscheidet sich von der gewöhnlichen durch die anfängliche Ein-

führung und unausgesetzte Anwendung des Projectionsbegriffs. Derselbe dient grösstenteils zur Deduction, während die resultirenden Sätze davon unabhängig auftreten; doch gibt es ausser den Sätzen, welche die Projectionen an sich betreffen, auch Sätze über Raumgebilde, die mit Anwendung des Begriffs formulirt werden; jedenfalls scheint nicht zum Ziele genommen zu sein, die erzeugte Mannichfaltigkeit der Betrachtung, wo sich dies nicht von selbst vollzieht, zu einer einheitlich constanten hinzuführen. Die hier eingeführten Projectionen sind Parallelprojectionen in beliebiger Richtung auf beliebige Ebenen, nicht aber auf feste, gemeinsame Grundebenen, sondern auf solche, die zur Figur gehören. Der Begriff ist also ein ganz flüssiger, beweglicher auf einem Felde von doppelt unendlicher Mannichfaltigkeit. Fragt man nun: kann ein Schüler auf dem so eröffneten Felde der Betrachtung in dem kurzen Laufe des elementaren stereometrischen Lehrcursus orientirt werden und einigermassen einen Ueberblick gewinnen? — so muss man dies wol entschieden verneinen. Nur der Lehrer macht sich seine Aufgabe durch diese Methode leicht, die Schüler werden ganz abhängig von seiner Führung. Dass der bezeichnete Missstand nicht grössere Ausdehnung annehmen kann, bewirkt in der vorliegenden Gestaltung der Doctrin die Reihe feststehender Sätze. Wäre das Ganze so in den Projectionsbegriff verwebt, wie der Anfang, so würde alles Wissen wie an schwimmenden Strohhalmen hangend erscheinen. Der Verfasser empfiehlt die Methode damit, dass sie die zu starken Anforderungen an das Vorstellungsvermögen, welche der Uebergang von der Planimetrie zur Stereometrie auferlegt, durch Vermittlung mildere, indem anfänglich nie mehr als zwei Ebenen in gegenseitiger Lage betrachtet werden. Ausserdem seien manche Vorteile damit verbunden: es werden weniger Figuren erfordert, und die Beziehung der elementaren Stereometrie zur Projectionslehre wirkt vorbereitend für letztere. Rechnen wir beide Vorteile zu dem mancher Erleichterung der Deduction hinzu, so wollen wir das Unternehmen als einen beachtenswerten Versuch der Verbesserung der Methode gern anerkennen; nur müssen wir das, was bisher mit gutem Grunde als Norm gegolten hat, aufrecht halten, dass nämlich alle zur Theorie gehörigen Sätze absolut und ohne Beziehung zu willkürlicher Betrachtung aufgestellt werden. Letzterer kann nur die Bedeutung eines Hülfselementes eingeräumt werden, wie sie den Hülfslinien zukommt. Hier hingegen erscheint der Einführung zufolge die Projection als wirklicher Lehrgegenstand. Noch ist als charakteristisch zu erwähnen, dass den Körpern, den eben- und krummflächigen, insbesondere ihrer Inhaltsbestimmung, eine recht eingehende Behandlung zuteil wird. Auch die Schwerpunkte, rein geometrisch erklärt, bilden einen besonderen Gegenstand. Nach der Einleitung sind die Hauptabschnitte: die Stellung der Ge-

raden zur Ebene; die Lage zweier, dann mehrerer Ebenen zu einander; Polyeder; krummflächige Körper; Schwerpunkt. Der Anhang enthält: das Pyramidenproblem; den Euler'schen Satz und die regelmässigen Polyeder; 2 Lehrsätze. H.

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Von Dr. Th. Spieker, Professor am Realgymnasium zu Potsdam. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Potsdam 1885. Aug. Stein. 134 S.

Das Buch zeigt keine wesentlichen Verschiedenheiten von den gewöhnlichen gleichen Inhalts. Es gibt vollständig das Notwendige und dieses mit Fleiss und Geschick bearbeitet. Die Einleitung enthält die Geschichte der Entstehung der Trigonometrie. Die goniometrischen Functionen werden am rechtwinkligen Dreieck, dann am Kreise erklärt, zuerst als 6 coordinirte, dann in gegenseitiger Beziehung. Nun folgt die Berechnung des rechtwinkligen, dann gleichschenkligen Dreiecks, dann regelmässigen Vielecks, hierauf erst die Additionsformeln mit allen Consequenzen und ihrer Anwendung, dann die Berechnung des beliebigen ebenen Dreiecks, der Vierecke und Vielecke, dazu einige Aufgaben. Die Herleitung der sphärisch trigonometrischen Formeln ist die gewöhnlihhe mit Hülfe des Polardreiecks; hierzu gleichfalls einige Aufgaben. Dann folgen die Formeln über den um- und einbeschriebenen Kreis und den Inhalt des sphärischen Dreiecks, nebst Uebungen. H.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. Von Adolf Sickenberger, Professor am k. Maximiliansgymnasium in München. Dritte, umgearbeitete Auflage. München 1885. Theodor Ackermann. 188 S.

Die erste Auflage ist im 288. litt. Bericht S. 33, die zweite im 247. l. B. S. 24. besprochen. Aenderungen in der gegenwärtigen sind nicht angegeben. H.

Lehrbuch der Mathematik. Für den Schul- und Selbst-Unterricht bearbeitet von Dr. Hermann Gerlach, Oberlehrer am Friedrich-Franz-Gymnasium in Parchim. Zweiter Teil. Elemente der Planimetrie. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 134 Figuren in Holzschnitt und 682 Uebungssätzen und Aufgaben. Dessau 1885. Albert Reissner. 158 S.

Die vierte Auflage ist im 245. litt. Bericht S. 6. besprochen. Veränderungen in der neuen Bearbeitung betreffen die Entfernung

eines Punkts von einer Geraden, die gleichschenkligen Dreiecke, die Tangentenvierecke, die Berührung zweier Kreise, die Kreisfläche, das Product zweier Strecken, die proportionirten Linien, die harmonischen Strahlen, die Polaren und die Chordalen. In der Aufgabensammlung sind die 67. und 68. Aufgaben durch neue ersetzt.

H.

Die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse, Proportionen und Progressionen mit Anwendung auf die Zinseszins- und Rentenrechnung (Kursus der Obersekunda des Gymnasii) für den Schulgebrauch bearbeitet von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. Rostock 1885. Wilh. Werther. 44 S.

Das Lehrbuch behandelt in exact euklidischer Form (Definition, Lehrsatz, Beweis, Zusätze, nachfolgende Erläuterungen und Beispiele) nach einander: die arithmetischen Verhältnisse und Proportionen, die geometrischen Verhältnisse und Proportionen, arithmetische Progressionen I. Ordnung, höhere arithmetische Reihen, darunter die figurirten Zahlen, dann die geometrischen Progressionen, nebst Begriff und Kriterien der Convergenz für arithmetische und geometrische Reihen, zuletzt die Zinseszinsrechnung und Rentenrechnung. Es wird vorausgesetzt die Kenntniss der 7 Elementaroperationen und der Gleichungen 1. Grades. H.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst vielen Uebungsaufgaben. Für Lehrerseminarien und höhere Bürgerschulen, sowie für den Selbstunterricht bearbeitet von A. P. L. Claussen, Königl. Seminarlehrer in Bütow. Potsdam 1884. Aug. Stein. 240 S.

Norm der Abfassung des Buches scheint zu sein, dass sich der Lernende nicht zu sehr mit Denken anstrenge und lieber auf dem Umwege manches Irrens und Missverstehens mit der Zeit zum Ziele gelange. Für die Geistesbildung des einzelnen Autodidakten würde letzteres gewiss kein Schade sein. Erwägt man aber, dass ein Missverständniss, ehe die Klärung eintritt, sich vom Buche auf Hunderte von Seminaristen, von jedem wieder auf Tausende von Kindern übertragen kann, so können uns die Folgen eines ungenauen Ausdrucks doch nicht so gleichgültig sein. Der Vortrag beschränkt sich zum grossen Teil auf blosse kategorische Mitteilung dessen, was dem Rechner geläufig ist. Die Aufstellungen sind bis auf weniges concinn und richtig, obwol mehr in familiärer Sprache ausgedrückt. Sollte ein Leser einen Satz wie den: Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die 3 letzten Ziffern es sind — so verstehen, es müssten die 3 letzten

Ziffern 0 oder 8 sein, so möchte der Irrtum geringfügig scheinen. Schlimmer ist jedenfalls die falsche Aussage, $\frac{a}{0}$ sei unendlich, über deren Sinn es dem Leser nicht verwehrt wird sich Gedanken zu machen, welche er will. Im Verhältniss zu der hier vorausgesetzten niedrigen Entwickelungsstufe des Denkens ist nun der Umfang des Lehrstoffs sehr gross. Er erstreckt sich auf Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, die algebraischen Gleichungen bis zum 3. Grade, diophantische Gleichungen, arithmetische und geometrische Progressionen, Exponentialgleichungen und Zinsrechnung. Uebungsaufgaben sind reichlich beigegeben. H.

Leitfaden der Physik. Von R. H. Hofmeister, Professor an der Kantonschule und ausserordentlicher Professor an der Hochschule in Zürich. Vierte Auflage. Zürich 1884. Orell Füssli u. Co. 195 S.

Das Buch zeigt eine ungemeine Vielseitigkeit, Umsicht und Beherrschung des so vielteiligen, verschiedenartigen Stoffs. Die Abfassung ist so abgekürzt als es ohne Uebergehung irgend eines wichtigen Punktes möglich ist. Jeder Punkt wird eben nur berührt; doch sind die Angaben hinreichend und deutlich, um den Lehrer an alles zu erinnern, was zu erörtern und zu berücksichtigen ist. Es wird uns durch das Buch das Bild einer empirischen Wissenschaft entfaltet, deren Begriffe nicht aus ideellen Principien auf den Gegenstand übertragen, sondern durch die Erfolge der in alle Erscheinungen eindringenden Specialuntersuchungen als feste Haltpunkte gewonnen worden sind, einer Wissenschaft also, welche die Natur nach deren eigener Anleitung zu beherrschen strebt. Wenn je dem Schulunterricht in der Physik die Fähigkeit zugeschrieben worden ist, zur allgemeinen, innern Bildung beizutragen, so kann ihm wol die unersetzliche Stelle darin zuerkannt werden, dass er die Idee einer wissenschaftlichen Empirie erzeugt. Dazu ist aber erforderlich, dass der Schüler, wenn gleich auf viel kürzerem Wege als die Entdecker, mit den Elementen der Empirie vertraut wird, um erst zu lernen für geringen Zuwachs an Realerkenntniss dankbar zu sein, ehe er über die höchsten Resultate der Forschung mitzusprechen anfängt. Aus diesem Geiste scheint auch der vorliegende Leitfaden bearbeitet. Die Erklärungen, auch wenn sie von weiterer Bedeutung sind, schliessen sich meist an die besondern Gegenstände an. Die Hauptteile sind: Physik der Materie, Physik des Aethers; die Gegenstände des ersten, d. i. der Mechanik: Wirkungen der äussern, der innern Kräfte, Wellenbewegung, Akustik. Unter diesen vertritt der zweite die Statik, die 2 letzten die Dynamik der Elasticität, während beim ersten Gleichgewicht und Bewegung die unterste Abteilung bilden.

Die in der Mechanik behandelten Themata beruhen auf Auswahl. Eine Beschränkung auf Anwendung der Schulmathematik lässt sich nicht als massgebend betrachten, sonst hätte manches Thema ausgeschlossen werden müssen, wo doch qualitative Aufstellungen und quantitativ vergleichende Gesichtspunkte sich verständlich geben liessen. Die Physik des Aethers enthält: Wärmelehre, Optik, Reibungselektricität, Galvanismus, Magnetismus, Wirkungen zwischen Strömen und Magneten, Elektromagnetismus, Induction, Thermoelektricität, tierische Elektricität. H.

Lehrbuch der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen. Im Auftrage der Königlichen Kommission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Württemberg ausgearbeitet von Dr. Ludwig Blum, Professor an der K. Realanstalt in Stuttgart. Dritte, vermehrte Auflage, bearbeitet von Richard Blum, Professor am K. Lyceum in Esslingen. Leipzig 1885. C. F. Winter. 539 S.

Der Verfasser hat zu gleichzeitigem Gebrauche zwei Bücher herausgegeben, deren eines er bei sonst gleichem Titel „Grundriss", das andere „Lehrbuch" nennt. Ersteres, im 241. und 260. litt. Bericht bzhw. S. 10. und S. 41. besprochen, ist für den Gebrauch der Schüler, letzteres für den Gebrauch des Lehrers bestimmt. Der Vortrag des Lehrbuchs, geteilt in 44 geschlossene Themata, jedes für 1 Stunde berechnet, ist gleichmässig pragmatisch beschreibend, Erscheinung, Erklärung, Gesetze werden in populärer Breite für jeden einzelnen Gegenstand vorgeführt, reichlich durch eingelegte Figuren unterstützt, ohne je den Gedanken einer einheitlichen Theorie anzuregen. So ist z. B. von Beharrung, Centrifugalkraft, Tangentialkraft die Rede, als wenn jedes eine Sache für sich wäre. Manches im Buche nimmt Bezug auf gewerbliche Anwendung; doch selbst dieses geht nur auf Mitteilung von Wissen, nicht aber auf Ausbildung von Fähigkeiten aus. Im ganzen lässt sich kein rechtes pädagogisches Ziel erkennen. H.

Sammlungen.

Aufgaben aus der Stereometrie und Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von K. Jüdt, k. Professor und Rektor der Realschule in Ansbach. Dritte, vermehrte Auflage. Ansbach 1885. Fr. Seybold. 56 S.

Das Buch enthält Uebungsmaterial für den Unterricht in der Stereometrie und Trigonometrie, welches auch für descriptive Geometrie

zu verwenden sein soll, was sich indes nur auf die ersten 28 Aufgaben beziehen kann. Alle übrigen sind Rechnungsaufgaben, und zwar fordern die nächsten 205 Berechnung von Bestimmungsstücken von Körpern. Die folgenden 96 Aufgaben sind goniometrisch, die noch übrigen 76 teils unmittelbar trigonometrisch, teils geometrisch aufgestellt und mit Trigonometrie zu lösen. Die Resultate stehen am Schluss. H.

Tabellen.

Saggio di tavole dei logaritmi quadratici del Co. Antonino di Pampero. Udine 1885. G. B. Doretti e Soci. 55 S.

Quadratische Logarithmen, bezeichnet durch Lq, sind Logarithmen von Logarithmen, definirt durch

$$LqN = x; \qquad N = a^{2^x}$$

Sie sollen die Potenzirung unmittelbar auf Addition zurückführen. Zum Gebrauch dieser Function hat der Verfasser 2 Tafeln berechnet. Die erste gibt auf 1 Seite für jeden Exponenten E, mit dem man potenziren will, den Wert von $\frac{\log E}{\log 2}$. Die zweite hat 15 Columnen überschrieben E, Lq, N_0, N_1, N_2, … N_{12}, und zwar ist N_{10} die gegebene Zahl, die folgenden stehen dazu in der Beziehung:

$$N_k = N_{k-1}^2$$

Natürliche Reihenfolge findet man in der Columne N_{10}, welche von 10 beginnt und durch die Zehntel bis 100 fortschreitet; darüber hinaus geht dann die Columne N_9 von 10 durch die Hundertel bis 11. Ein Anhang gibt die Tafel der Exponenten für die Basen 2 bis 50. H.

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln von Dr. E. F. August. Vierzehnte, verbesserte Auflage besorgt von Dr. F. August, Professor an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule bei Berlin. Leipzig 1884. Veit u. Comp. 204 S.

Die 11. Auflage ist im 239. litt. Bericht, S. 36. besprochen. Nach ihr zeichnet sich zuerst die gegenwärtige durch Vermehrung und Verbesserung aus. Bei der Kreismessung ist die letzte Ziffer einiger Zahlen um 1 erhöht. In den astronomischen Angaben ist das tropische Sonnenjahr und der Sterntag hinzugekommen, die Masse des Mars nach der neuesten Bestimmung durch Hall, die halbe Ro-

tationsaxe der Erde in Uebereinstimmung mit den Tafeln von Gauss und der Berechnung von Becker verbessert, in den Erläuterungen das Verfahren zur Beurteilung der Genauigkeit einfacher und übersichtlicher dargestellt. H.

Logarithmentafeln, sowie Resultate zu den Beispielen und Aufgaben des Lehrbuchs der Arithmetik und Algebra. Von A. P. L. Claussen, Königl. Seminarlehrer in Bütow. Potsdam 1884. Aug. Stein. 47 S.

Die Logarithmen sind fünfstellig, im gewöhnlichen Umfang, mit vollständigen Proportionalteilen der Differenzen. Auf je 2 Nebenseiten stehen die Logarithmen von 1000 Zahlen. Vorher geht eine Tafel der Logarithmen der Zahlen bis 99. Die Resultate betreffend vergl. S. 46. H.

Geodäsie.

Handbuch der niederen Geodäsie. Von Friedrich Hartner, weiland Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien. In V. und VI. Auflage bearbeitet und vermehrt von Josef Wastler, k. k. Regierungsrath und o. ö. Professor der Geodäsie an der k. k. technischen Hochschule in Graz. VI. Auflage. Mit 425 Holzschnitten und 2 Tafeln. Wien 1885. L. W. Seidel u. Sohn. 786 S.

Die 5. Auflage ist im 243. litt. Bericht S. 32. besprochen. Die wichtigsten Vermehrungen der neuen Auflage betreffen die Theodolit-Aufnahmen und die damit im Zusammenhange stehenden Coordinatenrechnungen. Die Capitel über Genauigkeit der Längenmessungen, über Distanzmesser, mikroskopische Ablesevorrichtungen, Sextanten, Winkelcentrirung, Berechnung der Polygonzüge, Detail-Aufnahme, Ausgleichungsrechnung, Planimeter, Aneroid-Messungen, Ausgleichung der Nivellements, Tachymetrie etc. wurden dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechend erweitert. H.

Die Berechnung der trigonometrischen Vermessungen mit Rücksicht auf die sphäroïdische Gestalt der Erde. Von J. G. F. Bohnenberger. Deutsche Bearbeitung der Abhandlung „De computandis etc." Von E. Hammer, Professor am kgl. Polytechnikum in Stuttgart. Mit 13 Figuren im Text. Stuttgart 1885. J. B. Metzler. 65 S.

Der Titel des Originalwerks ist: De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis commentatus Joan. Theophil. Frider. Bohnenberger. Es ist 1826 als Programm

der Universität Tübingen erschienen und enthält in einfachster Form einen vollständigen Abriss der elementaren Aufgaben der höhern Geodäsie. Das Vorliegende unterscheidet sich von den zahlreichen Schriften gleichen Inhalts, die sich auf Bohnenberger's Abhandlung stützen, als eine bis auf gewisse Punkte treue Uebersetzung der Urschrift. Da es jedoch zum Hülfsmittel des Studiums der Geodäsie für unsere Zeit bestimmt ist, so waren einige Aenderungen und Vermehrungen unerlässlich. Statt der Toise ist das Meter eingeführt, die Dimensionen der Erde sind nach Bessel's Angaben zugrunde gelegt, die ursprünglich für die würtembergische Landesvermessung bestimmten Tafeln sind soweit ausgedehnt, dass sie für Deutschland ausreichen. Ueber das Nähere gibt das Vorwort des Uebersetzers Rechenschaft.

H.

Revue Suisse de Topographie et d'Arpentage. Organe de la Société Suisse de Topographie et des Géomètres de la Suisse romande. Paraissant à Genève le 15 de chaque mois. 1. année. Nr. 1. 1885.

Diese neue Zeitschrift, redigirt von Oscar Messerly in Genf, soll nach dem dreijährigen Bestehen des Bulletin de la Société Suisse de Topographie an dessen Stelle treten und durch gegenseitige Belehrung ein Band zwischen den Schweizer Topographen und Geometern schaffen. Die erste Nummer enthält: Biographie von Plantamour, Director des Genfer Observatoriums, dem E. Gautier gefolgt ist, Triangulation, Plan der wissenschaftlichen Erforschung des Genfer Sees, polygonometrische Merkzeichen, dann unter Varietäten: Die Tribulationen eines römischen Geometers und die merkwürdige Beobachtung, dass im Augenblick des Erdbebens in Spanien die Brüsseler Sternwarte eine geneigte Stellung angenommen hat, so dass also das Erdbeben von einer Erdeinsenkung in grosser Entfernung begleitet war. Die Mitteilungen in den genannten Artikeln sind sehr spärlich und kaum hinreichend die Aufmerksamkeit auf die Tätigkeit der Gesellschaft zu lenken, viel weniger davon Kenntniss zu geben.

H.

Taf.II.

Taf.I.

Teil.II.

16.

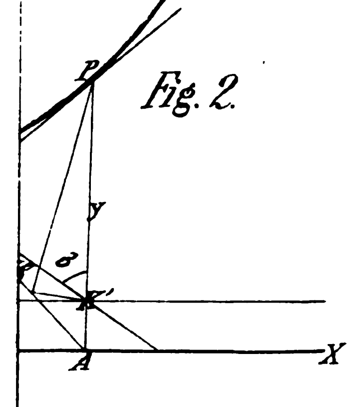


Fig. 2.



VIII. 1

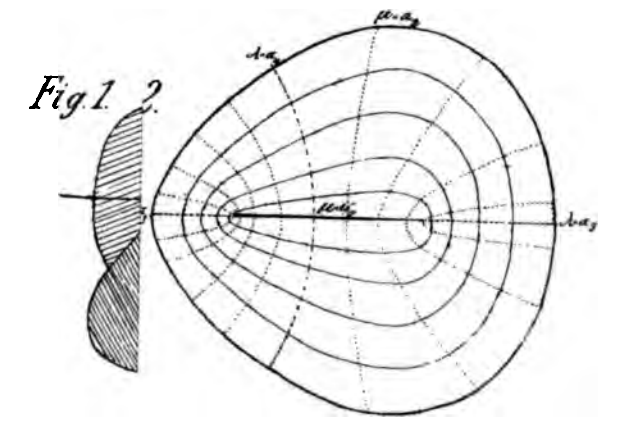


Fig. 1. 2.

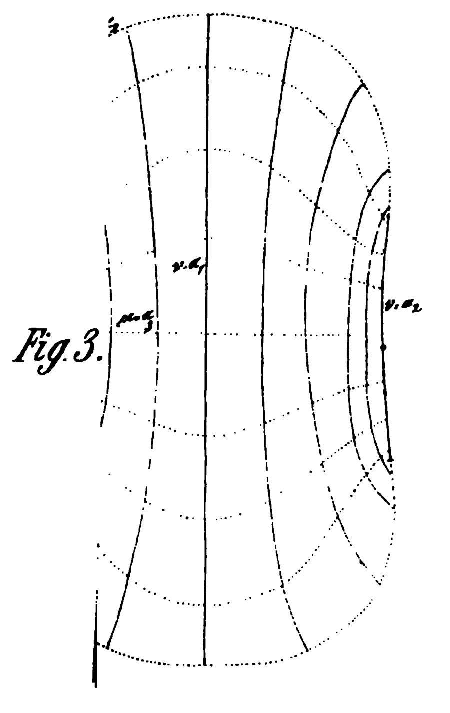
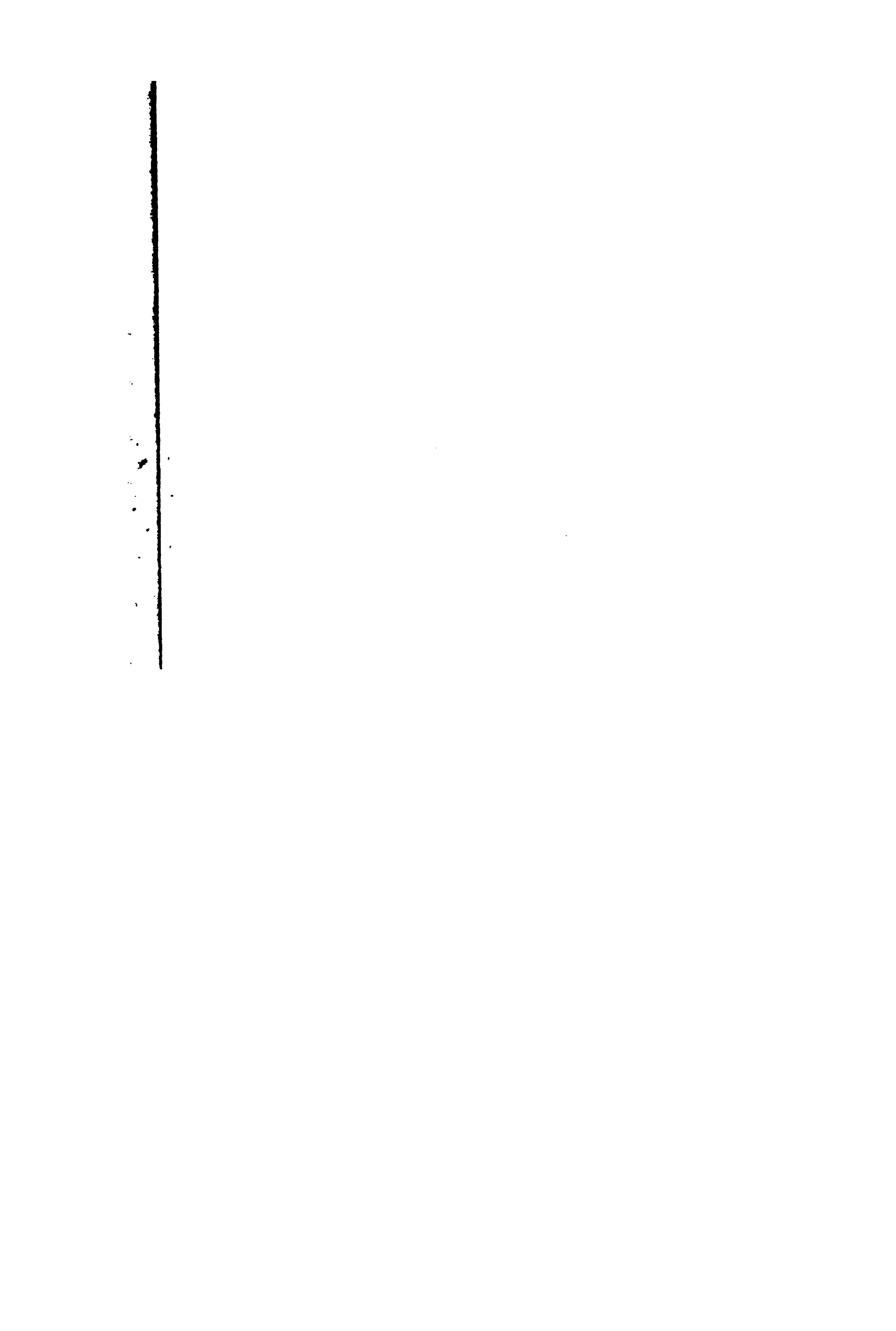
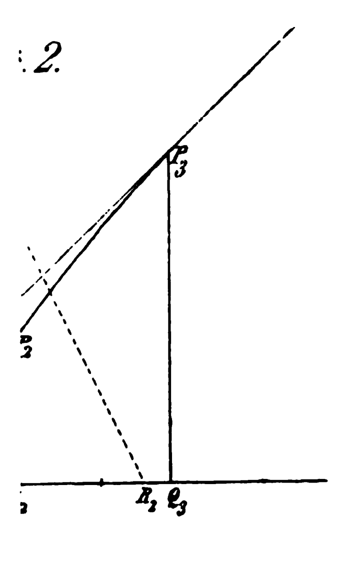


Fig. 3.



XIV

. 2.



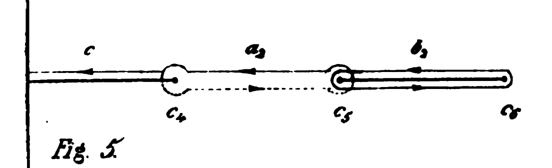
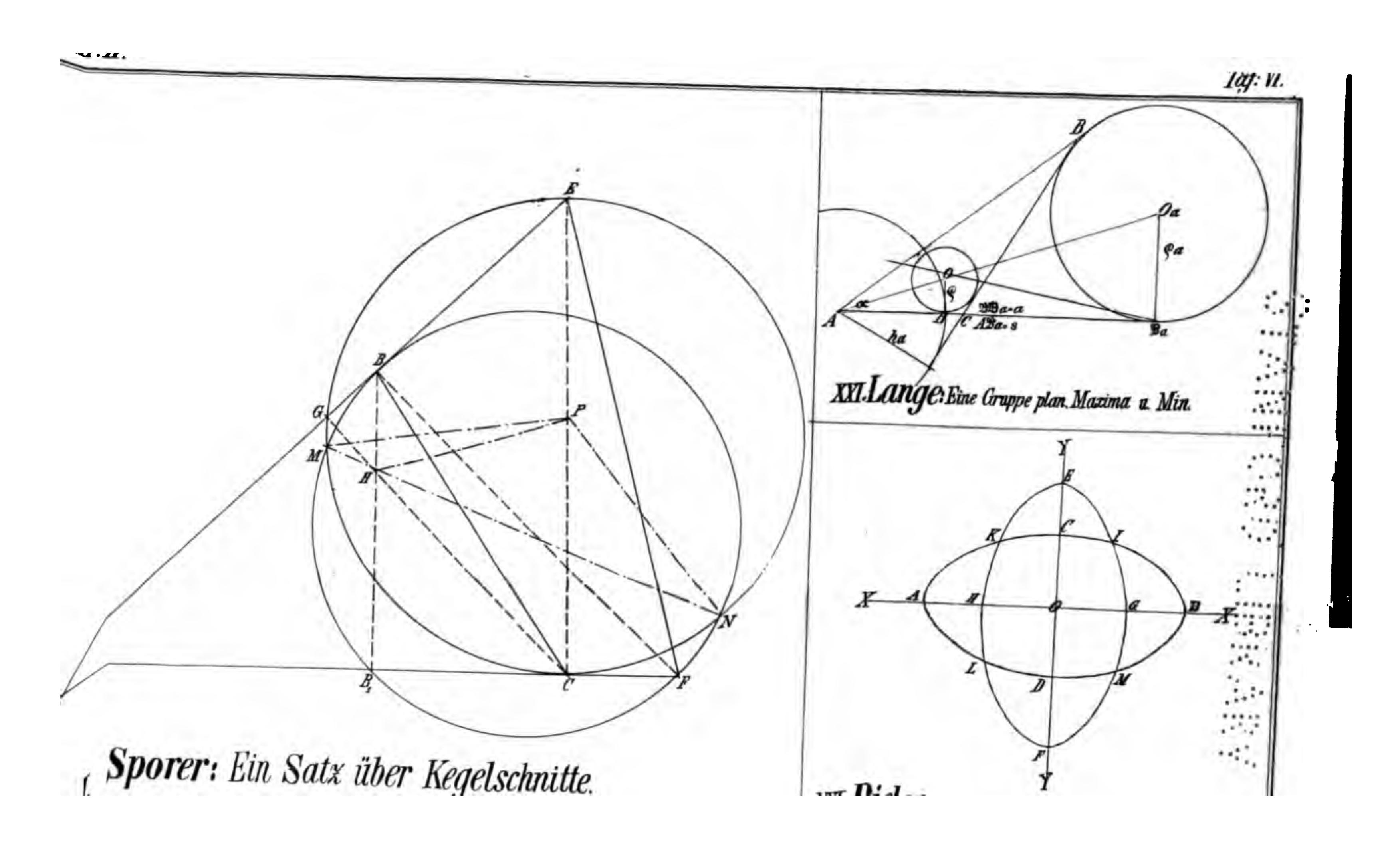
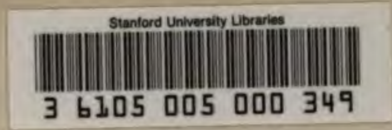


Fig. 5.

rst. d. Flächen 4. Ordnung.


Taf. II.
B
E
Oa
ρa
O


E
P
B
G
M
H
N
B₁
C
F
Sporer: Ein Satz über Kegelschnitte.
B
Oa
ϱa
O
ϱ
α
A
D
C
ha
𝔅a
XXI. Lange: Eine Gruppe plan. Maxima u. Min.
Y
E
C
K
I
X
A
H
O
G
B
X
L
D
M
F
Y


Stanford University Libraries
3 6105 005 000 349

